

考虑数据不确定性的鲁棒交叉效率 DEA 方法及其应用

李 攀^{1,2}, 吴和成¹, 孙 婧^{1†}

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016; 2. 新加坡国立大学 商学院, 新加坡 119613)

摘要: 数据包络分析 (DEA) 是一种评价决策单元相对效率的数学规划模型, 在管理决策领域得到了广泛应用. 传统交叉 DEA 方法高度依赖于真实且准确的数据. 当数据存在不确定性时, 确定性假设下得到的 DEA 模型解可能会失去可行性, 从而使得效率评价结果不可靠. 针对这一问题, 首先, 基于鲁棒优化方法, 提出一种鲁棒交叉效率 DEA 模型, 其中为了避免多重最优解造成的交叉效率值不唯一问题, 进一步建立二级目标模型来选择一组可接受的最优解; 然后, 引入鲁棒价格的概念来分析决策单元应对数据不确定性的能力, 并在此基础上探讨仁慈型和对抗型两种交叉策略的选择问题; 最后, 基于 15 个 OECD 国家的可再生能源数据, 验证所构建方法的可行性和有效性.

关键词: 数据包络分析; 交叉效率; 鲁棒优化; 效率评价

中图分类号: F272.3 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0825

引用格式: 李攀, 吴和成, 孙婧. 考虑数据不确定性的鲁棒交叉效率 DEA 方法及其应用 [J]. 控制与决策.

A robust cross-efficiency DEA approach considering data uncertainty and its application

LI Jiang^{1,2}, WU He-cheng¹, SUN Jing^{1†}

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. NUS Business School, National University of Singapore, Singapore 119613)

Abstract: Data envelopment analysis (DEA) is a mathematical programming model used to evaluate the relative efficiency of decision-making units (DMUs) and has been widely applied in the field of management decision-making. Traditional cross-efficiency DEA methods heavily rely on accurate and precise data. When data uncertainty exists, the DEA model solution obtained under deterministic assumptions may lose feasibility, making the efficiency evaluation results unreliable. To address this issue, this paper proposes a robust cross-efficiency DEA model based on the robust optimization. To mitigate the issue of non-unique cross-efficiency values caused by multiple optimal solutions, a secondary objective model is established to select a set of acceptable optimal solutions. In addition, the study introduces the concept of the price of robustness to analyze the ability of DMUs to cope with data uncertainty and discusses the choice between the benevolent and aggressive strategies. Finally, the feasibility and effectiveness of the proposed method are validated using the renewable energy data from 15 OECD countries.

Keywords: data envelopment analysis; cross-efficiency; robust optimization; efficiency evaluation

0 引言

效率评估与分析奠定了组织资源配置优化的基础, 是现代组织管理中不可或缺的内容. 在现有效率评估方法中, 数据包络分析 (DEA) 因其独特的数据驱动优势, 已广泛应用于高校、企业以及医院等各类组织的效率分析^[1]. 在传统 DEA 方法中, 每个决策单

元 (DMU) 会得到一组投入产出权重, DMU 的效率则是产出加权和与投入加权和的比值^[2]. 尽管传统 DEA 方法能够判别 DMU 的有效性 (DMU 效率为 1 则为有效), 但仍具有一定局限性. 如传统 DEA 方法是基于自评机制假设, 即每个 DMU 仅使用有利于自身的投入产出权重, 这导致效率评估结果不客

收稿日期: 2024-07-11; 录用日期: 2024-12-14.

基金项目: 江苏省社科基金重点项目 (23GLA003); 国家自然科学基金项目 (72271120); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目 (KYCX23_0409); 国家留学基金项目 (202306830166).

责任编辑: 唐万生.

†通讯作者. E-mail: sunjing_candice@nuaa.edu.cn.

观并且缺乏公平性^[3]。此外,当存在多个有效 DMU 时,DEA 则无法提供 DMU 完整的效率排序。针对这些不足, Sexton 等^[4]基于自评与他评视角,提出了交叉效率机制。随后,交叉效率 DEA 方法引起了学术界的广泛关注,成为 DEA 领域中的重要研究方向。

目前关于交叉效率 DEA 的研究主要集中在交叉效率 DEA 模型与交叉效率聚合策略两方面^[5]。针对交叉效率 DEA 模型的研究主要关注如何获取合理的投入产出权重。如为解决传统交叉效率模型具有多重解的问题, Wang 等^[6]开发了一种中立型交叉效率模型。Borrás^[7]构建了一种基于 DEA 有效前沿结构的交叉效率 DEA 方法,从而达到降低效率结果对多重最优解的敏感性的目的。在最近的研究中,王兆华等^[8]提出了一种改进的分层博弈交叉效率模型,并将其用于评估我国水权交易市场政策的有效性。针对交叉效率聚合策略的研究则聚焦于如何根据交叉效率矩阵获取综合交叉效率值。针对此问题,学者们提出一系列的交叉效率聚合方法,如基尼系数^[9]、前景理论^[10]以及基于后悔理论的集结方式^[11]等。

现有文献从不同角度丰富了交叉效率 DEA 的理论与应用,但未能充分考虑数据不确定性对 DEA 模型评价结果的影响。在实践中,由于测量误差、数据收集偏差以及环境因素波动等原因,决策者观测或收集到的数据往往会偏离其真实值^[12]。当数据不能准确反映或衡量事物的真实水平时,便发生了数据不确定性现象。如在 DEA 应用较为广泛的能源领域,相关指标数据如碳排放、能源消耗以及资本存量等均是通过对一定方法估算得到,尚未有精确方法能够对其进行测算和衡量^[13]。事实上,数据不确定性现象在现有研究中已引起了广泛关注^[14]。由于 DEA 是一种数据驱动的数学模型,其投入产出权重的可行性对数据准确性高度敏感。即使是一个非常微小的数据变化,也可能使得 DEA 模型原有的最优投入产出权重失去可行性,进而降低效率评价结果的决策参考价值^[15]。可见,数据不确定性是 DEA 效率评价过程中不可忽略的问题。在现代组织环境越来越不稳定和不可预测的背景下,组织管理者更加需要确保决策的稳健性以有效优化组织资源配置。因此,提高 DEA 方法的鲁棒性具有重要的理论意义与实践价值。

从不同角度和原理出发,学者们建立了不同类型的不确定 DEA 模型,如模糊 DEA^[13]、鲁棒 DEA^[16]、机会约束 DEA^[17]和区间 DEA^[18]等。模糊 DEA 通过假设某种隶属度函数将数据转化为模糊数来考虑数

据的不确定性,模型较为复杂且计算量较大,实践应用价值有限^[16]。机会约束 DEA 则是处理随机数据的不确定 DEA 模型,需要严格的概率分布假设才能将模型转化为可求解的形式,并且需要大量的历史数据进行参数估计。区间 DEA 方法则仅关注数据的区间端点值,结果可能过于保守,也忽略了区间中的价值信息。与上述不确定 DEA 方法相比,在鲁棒优化(robust optimization)理论上发展起来的鲁棒 DEA 方法则具有较少的应用限制。在鲁棒优化框架下,鲁棒 DEA 首先通过设定不确定性集合来界定数据可能的波动范围,然后在模型约束中添加保护函数来减缓数据不确定性对投入产出权重可行性的影响。因此,即使数据发生一定变化,鲁棒 DEA 的投入产出权重依然能够以较高概率维持可行性。然而,目前关于鲁棒交叉效率 DEA 模型的研究尚处于起步阶段,且在以下方面存在一定不足^[19-20]。第一,在鲁棒 DEA 模型下,DMU 的鲁棒交叉效率值不仅取决于投入产出权重,而且与鲁棒优化的保护函数也紧密相连。已有研究仅根据投入产出权重定义鲁棒交叉效率值,可能会导致评价结果失真。第二,不确定变量的等式约束会极大地缩小鲁棒模型的可行域,甚至导致模型不可行^[21-22]。现有鲁棒交叉 DEA 模型均含有等式约束,模型可行性与适用性有限。第三,仁慈型和对抗型交叉策略是交叉效率 DEA 中两种常用的假设,用于解决模型多重最优解导致的交叉效率不唯一问题。然而,如何在这两种假设中做出适当选择尚未得到解决。

为了弥补已有研究的不足,本文基于鲁棒优化理论构建了一种新的鲁棒交叉效率 DEA 模型。具体而言,首先介绍了不含有等式约束的等价 CCR-DEA 模型,避免等式约束使得所开发的鲁棒 DEA 方法面临不可行问题。其次,基于鲁棒优化中的多面体不确定集,将确定性的 CCR-DEA 模型拓展为鲁棒 CCR-DEA 模型。此外,为避免多重最优解造成的交叉效率值不唯一问题,本文进一步建立二级目标模型来选择一组可接受的最优解。在此基础上,将鲁棒优化保护函数纳入鲁棒交叉效率的定义,从而得到更加准确的鲁棒交叉效率值。最后,引入鲁棒价格的概念评估 DMU 应对数据不确定性的能力,并在此基础上选择鲁棒价格最小的交叉策略。相关结果为交叉策略的选择提供了一种新的思路。基于 15 个 OECD 国家的可再生能源数据,验证了本文方法的可行性与有效性。

1 考虑不确定性的鲁棒交叉效率 DEA 模型

1.1 CCR-DEA 模型的等价形式

假设有 n 个 DMU, $DMU_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 使用 m 个投入 $x_{ij} (i = 1, 2, \dots, m)$ 来获取 s 个产出 $y_{rj} (r = 1, 2, \dots, s)$. 各投入产出数据均为非负数. DMU_o 的自评效率 E_{oo} 可借助如下的 CCR-DEA 模型计算^[2]:

$$\begin{aligned} E_{oo} &= \max \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0 \quad \forall j \\ & \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} = 1 \\ & v_{io}, u_{ro} \geq 0 \quad \forall i, \forall r. \end{aligned} \quad (1)$$

在鲁棒模型中, 含有不确定变量的等式约束会限制模型的可行域甚至导致模型不可行^[21-22]. 模型 (1) 的第二个约束为等式约束, 因此在模型 (1) 的基础上开发鲁棒 DEA 方法并不合适. 根据 Toloo 等^[21] 的研究, 模型 (1) 中的等式约束可转化为等价的不等式约束, 如模型 (2) 所示:

$$\begin{aligned} E_{oo} &= \max \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0 \quad \forall j \\ & \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} \leq 1 \\ & v_{io}, u_{ro} \geq 0 \quad \forall i, \forall r. \end{aligned} \quad (2)$$

1.2 鲁棒交叉效率 DEA 模型

根据鲁棒优化理论, 不确定投入与产出变量可定义为 $\tilde{x}_{ij} = x_{ij} + \alpha_{ij}^x \hat{x}_{ij}$ 和 $\tilde{y}_{rj} = y_{rj} + \alpha_{rj}^y \hat{y}_{rj}$. 其中, $\hat{x}_{ij} = e_i x_{ij}$ 用于反映真实投入与观测值 x_{ij} 的最大偏差, $\hat{y}_{rj} = e_r y_{rj}$ 则衡量真实产出与观测值 y_{rj} 的最大偏差. e_i 和 e_r 分别代表投入和产出数据扰动的百分比水平. 因此, \tilde{x}_{ij} 与 \tilde{y}_{rj} 分别来自对称区间 $[x_{ij} - \hat{x}_{ij}, x_{ij} + \hat{x}_{ij}]$ 与 $[y_{rj} - \hat{y}_{rj}, y_{rj} + \hat{y}_{rj}]$. α_{ij}^x 和 α_{rj}^y 是均匀分布在 $[-1, 1]$ 内的随机变量, 并且有 $\alpha_{ij}^x = (\tilde{x}_{ij} - x_{ij}) / \hat{x}_{ij}$ 和 $\alpha_{rj}^y = (\tilde{y}_{rj} - y_{rj}) / \hat{y}_{rj}$. 对于 $DMU_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 记 $R_j^x = \{i | \hat{x}_{ij} \geq 0\}$, $R_j^y = \{r | \hat{y}_{rj} \geq 0\}$ 分别为 DMU_j 不确定投入和不确定产出的索引集. 通常, 不确定变量不会同时出现最大偏差. 因此, 鲁棒优化理论通过设定一个参数来限制不确

定数据的总偏差大小, 这种方式能够避免鲁棒模型的解过于保守^[23]. 具体而言, 设定 $\sum_{i \in R_j^x} |\alpha_{ij}^x| \leq \Gamma_j^x$, $\sum_{r \in R_j^y} |\alpha_{rj}^y| \leq \Gamma_j^y$. 其中, Γ_j^x 和 Γ_j^y 分别表示投入与产出的不确定预算, 也可视为决策者面对不确定性时的保守水平. 此外, $\Gamma_j^x \in [0, |R_j^x|]$, $\Gamma_j^y \in [0, |R_j^y|]$, 其中 $|R_j^x|$ 和 $|R_j^y|$ 分别表示不确定投入和产出变量的最大数量. 需要指出的是, 上述不确定预算的设定方式意味着本文所使用的不确定集合为多面体不确定集. 在鲁棒优化中, 采用不同的不确定集合会得到不同的保护函数形式, 从而产生差异的鲁棒模型结果. 一般而言, 不确定集合的选择需要权衡模型求解的复杂性与模型解的保守性. 与常见的盒式不确定集 (box uncertainty set) 以及椭球不确定集 (ellipsoidal uncertainty set) 相比, 多面体不确定集弥补了盒式不确定集过于保守的缺点, 同时也避免了椭球不确定集无法将保护函数转化为线性形式的不足. 综合以上考虑, 本文选择在多面体不确定集的基础上设定鲁棒优化保护函数, 进而开发鲁棒交叉 DEA 方法.

Γ_j^x 和 Γ_j^y 的值不需要限定为整数. 因此, 对于投入不确定变量而言, 存在一个不确定变量的子集 $S_j^x \subseteq R_j^x$, 并且 S_j^x 能够达到的总偏差为 $[\Gamma_j^x]$, 其中 $[\Gamma_j^x]$ 表示 Γ_j^x 的整数部分. 同样, 对于非整数部分, 则存在 $T_j^x \in R_j^x \setminus S_j^x$, 使得 $\tilde{x}_{T_j^x j} = x_{T_j^x j} + (\Gamma_j^x - [\Gamma_j^x]) \hat{x}_{T_j^x j}$. 这里举一个简单例子来说明上述定义. 假设有 5 个不确定投入变量并且 $\Gamma_j^x = 3.2$, 则有 3 个不确定变量可以达到最大偏差, Γ_j^x 的非整数部分 (0.2) 则被分配给某个变量, 使得 $\tilde{x}_{T_j^x j} = x_{T_j^x j} + 0.2 \hat{x}_{T_j^x j}$. 产出变量的符号设定与投入类似. 鲁棒优化中的保护函数则是通过特定的不确定变量子集来实现数据最恶劣的情况. 具体而言, 基于鲁棒优化理论, 模型 (2) 的鲁棒形式如下所示:

$$\begin{aligned} E_{oo}^R &= \max \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} - \beta_o^y(u, \Gamma_o^y) \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} + \beta_j^y(u, \Gamma_j^y) + \\ & \quad \beta_j^x(v, \Gamma_j^x) \leq 0 \quad \forall j \\ & \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} + \beta_o^x(v, \Gamma_o^x) \leq 1 \\ & v_{io}, u_{ro} \geq 0 \quad \forall i, \forall r. \end{aligned} \quad (3)$$

模型 (3) 中, $\beta_j^x(v, \Gamma_j^x)$ 和 $\beta_j^y(u, \Gamma_j^y)$ 分别为投入和产出变量的保护函数, 用以保护约束条件的可行性不受数据扰动的影响, 其具体形式分别为:

$$\beta_j^x(v, \Gamma_j^x) = \max_{S_j^x \cup \{T_j^x\} | S_j^x \subseteq R_j^x, |S_j^x| = |\Gamma_j^x|, T_j^x \in R_j^x \setminus S_j^x} \left\{ \sum_{i \in S_j^x} v_{io} \hat{x}_{ij} + (\Gamma_j^x - [\Gamma_j^x]) v_{T_j^x o} \hat{x}_{T_j^x j} \right\}$$

$$\beta_j^y(u, \Gamma_j^y) = \max_{S_j^y \cup \{T_j^y\} | S_j^y \subseteq R_j^y, |S_j^y| = |\Gamma_j^y|, T_j^y \in R_j^y \setminus S_j^y} \left\{ \sum_{r \in S_j^y} u_{ro} \hat{y}_{rj} + (\Gamma_j^y - [\Gamma_j^y]) u_{T_j^y o} \hat{y}_{T_j^y j} \right\}$$

当 Γ_j^x 和 Γ_j^y 均为0时,显然上述保护函数的值为0,此时模型(3)与模型(2)相同.当 Γ_j^x 和 Γ_j^y 分别为 $|R_j^x|$ 和 $|R_j^y|$ 时,则每个不确定投入和产出变量均能取得发生最大偏差时的值.通过改变 Γ_j^x 和 Γ_j^y 的值,决策者可以调节模型的鲁棒性.

保护函数的存在使得模型(3)无法直接求解,须进一步转换.根据Bertsimas和Sim^[23]的研究,本文投入与产出不确定变量的保护函数可等价于以下线性规划问题:

$$\beta_j^x(v, \Gamma_j^x) + \beta_j^y(u, \Gamma_j^y) = \max \sum_{r \in R_j^y} u_{ro} \alpha_{rj}^y \hat{y}_{rj} + \sum_{i \in R_j^x} v_{io} \alpha_{ij}^x \hat{x}_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{i \in R_j^x} \alpha_{ij}^x \leq \Gamma_j^x$$

$$\sum_{r \in R_j^y} \alpha_{rj}^y \leq \Gamma_j^y$$

$$0 \leq \alpha_{ij}^x \leq 1 \quad \forall i \in R_j^x$$

$$0 \leq \alpha_{rj}^y \leq 1 \quad \forall r \in R_j^y. \quad (4)$$

记 p_j^x, p_j^y, q_{ij}^x 和 q_{rj}^y 分别为模型(4)各约束条件的对偶变量.则模型(4)的对偶模型为:

$$\min \sum_{r \in R_j^y} q_{rj}^y + \sum_{i \in R_j^x} q_{ij}^x + p_j^y \Gamma_j^y + p_j^x \Gamma_j^x$$

s.t.

$$p_j^y + q_{rj}^y \geq u_{ro} \hat{y}_{rj} \quad \forall r \in R_j^y$$

$$p_j^x + q_{ij}^x \geq v_{io} \hat{x}_{ij} \quad \forall i \in R_j^x$$

$$q_{ij}^x, q_{rj}^y \geq 0 \quad \forall i \in R_j^x, \forall r \in R_j^y$$

$$p_j^x, p_j^y \geq 0 \quad \forall j. \quad (5)$$

尽管模型(3)需要处理保护函数带来的内部优化问题,但外部问题的决策变量在内部优化问题中被视为常数^[24].因此,模型(3)中的保护函数可进一步用模型(5)替换.最终,模型(3)可转换为如下的等价形式:

$$E_{oo}^R = \max \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} - \sum_{r \in R_o^y} q_{ro}^y - p_o^y \Gamma_o^y$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} + \sum_{r \in R_j^y} q_{rj}^y + \sum_{i \in R_j^x} q_{ij}^x +$$

$$p_j^y \Gamma_j^y + p_j^x \Gamma_j^x \leq 0 \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} + \sum_{i \in R_o^x} q_{io}^x + p_o^x \Gamma_o^x \leq 1$$

$$p_j^y + q_{rj}^y \geq u_{ro} \hat{y}_{rj} \quad \forall r \in R_j^y$$

$$p_j^x + q_{ij}^x \geq v_{io} \hat{x}_{ij} \quad \forall i \in R_j^x$$

$$v_{io}, u_{ro} \geq 0 \quad \forall i, \forall r$$

$$q_{ij}^x, q_{rj}^y \geq 0 \quad \forall i \in R_j^x, \forall r \in R_j^y$$

$$p_j^x, p_j^y \geq 0 \quad \forall j. \quad (6)$$

模型(6)可能存在多重最优权重问题,因此通过模型(6)计算交叉效率可能会导致交叉效率不唯一.对于此问题,使用二级目标模型是已有文献中常用的解决方法^[3,7].受相关文献启发^[25],本文通过为所有决策单元添加松弛变量来建立二级目标模型,进而选择一组可接受的投入产出权重.具体如下:

$$\min \sum_{j=1}^n h_j$$

s.t.

$$E_{oo}^R \leq \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} - \sum_{r=1}^s q_{ro}^y - p_o^y \Gamma_o^y$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} + \sum_{r=1}^s q_{rj}^y + \sum_{i=1}^m q_{ij}^x + p_j^y \Gamma_j^y + p_j^x \Gamma_j^x \leq 0 \quad \forall j$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} - \sum_{r=1}^s q_{rj}^y - \sum_{i=1}^m q_{ij}^x - p_j^y \Gamma_j^y - p_j^x \Gamma_j^x + h_j \geq 0 \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} + \sum_{i=1}^m q_{io}^x + p_o^x \Gamma_o^x \leq 1$$

$$p_j^y + q_{rj}^y \geq u_{ro} \hat{y}_{rj} \quad \forall r \in R_j^y$$

$$p_j^x + q_{ij}^x \geq v_{io} \hat{x}_{ij} \quad \forall i \in R_j^x$$

$$v_{io}, u_{ro}, q_{ij}^x, q_{rj}^y, p_j^x, p_j^y, h_j \geq 0 \quad \forall i, \forall r, \forall j. \quad (7)$$

在模型(7)中,第一个约束用以维持DMU_o的自评效率.第二组约束确保各DMU的鲁棒效率不会大于1.在第三组约束中,通过添加松弛变量 h_j 并在目标函数中将其最小化,使得其他DMU的鲁棒效率值尽可能接近1.这种方式意味着模型(7)所获得的权重对其他DMU是有利的.因此,模型(7)是基于仁慈型假设.如果将目标函数修改为max,并且第三组约束左侧变量均取相反的正负符号,则模型(7)所获得的权重会使其他DMU的交叉效率尽可能

小, 即转变为对抗型假设.

记 $(v_o^*, u_o^*, q^{x*}, q^{y*}, p^{x*}, p^{y*}, \Gamma^{x*}, \Gamma^{y*}, h)$ 是模型 (7) 的最优解. 从 $DMU_o (o = 1, 2, \dots, n)$ 角度, $DMU_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的鲁棒交叉效率值可使用下式计算:

$$E_{oj}^{RC} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{ro}^* y_{rj} - p_j^{y*} \Gamma_j^{y*} - \sum_{r=1}^s q_{rj}^{y*}}{\sum_{i=1}^m v_{io}^* x_{ij} + p_j^{x*} \Gamma_j^{x*} + \sum_{i=1}^m q_{ij}^{x*}}. \quad (8)$$

式 (8) 对鲁棒交叉效率值的定义考虑了保护函数的影响, 与自评效率值的定义保持一致. 这种定义方式更符合鲁棒 DEA 的基本思想, 即考察数据最恶劣情形下的效率结果. 因此, 通过式 (8) 不会高估 DMU 在数据最恶劣情况下的效率水平.

根据式 (8), 可得到如下形式的鲁棒交叉效率矩阵 CE.

$$CE = \begin{bmatrix} E_{11}^{RC} & E_{12}^{RC} & \dots & E_{1n}^{RC} \\ E_{21}^{RC} & E_{22}^{RC} & \dots & E_{2n}^{RC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1}^{RC} & E_{n2}^{RC} & \dots & E_{nn}^{RC} \end{bmatrix}$$

传统交叉效率模型下, 自评的效率值只占交叉效率的 $1/n$, 可能会造成自评价值的过度稀释. 借鉴相关文献 [8], 本文将他评效率取均值作为综合他评, 然后再对自评值和综合他评值进行加权. 在本文中, 自评和他评设定为同等重要, 因此最终的鲁棒交叉效率值如下:

$$\widehat{E}_o^{RC} = 0.5 * E_{oo}^{RC} + 0.5 * \frac{\sum_{j=1, j \neq o}^n E_{jo}^{RC}}{n-1} \quad (9)$$

需要指出的是, 尽管已有文献提出了多种交叉效率的集结方法, 且新的集结方法也正不断涌现, 但很难从理论上确定一种固定或最优的效率集结方式. 因此, 本文并未采取更加复杂的效率集结方法. 当然, 根据现实决策场景的特点与需求, 本文所构建方法也可进一步与相应的效率集结方法相结合, 具有良好的可拓展性.

1.3 鲁棒价格

通过引入保护函数, 鲁棒模型能够维持约束条件在数据不确定性下的可行性, 从而生成鲁棒解. 然而, 使用保护函数并非是免费的. 对于鲁棒模型而言, 维持解的鲁棒性必然要牺牲解的最优性. 本文借助 Bertsimas 等 [23] 提出的鲁棒价格的概念来评估数据扰动对确定性模型最优目标函数值的影响. 换句话说, 鲁棒价格反映了鲁棒模型和确定性模型之间最

优目标函数值的差异大小. 具体而言, 本文将 DMU_o 的鲁棒价格定义为:

$$PoRo = \frac{|\widehat{E}_o^{RC}(\Gamma) - \widehat{E}_o^{RC}(0)|}{\widehat{E}_o^{RC}(0)}, o = 1, \dots, n. \quad (10)$$

式 (10) 中, $PoRo$ 为鲁棒价格. $\widehat{E}_o^{RC}(\Gamma)$ 表示保守水平为 Γ 时的鲁棒交叉效率值, $\widehat{E}_o^{RC}(0)$ 则表示确定性模型下的交叉效率结果.

鲁棒价格可以帮助组织管理者了解减缓数据不确定对效率评估结果的影响需要付出多少代价. 这一指标也能够为评价组织资源配置的韧性提供一定启示. 对于仁慈型和对抗型策略选择问题, 在计算两种策略下的平均鲁棒价格后, 决策者可以选择鲁棒价格更低的策略. 这种选择方式可以帮助决策者用更低的成本来降低数据不确定性对效率评估结果的影响.

2 实例应用

2.1 样本与数据

可再生能源的使用不仅能够减少温室气体排放, 还能降低经济发展对化石燃料的依赖. 在全球气候变化和环境污染日益严峻的背景下, 发展可再生能源已成为实现可持续发展的关键路径. 然而, 由于碳排放以及能源消耗相关数据存在显著的不确定性, 评估和分析可再生能源绩效面临方法上的挑战. 以碳排放为例, 目前学界与业界通常利用能源消耗量乘以相应的碳排放因子估计得到碳排放数据. 由于使用的碳排放因子以及能源消耗估计量不同, 不同组织对同一国家的碳排放估计量往往存在较大差异 [26]. 尽管如此, 目前世界各国对于碳排放因子的设定仍未达成共识. 一般而言, 碳排放数据的观测值存在 $\pm 5\%$ 水平的偏差是较为常见且可接受的 [27]. 但碳排放数据的偏差并不能从根本上消除, 其范围在实践中也难以准确界定和检验. 显然, 传统以精确数据为基础的 DEA 方法在此情形下难以适用.

考虑篇幅限制, 本节选取 15 个 OECD 国家为实证研究样本, 验证本文所构建模型的可行性与有效性. 这 15 个 OECD 国家的总碳排放量占全部 38 个 OECD 国家的 92.5%, 肩负重要的碳减排责任. 另一方面, 样本国家主要来自欧美地区, 其能源系统当前极易受地缘政治因素的影响. 在此背景下, OECD 组织更加需要稳健和客观地评估各国可再生能源绩效以提高政策建议的可靠性. 从组织管理的角度来看, 由于各 DMU 仅使用利己权重, 传统 DEA 评价方法只适用于决策权完全扁平化的组织 [28]. 而 OECD 组

织既具有部分的中央管理和协调职能,又允许成员国保持一定的自主权和决策权.对于这样的组织形态,交叉效率 DEA 方法更为适用.一方面,组织的中央协调职能允许通过他评机制缓解利己权重导致的绩效高估问题,进而提高评价的客观性.另一方面,交叉效率 DEA 仍保留了每个成员国自行选择权重的自评机制,尊重了各国在提升可再生能源绩效方面的差异性.

参考已有研究^[13],在投入方面选择以下指标:劳动力(x_1 , 10^5 人),固定资产总额(x_2 , 10^9 美元)和一次能源供应总量(x_3 , 百万吨油当量).在产出方面,采用 GDP (y_1 , 10^9 美元),可再生能源产出量(y_2 , 百万吨油当量)和二氧化碳排放量(y_3 , 百万吨二氧化碳当量)作为产出指标.上述数据来源于世界银行数据库(www.worldbank.org)和 OECD 数据库(www.oecd.org),数据年份为 2022 年.具体数据如表 1 所示.

在产出指标中,二氧化碳为非期望产出指标,因此应越小越好.本文使用 Seiford 和 Zhu 提出的线性单调转化技术将二氧化碳数据转化为期望产出^[29].具体而言, $z_j = 1 + \max_{j=1,2,\dots,n} (y_{3j}) - y_{3j}$,其中 z_j 为转化后的值.

2.2 实证结果

2.2.1 效率结果分析

使用鲁棒模型前首先需要设定保守水平.对于这一问题,相关文献通常采用 Bertsimas 等^[23]提出的经典方法,即利用 $\Gamma = 1 + \Phi^{-1}(1 - e)\sqrt{t}$ 来设定 Γ 的合理上限,其中 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 是标准正态分布的反函数, t 为不确定变量的数量.除碳排放数据外,其他指标

表1 OECD 国家可再生能源数据集

国家	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
美国	1681.82	5476.10	2146.23	25744.11	171.70	4853.78
日本	691.14	1105.07	391.70	4256.41	27.69	1082.65
德国	441.98	901.61	268.61	4082.47	42.01	673.60
韩国	293.40	538.49	287.18	1673.92	6.12	635.50
加拿大	213.68	503.41	294.94	2161.48	47.51	582.07
墨西哥	587.18	327.26	185.81	1463.32	17.13	487.77
土耳其	346.30	264.54	153.72	907.12	23.43	481.25
澳大利亚	140.79	389.72	135.86	1692.96	11.34	393.16
英国	347.97	566.29	153.72	3088.84	19.35	340.61
意大利	253.42	447.70	142.15	2066.97	26.33	322.95
波兰	183.01	113.31	103.94	689.76	12.26	321.95
法国	316.17	700.27	211.71	2779.09	24.64	315.30
西班牙	236.87	284.65	116.27	1417.80	19.38	254.36
荷兰	97.94	210.47	63.66	1009.40	6.77	134.66
捷克	53.73	77.87	41.75	290.57	5.03	101.54

的数据观测值也无法确保其准确性,因此本文将所有投入产出变量均视为不确定变量.参考相关文献^[16],设定低(1%)、中(5%)和高(10%)三种数据扰动水平来分析不确定性程度对效率结果的影响.基于 Bertsimas 和 Sim 的方法会得到大于指标个数的保守水平值,这表明着需要免疫所有不确定变量的影响.因此,设定 $\Gamma_j^x = 3$ 和 $\Gamma_j^y = 3$.基于上述设定,表 2 汇报了仁慈型和交叉型策略下确定性模型($e = 0$)和鲁棒模型的效率结果,括号内为效率排名.为了便于比较,表 2 也给出了传统 CCR-DEA 模型的结果.

由表 2 可知,首先,在确定性假设下,传统 CCR-DEA 模型产生了 10 个有效 DMU,而两种交叉模型均未产生有效单元,并能够提供完整的效率排序.可

表2 不同数据扰动水平下的效率结果

国家	CCR-DEA	仁慈型策略				对抗型策略			
		e=0	e=1%	e=5%	e=10%	e=0	e=1%	e=5%	e=10%
美国	1.000(1)	0.963(4)	0.925(4)	0.788(4)	0.639(5)	0.755(9)	0.726(5)	0.620(5)	0.509(7)
日本	0.706(14)	0.673(13)	0.647(13)	0.549(13)	0.445(13)	0.496(14)	0.477(14)	0.409(14)	0.338(14)
德国	1.000(1)	0.941(6)	0.904(6)	0.773(6)	0.633(6)	0.769(7)	0.681(10)	0.574(9)	0.521(6)
韩国	0.601(15)	0.550(15)	0.529(15)	0.447(15)	0.358(15)	0.393(15)	0.378(15)	0.324(15)	0.267(15)
加拿大	1.000(1)	0.980(1)	0.941(1)	0.802(1)	0.656(1)	0.810(4)	0.734(4)	0.621(4)	0.503(9)
墨西哥	0.778(13)	0.649(14)	0.624(14)	0.527(14)	0.427(14)	0.523(13)	0.503(13)	0.432(13)	0.356(13)
土耳其	0.985(11)	0.771(12)	0.741(12)	0.630(12)	0.516(12)	0.673(11)	0.648(11)	0.555(11)	0.456(10)
澳大利亚	1.000(1)	0.935(7)	0.898(7)	0.766(7)	0.624(7)	0.749(10)	0.720(8)	0.617(6)	0.507(8)
英国	1.000(1)	0.971(3)	0.933(3)	0.795(3)	0.647(3)	0.799(5)	0.768(1)	0.657(1)	0.539(3)
意大利	1.000(1)	0.954(5)	0.917(5)	0.783(5)	0.643(4)	0.810(3)	0.725(6)	0.613(7)	0.547(2)
波兰	1.000(1)	0.906(10)	0.870(10)	0.734(10)	0.592(10)	0.766(8)	0.721(7)	0.557(10)	0.453(11)
法国	0.880(12)	0.829(11)	0.796(11)	0.680(11)	0.557(11)	0.657(12)	0.550(12)	0.460(12)	0.447(12)
西班牙	1.000(1)	0.931(8)	0.894(8)	0.761(8)	0.621(8)	0.779(6)	0.686(9)	0.578(8)	0.528(4)
荷兰	1.000(1)	0.973(2)	0.935(2)	0.797(2)	0.652(2)	0.832(2)	0.752(3)	0.637(3)	0.561(1)
捷克	1.000(1)	0.907(9)	0.872(9)	0.741(9)	0.607(9)	0.847(1)	0.767(2)	0.649(2)	0.526(5)

见, 由于融合了他评机制, 交叉效率模型不仅能够更大程度地识别 DMU 绩效改进的潜力, 而且在区分 DMU 绩效差异方面也具有一定优势. 其次, 在不同数据扰动水平下, 相对于仁慈型策略, 对抗型策略获取的交叉效率值更小. 最后, 在两种交叉策略下, 随着数据扰动水平的增加, 各国的可再生能源效率均呈现显著的下降趋势.

值得注意的是, 当数据存在不确定性时, 鲁棒模型的效率结果均小于确定性模型的结果. 这也表明当数据的观测值不能代表真实值时, 传统确定性 DEA 模型可能会高估决策单元的效率评价结果. 从本文的案例背景来看, 这种结果的差异对现实决策可能存在以下影响: (1) 若某些国家的可再生能源绩效被高估, 相关政策制定者可能认为其能源转型进度优于实际情况, 从而忽视进一步的政策支持或资源投入需求. 这会导致资源错配, 削弱国家整体的能源转型效果; (2) 在跨国可再生能源项目合作中, 可能会错误评估合作伙伴的真实技术水平和管理能力; (3) 在设定碳减排目标时, 可能会基于虚高的效率评估结果制定过于激进或不公平的目标, 导致后续实现困难.

本文通过鲁棒优化技术降低了数据不确定性对 DEA 效率评价结果的影响, 有助于决策者更准确地判断决策单元的真实绩效水平. 其次, 在涉及大规模投资或重要政策制定时, 鲁棒模型的保守性能够为风险规避型决策提供更具价值的参考依据, 从而有利于组织韧性的提升. 总的来说, 本文所构建的鲁棒交叉 DEA 模型能够为实际决策提供更加可靠的分析支持, 并降低决策风险.

2.2.2 鲁棒价格分析

表 2 结果表明, 数据扰动水平的增加会显著影响效率水平, 但不同 DMU 受数据不确定性的影响程度不同. 本节利用鲁棒价格这一指标来分析各 DMU 抵御数据不确定性的能力. 基于式 (10), 图 1 展示了两种交叉策略下的平均鲁棒价格. 如图 1 所示, 当数据扰动水平从 1% 增加到 10% 时, 两种交叉策略下模型的平均鲁棒价格也显著增加. 这是由于数据扰动程度增加时, 鲁棒模型为了维持约束条件的可行性会生成更加保守的解, 因此鲁棒解损失的最优性也增加. 这也是数据扰动水平增加时效率值降低的原因. 在实践中, 组织决策者可根据鲁棒价格决定模型解的最优性与鲁棒性的平衡, 从而选取合适的不确定预算水平. 此外, 由图 1 可知, 仁慈型交叉策略在不同的数据扰动水平下具有更低的鲁棒价格. 因此, 对于本文案例而言, 选择仁慈型交叉策略

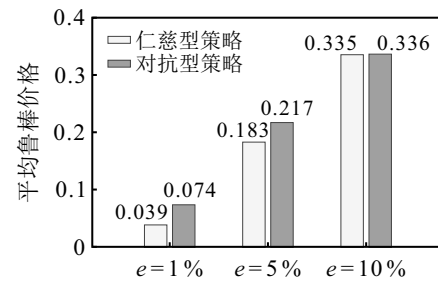


图1 不同交叉策略的平均鲁棒价格

可以得到更加稳定的效率评估结果.

2.3 方法比较

使用共同权重模型是解决传统 DEA 自评局限性的另一种有效途径. 为了进一步说明本文方法的有效性, 本节将本文方法与 Salahi 等^[24] 和 Omrani^[30] 提出的共同权重鲁棒 DEA 模型进行比较. 与这些文献保持一致, 使用 Omrani^[30] 提供的天然气公司数据集, 该数据集包含 27 个样本, 每个样本有 2 个投入和 2 个产出. 其次, 同样设定 5% 的数据扰动水平且 $\Gamma_j^x = \Gamma_j^y = 2$. 图 2 展示了不同模型下的效率结果. 此外, 图 2 也给出了经典 CCR-DEA 模型的结果.

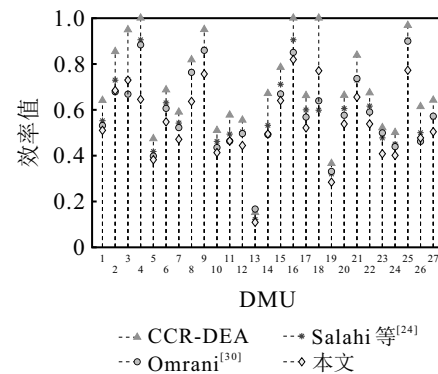


图2 不同方法的效率评价结果

与传统 CCR-DEA 模型相比, 本文方法在 DMU 绩效区分能力上表现更好. 具体而言, 传统的 CCR-DEA 模型下存在 3 个有效 DMU, 因此无法提供完整的 DMU 排序. 相比之下, 本文方法能够对所有 DMU 进行有效区分和完整排序. 这种更强的区分能力不仅有助于识别真正的标杆 DMU, 也为效率较低的 DMU 提供了明确的改进目标和发展方向. 与共同权重鲁棒 DEA 相比, 本文的交叉效率方法保留了评价主体的多样性, 考虑了所有 DMU 的评价视角, 能够提供更丰富的效率评价信息. 而使用共同权重模型则可能会忽略 DMU 的自评价价值, 进而降低评价的公平性, 尤其是对于那些仅在特定指标上表现较好的 DMU. 此外, 共同权重模型计算的投入产出权重值在现实中可能并不存在或难以实现. 相比之下, 通过允许不同评价主体使用彼此的利己权

重, 本文方法的评价结果更客观可靠. 从效率结果来看, 本文方法总体上效率值更低, 这反映了本文方法具有更严格的评价标准, 能够为决策者识别出更多的 DMU 效率提升潜力. 最后, 不同 DMU 效率结果的差异越低, 越有利于提高 DMU 对整体评价结果的接受度. 计算 CCR-DEA、Salahi 等^[24]、Omrani^[30]以及本文方法结果的标准差, 其结果分别为 0.208、0.180、0.171 和 0.160. 这表明本文方法得到的效率值分布更为集中, 有助于提高各决策单元对评价结果的认可度. 综上所述, 本文方法为不同决策单元提供了更公正和可靠的绩效评估基准, 因此具有一定优势.

3 结论

传统 DEA 方法仅基于自评机制计算 DMU 效率值, 效率评估结果不够客观. 此外, 传统 DEA 效率评价结果的可靠性高度依赖于数据的准确性. 然而, 数据不确定性是现实中无法避免的问题. 针对这些不足, 本文首先基于鲁棒优化技术与交叉效率思想, 构建了一个鲁棒交叉效率 DEA 模型. 在此基础上, 进一步构建了一个二级目标模型来避免多重最优解导致的交叉效率不唯一问题. 然后, 引入鲁棒价格的概念来评估 DMU 应对数据不确定性的能力, 并在此基础上探讨了仁慈型和对抗型交叉策略的选择问题. 相关结果为交叉策略的稳健选择问题提供了一种新的解决方案. 基于 15 个 OECD 国家的可再生能源数据, 验证了本文方法的可行性与有效性.

本文的研究工作未来可从以下方面进行拓展. 第一, 本文构建的是径向效率评估模型, 未来可开发非径向的鲁棒 DEA 模型. 第二, 决策者的保守性水平对鲁棒效率水平及其排序具有重要影响, 未来可探索如何选择合适的保守性水平. 第三, 未来可研究在数据不确定情形下如何设定提升决策单元交叉效率水平的目标.

参考文献 (References)

- [1] Joe Z. DEA under big data: Data enabled analytics and network data envelopment analysis[J]. *Annals of Operations Research*, 2022, 309(2): 761-783.
- [2] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units[J]. *European Journal of Operational Research*, 1978, 2(6): 429-444.
- [3] Doyle J, Green R. Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1994, 45(5): 567-578.
- [4] Sexton T R, Silkman R H, Hogan A J. Data envelopment analysis: Critique and extensions[J]. *New Directions for Program Evaluation*, 1986, 1986(32): 73-105.
- [5] 程幼明, 王慧颖, 张孝琪. 基于群决策考虑属性效用一致性的 DEA 他评交叉效率公共权重排序法[J]. *控制与决策*, 2021, 36(9): 2279-2289.
(Cheng Y M, Wang H Y, Zhang X Q. A common-weight ranking method for DEA peer-efficiency based on group decision-making and considering the consistency of attribute utility[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(9): 2279-2289.)
- [6] Wang Y M, Chin K S. A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(5): 3666-3675.
- [7] Borrás F, Ruiz J L, Sirvent I. Peer evaluation through cross-efficiency based on reference sets[J]. *Omega*, 2023, 114: 102739.
- [8] 王兆华, 李靖云, 王博, 等. 基于改进分层博弈交叉效率模型的政策评价[J]. *管理科学学报*, 2024, 27(2): 18-29.
(Wang Z H, Li J Y, Wang B, et al. Policy evaluation based on an improved hierarchical game cross-efficiency model[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2024, 27(2): 18-29.)
- [9] 段金利, 张岐山. 基于基尼系数-交叉效率的多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2018, 33(6): 1123-1128.
(Duan J L, Zhang Q S. Multi-attribute decision-making method based on Gini coefficient and cross efficiency[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(6): 1123-1128.)
- [10] Chen X Q, Liu X W, Zhu Q Y, et al. DEA cross-efficiency models with prospect theory and distance entropy: An empirical study on high-tech industries[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 244: 122941.
- [11] Jin F F, Cai Y H, Zhou L G, et al. Regret-rejoice two-stage multiplicative DEA models-driven cross-efficiency evaluation with probabilistic linguistic information[J]. *Omega*, 2023, 117: 102839.
- [12] Lin S W, Lu W M. A chance-constrained network DEA approach based on enhanced Russell-based directional distance measure to evaluate public sector performance: A case study of OECD countries[J]. *Annals of Operations Research*, 2024, 342(3): 1837-1864.
- [13] Shabani M, Kordrostami S, Noveiri M J S. Renewable energy performance analysis using fuzzy dynamic directional distance function model under natural and managerial disposability[J]. *Applied Energy*, 2023, 352: 121940.
- [14] 孙婧, 党耀国, 杨圣祥, 等. 基于面板数据的灰色差值关联模型构建及其应用[J]. *控制与决策*, 2024, 39(11): 3839-3847.
(Sun J, Dang Y G, Yang S X, et al. Grey difference incidence model of panel data and its application[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(11): 3839-3847.)
- [15] Li J, Wu H C, Zhu C, et al. Evaluating and analyzing renewable energy performance in OECD countries under uncertainty: A robust DEA approach with common weights[J]. *Applied Energy*, 2024, 375: 124115.
- [16] Arabmaldar A, Hatami-Marbini A, Loske D, et al. Robust data envelopment analysis with variable

- budgeted uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 2024, 315(2): 626-641.
- [17] Hadi-Vencheh A, Khodadadipour M, Tan Y, et al. Cross-efficiency analysis of energy sector using stochastic DEA: Considering pollutant emissions[J]. *Journal of Environmental Management*, 2024, 364: 121319.
- [18] Yu Y, Zhu W W, Zhang Q. DEA cross-efficiency evaluation and ranking method based on interval data[J]. *Annals of Operations Research*, 2019, 278(1): 159-175.
- [19] Tavana M, Toloo M, Aghayi N, et al. A robust cross-efficiency data envelopment analysis model with undesirable outputs[J]. *Expert Systems with Applications*, 2021, 167: 114117.
- [20] Wu J, Shen L L, Zhang G G, et al. Efficiency evaluation with data uncertainty[J]. *Annals of Operations Research*, 2024, 339(3): 1379-1403.
- [21] Toloo M, Mensah E K. Robust optimization with nonnegative decision variables: A DEA approach[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2019, 127: 313-325.
- [22] Arabmalidar A, Sahoo B K, Ghiyasi M. A generalized robust data envelopment analysis model based on directional distance function[J]. *European Journal of Operational Research*, 2023, 311(2): 617-632.
- [23] Bertsimas D, Sim M. The price of robustness[J]. *Operations Research*, 2004, 52(1): 35-53.
- [24] Salahi M, Toloo M, Torabi N. A new robust optimization approach to common weights formulation in DEA[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2021, 72(6): 1390-1402.
- [25] Kiaei H, Saen R F, Matin R K. Cross-efficiency evaluation and improvement in two-stage network data envelopment analysis[J]. *Annals of Operations Research*, 2023, 321(1): 281-309.
- [26] Liu Z, Guan D B, Wei W, et al. Reduced carbon emission estimates from fossil fuel combustion and cement production in China[J]. *Nature*, 2015, 524(7565): 335-338.
- [27] Xu J H, Guan Y R, Oldfield J, et al. China carbon emission accounts 2020-2021[J]. *Applied Energy*, 2024, 360: 122837.
- [28] Afsharian M, Ahn H, Harms S G. A review of DEA approaches applying a common set of weights: The perspective of centralized management[J]. *European Journal of Operational Research*, 2021, 294(1): 3-15.
- [29] Seiford L M, Zhu J. Modeling undesirable factors in efficiency evaluation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 142(1): 16-20.
- [30] Omrani H. Common weights data envelopment analysis with uncertain data: A robust optimization approach[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, 66(4): 1163-1170.

作者简介

李攀 (1997-), 男, 博士生, 主要研究方向为数据包络分析、鲁棒优化, E-mail: lijiang_cem@nuaa.edu.cn;

吴和成 (1963-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为技术创新管理、绩效评估, E-mail: hcwu@nuaa.edu.cn;

孙婧 (1995-), 女, 博士生, 主要研究方向为不确定理论, E-mail: sunjing_candice@nuaa.edu.cn.