

高维度非接触磁悬浮操控系统: Maglev-Delta机器人

黄国明,周清逸

引用本文:

黄国明, 周清逸. 高维度非接触磁悬浮操控系统: Maglev-Delta机器人[J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1751-1760.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0870

#### 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

#### 空间机器人双臂捕获卫星操作的事件采样输出反馈神经网络避撞柔顺控制

Collision avoidance and compliance control based on event sampling output feedback neural network for space robot dual arm capture satellite operation

控制与决策. 2021, 36(9): 2113-2122 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1754

#### 磁悬浮开关磁阻电机的自适应终端滑模控制

Adaptive terminal sliding mode control of bearingless switched reluctance motor 控制与决策. 2021, 36(6): 1449–1456 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1064

# 直线同步电动机磁悬浮系统的自适应模糊滑模控制

Adaptive fuzzy sliding mode control for magnetic suspension system of linear synchronous motor 控制与决策. 2021, 36(3): 693-698 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0774

#### 空间机器人捕获航天器操作的避撞柔顺复合自抗扰控制

Collision avoidance and compliant composite active disturbance rejection control of space robot capture spacecraft 控制与决策. 2021, 36(2): 355–362 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0507

## 气动人工肌肉驱动的机器人控制方法研究现状概述

Overview of control methods for pneumatic artificial muscle-actuated robots 控制与决策. 2021, 36(1): 27-41 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0793

# 高维度非接触磁悬浮操控系统: Maglev-Delta 机器人

黄国明†, 周清逸

(威斯康星大学麦迪逊分校 电气与计算机工程系,麦迪逊 57306)

摘 要: 非接触操控在工业领域有着重要的应用需求,然而,在高维度场景下灵活快速地非接触操控仍然是业界挑战.为此,研究基于深度强化学习 (DRL) 的高维度非接触磁悬浮操控系统,简称 Maglev-Delta 机器人. 首先,从理论层面给出稳定磁悬浮操控基本条件,提出可控区域最大化磁铁布局方案,实现高维悬浮操控执行模块设计;然后,提出磁场强度非线性化弱化方法,解决原始磁场在磁铁近处困住执行器导致 DRL 控制器训练样本稀缺问题;最后,构建兼顾移动速度和悬浮精度的奖励函数模型,提高控制器操控性能. 实验结果表明,所搭建 Maglev-Delta 机器人能够以较高的速度和精度完成二维和三维悬浮控制任务,展现出优越的灵活性. 尤其是在模拟搬运任务中,机器人能够稳定地完成负载搬运任务. 由实验结果推理可知,规模化的 Maglev-Delta 机器人可实现在约 (27 m)³ 区域内操控 3.8×10⁵ kg 重物,展现出巨大的非接触操控应用潜力.

关键词: 非接触操控, 磁悬浮控制; Delta 机器人; 深度强化学习, 磁铁布局方案; 视觉伺服控制

中图分类号: TP242 文献标志码: A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2024.0870

引用格式: 黄国明, 周清逸. 高维度非接触磁悬浮操控系统: Maglev-Delta 机器人 [J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1751-1760.

# Maglev-Delta robot: A magnetic levitation control system for highdimensional non-contact manipulation

HUANG Guo-ming<sup>†</sup>, ZHOU Qing-yi

(Department of Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin-Madison, Madison 57306, USA)

Abstract: Non-contact control technologies hold immense promise in industries, yet achieving agile and efficient non-contact manipulation in high-dimensional spaces remains a formidable challenge. This study introduces a deep reinforcement learning(DRL)-driven magnetically levitated Delta-robot system, termed the Maglev-Delta robot. Theoretically, we delineate the fundamental prerequisites for magnetic levitation control and propose an optimized magnet array configuration to maximize the controllable domain, thereby enabling the design of a high-dimensional levitation control execution module. A method for nonlinear attenuation of magnetic field strength is introduced to address the issue of actuator entrapment near the magnets, which leads to a scarcity of training samples for the DRL controller. Additionally, we construct a reward function model balancing movement speed and levitation precision to enhance the levitation control performance of the DRL controller. Experimental results demonstrate that the developed Maglev-Delta robot can achieve high-speed and high-precision two-dimensional and three-dimensional levitation control tasks, showcasing exceptional flexibility. Notably, in simulated handling tasks, the robot is able to stably complete load handling tasks. Based on the experimental results, we analyze that the scaled-up Maglev-Delta robot can execute levitation maneuvers within a substantial  $(27\,\mathrm{m})^3$  volume, capable of manipulating masses up to  $3.8 \times 10^5$  kg, thereby underscoring its vast potential for practical applications.

**Keywords:** non-contact control; magnetic levitation control; Delta robot; deep reinforcement learning; magnet array configuration; visual servo control

# 0 引 言

非接触操控技术在工业领域展现出巨大的应用潜力,尤其是在智能制造、生物化学等高精度操作场景中日益受到重视[1]. 磁悬浮控制因其力矩大、灵活

度高的优势而成为非接触操控领域最有潜力的手段<sup>[2]</sup>. 然而,高维度 (二维和三维) 磁悬浮控制仍然是挑战,其原因为磁场具有非线性强、衰减快的特点<sup>[3]</sup>,且多电磁铁系统不易清晰建模,导致难以设计控制

器,这使得高维磁悬浮控制难以得到广泛应用."中国制造 2025"明确提出了推动高端装备制造和智能控制技术的发展,这为高维度磁悬浮技术的研究提供了政策支持.社会对高效、智能化、低能耗操控系统的需求不断增加,推动了非接触操控技术的市场应用[1].因此,突破磁悬浮控制的技术瓶颈,有利于提升我国在智能制造和自动化领域的竞争力.

目前,国内外不少团队开展了高维磁悬浮操控 系统的研究[1-3], 但是鲜有做到灵活快速地控制相对 重的物品. 为此, 本文以电磁铁对磁体的引力作为无 形连杠, 研究模拟 Delta 机器人的磁悬浮式非接触操 控系统 — Maglev-Delta 机器人. 如图 1 所示, Maglev-Delta 机器人以深度强化学习 (DRL) 控制器 为大脑, 相机为眼睛, 电磁铁和磁化小球为执行模块, 通过视觉伺服的方式来实现对执行器(小球)的灵活 操控. 相比于现有研究, Maglev-Delta 机器人在同时 兼顾控制灵活性和重量方面展现出显著优势,为解 决工业场景中较重物体的非接触灵活操控问题提供 了一种有效的参考方案. 本文内容总结如下: 1) 针对 工业界高维度非接触控制需求,提出 Maglev-Delta 机器人,有望用于解决工业场景下较重物体的非接 触灵活操控问题; 2) 从理论角度给出稳定悬浮基本 条件并提出可控区域最大化的磁铁布局方案: 3) 针 对高维磁悬浮控制难题设计 DRL 控制方案,提出考 虑执行器速度的奖励函数模型和磁场非线性弱化函 数,解决 DRL 控制器的收敛难题; 4) 通过实验验证 Maglev-Delta 机器人性能,分析扩大规模后机器人的 应用潜力.

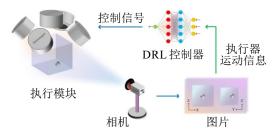


图1 Maglev-Delta 机器人非接触操控作业示意图

# 1 相关工作

# 1.1 非接触操控

相比于接触式操控,非接触操控技术展现出诸多独特优势,如对环境干扰较小<sup>[4-5]</sup>、操作安全性较高<sup>[6-7]</sup>等.目前,非接触操控技术主要包括超声波悬浮<sup>[8]</sup>、气动悬浮<sup>[9]</sup>、静电悬浮<sup>[10]</sup>、激光悬浮<sup>[11]</sup>以及磁悬浮<sup>[12]</sup>.其中:超声波、静电和激光悬浮技术因力矩较小限制了搬运能力;气动悬浮则因气流复杂性难以实现高维度的灵活操控;相较而言,磁悬浮技术

凭借其较大的力矩和高度可控性,被认为是最具潜力的非接触操控手段,不仅适用于微小物体的精确操控,还能应对大型物体的搬运作业<sup>[5,13]</sup>. 然而,由于磁力具有高度非线性的特性<sup>[14]</sup>,实现对悬浮物体的快速灵活控制仍然面临诸多挑战,这一因素也限制了磁悬浮技术在非接触操控中的应用<sup>[15-16]</sup>.

# 1.2 高维度磁悬浮控制

目前,低维度磁悬浮控制技术已相对成熟<sup>[5,17]</sup>,尤其以磁悬浮列车技术为典型代表.磁悬浮列车在垂直方向的控制需求主要体现在单一目标的自适应控制(即维持固定高度),在此需求下,传统方法如PID控制即可取得理想效果.近年来,针对高维度磁悬浮控制的研究逐渐增多,包括二维场景<sup>[18-22]</sup>和三维场景<sup>[1,3,23-25]</sup>的探索.然而,这些系统普遍存在控制速度慢或负载能力弱的局限性.其原因在于高维度磁悬浮系统的物理模型难以精确建立,且控制策略复杂,传统方法难以实现理想的操控效果<sup>[3,25]</sup>.基于模型的鲁棒控制、模型预测控制以及依赖专家经验的模糊控制方法在此情境下变得难以实施.此外,当悬浮系统需要携带非磁性负载时,负载的引入会显著改变系统的动力学特性,使得灵活操控变得更加困难.因此,研究不依赖物理模型的控制方法显得尤为重要.

# 1.3 深度强化学习

深度强化学习 (DRL) 结合了深度学习与强化学 习的优势, 利用深度神经网络处理复杂的高维数据, 并通过强化学习方法进行决策推理. 近年来, DRL 在 大语言模型[26]、智能围棋[27]、复杂策略游戏[28] 以及 机器人控制[29-30] 等领域展现出卓越的性能, 已被证 明是一种能够解决复杂决策问题的有效方法. 其中: PPO(proximal policy optimization)[31] 和 SAC (softactor critic)[32] 是两种代表性无模型 DRL 方法, 它们能够 通过动作熵最大化、动作优势估计以及经验复用等 机制有效应对各种复杂决策任务. 近期, 有学者尝试 将 DRL 应用于复杂的磁悬浮控制领域. 如 Abbasi 等[1] 基于 DRL 开发了用于人体动脉内药物运输的磁性 微型机器人. 然而, 由于该机器人依靠浮力产生升力, 其搬运速度较慢,承载能力非常有限,灵活性不足, 从而在宏观场景中的应用潜力受到限制. 该工作虽 然存在不足, 但是表明了 DRL 是解决高维度磁悬浮 控制难题的重要方法.

# 2 Maglev-Delta 机器人

# 2.1 Maglev-Delta 机器人整体设计方案

Maglev-Delta 机器人采用基于 DRL 的视觉伺服控制方案,整体结构如图 2 所示. 其中: 以 PC 为上位

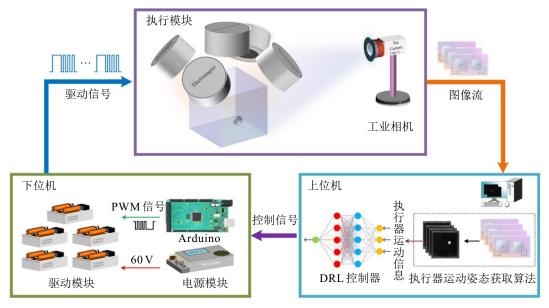


图2 Maglev-Delta 机器人整体构架

机, Arduino 和驱动模块为下位机, 工业相机为传感器, 电磁铁和磁化小球为执行模块. 工作流程如下: 1) 相机获取执行器 (磁化小球) 运动图像, 并传给 PC端; 2) PC端首先通过执行器运动姿态获取算法解析出执行器运动信息 (位置、速度、加速度), 然后采用DRL 控制器根据执行器运动信息推理控制信号, 并将该控制信号发给 Arduino 控制板; 3) Arduino 控制板将控制信号转换为 PWM 信号, 并通过驱动模块将 PWM 信号转换为驱动信号, 进而控制电磁铁中的电流 (即控制磁场强度), 最终实现执行器 (小球)的运动控制.

# 2.2 执行模块

如何设置磁铁布局使得 Maglev-Delta 机器人的 控制区域最大化是首要解决的问题. 为此, 本节通过 磁偶极子在磁场中的动态稳定条件分析, 得到不同 磁铁布局下悬浮可控区域形状, 为 Maglev-Delta 机 器人磁铁布局提供理论指导. 根据恩肖定理可知, 在 静态磁场中无法实现稳定悬浮<sup>[33]</sup>. 因此, 动态平衡是 实现稳定悬浮的潜在手段, 但是电磁场的不均匀性 导致不能做到处处可控. 下面首先证明动态稳定是 实现悬浮的基本条件, 然后对可控区域模拟求解.

# 2.2.1 稳定悬浮基本条件

现在考虑某种铁磁性材料 (如永磁体) 组成的小型磁偶极子m. 将该偶极子周围的磁场表示为B, 其分量为 $B_x$ 、 $B_y$  和  $B_z$ . 静磁场内小磁偶极子的能量可计算为U=-mB. 根据  $\nabla^2 U$ , 可以证明偶极子在静磁场中无法找到一个在所有方向上均稳定的位置. 然而, 若磁场可控, 则只要小偶极子偏离指定位置  $P(x_0,y_0,z_0)$ 时, 便可通过调整磁场将其拉回, 从而

实现动态稳定. 具体分析如下.

当磁偶极子偏离其原始位置 $P(x_0,y_0,z_0)$ 时,作用在它身上的力主要由两部分组成:零阶项  $\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$ ,以及几个一阶项.通过动态控制,可改变  $\Delta U$ 产生感应力 $\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}$ ,这也是一阶项.但是若零阶项不为 0,则 $\Delta U$ 将被淹没.为了确保控制的有效性,需要围绕零阶项等于 0 的点进行动态控制.考虑一个由铁磁性材料组成的小型磁偶极子,由于体积很小其惯性矩忽略不计,该磁偶极子始终与当地磁场对齐,磁偶极子 m 表示为

$$m = \frac{kB}{|B|},\tag{1}$$

其中*k*为该偶极子的大小. 磁偶极子在磁场中的能量 计算公式为

$$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} = -k \frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = -k \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}.$$
(2)

现假设一扰动导致该偶极子漂移到点  $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ , 若磁场不随时间变化, 则能量U也不会变化, 作用于偶极子上的净力为

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)},\tag{3}$$

$$F_{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{(x_{0} + \Delta x, y_{0} + \Delta y, z_{0} + \Delta z)},\tag{4}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)}.$$
 (5)

要使得偶极子稳定在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 附近, 磁场需要改变, 即产出新势能 $\Delta U$ . 与U相比, 势能 $\Delta U$ 相对较小, 即

(11)

$$F_x = -\frac{\partial U + \Delta U}{\partial x} \Big|_{(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)}, \tag{6}$$

$$F_{y} = -\frac{\partial U + \Delta U}{\partial y}\Big|_{(x_{0} + \Delta x, y_{0} + \Delta y, z_{0} + \Delta z)}, \tag{7}$$

$$F_z = -\frac{\partial U + \Delta U}{\partial z} \Big|_{(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)}.$$
 (8)

围绕点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 进行泰勒展开,只保留一阶项,新的净力为

$$F_{x} \approx -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{P} - \frac{\partial^{2} U}{\partial x^{2}}\Big|_{P} \Delta x - \frac{\partial^{2} U}{\partial x \partial y}\Big|_{P} \Delta y - \frac{\partial^{2} U}{\partial x \partial z}\Big|_{P} \Delta z - \frac{\partial^{2} U}{\partial x}\Big|_{P}, \qquad (9)$$

$$F_{y} \approx -\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{P} - \frac{\partial^{2} U}{\partial x \partial y}\Big|_{P} \Delta x - \frac{\partial^{2} U}{\partial y^{2}}\Big|_{P} \Delta y - \frac{\partial^{2} U}{\partial y \partial z}\Big|_{P} \Delta z - \frac{\partial \Delta U}{\partial y}\Big|_{P}, \qquad (10)$$

$$F_{z} \approx -\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{P} - \frac{\partial^{2} U}{\partial x \partial z}\Big|_{P} \Delta x - \frac{\partial^{2} U}{\partial y \partial z}\Big|_{P} \Delta y - \frac{\partial^{2} U}{\partial y \partial z}\Big|_{P} \Delta y - \frac{\partial^{2} U}{\partial z \partial z}\Big|_{P} \Delta y - \frac{\partial^{2} U}{\partial z}\Big|_{P} \Delta y - \frac{\partial^{2}$$

不失一般性, 若零阶项  $\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{P} \neq 0$ , 则新的 $F_x$ 有界, 因为其他 4 个项均是一阶项. 这意味着偶极子无法在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 附近稳定下来. 上述推导过程验证了 $\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{P} = 0$  是在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 附近实现悬浮的必要条件. 对  $F_y$ 和  $F_z$ 也可得出类似的结论,即  $\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{P} = 0$ 和  $\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{P} = 0$ .

 $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\Big|_P \Delta z - \frac{\partial \Delta U}{\partial z}\Big|_P.$ 

# 2.2.2 可控区域分析

根据以上分析,可通过数值方法得到不同磁铁 布局下的可控区域. 假设在二维场景下 Maglev-Delta 机器人的磁场由两个电磁铁提供,这两个电磁 铁的磁偶极子分别为 $m_1$ 和 $m_2$ . 总磁场由感应磁场 相加计算得出. 电磁铁轴线与重力方向的夹角为 45°. 本文考虑两种不同的极性相反的情况, 采用有 限差分法计算磁化小球在给定位置受到的力. 通过 对 $I_1$ 和 $I_2$ 进行参数扫描,记录所有可能的动态稳定 点位置,结果如图 3 所示,不同的子图对应不同的磁 极设置. 两个电磁铁间的距离固定为 0.15 m. 假设以 悬浮质量M=0.8g的磁偶极子(执行器)为控制目 的. 其他常数系数 $k=1.3\times 10^{-7} (J \cdot m^3/A)$ . 扫描电 磁铁周围的正方形域,该方形域的大小为 0.3 m× 0.3 m, X和 Y方向的分辨率均为5 mm. 根据显示的 区域,可得出结论:电流范围越大,可控区域越大. 另 一方面, 若两个电磁铁的极性不同 (相向风格摆放), 则可控区域也会变大. 在该模拟分析的引导下, 针对 二维场景和三维场景设置了合理的磁铁布局.

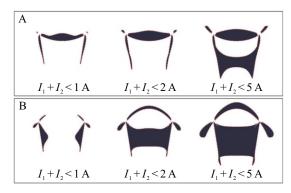


图3 二维场景下的磁悬浮动态稳定区域分析

# 2.2.3 执行模块实现

根据理论分析, 磁铁布局决定可悬浮区域面积. 为了得到尽量大的可控区域, 二维场景下采用两个磁铁悬置朝下的布局方案 (如图 4A 所示). 它们呈45°向下相对摆放, 使得两个磁铁下方存在较大的可控区域. 两个磁铁采用不同的电流方向, 使得执行器南北极朝向总是固定, 因此, 磁铁与执行器间像连着无形的绳子, 实现类似于 Delta 机器人的操控模式.

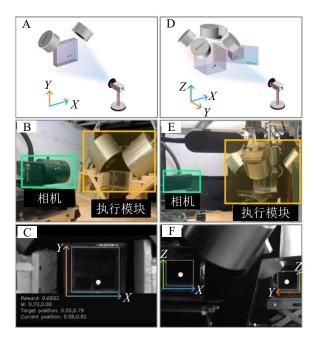


图4 二维和三维执行器

受二维模拟结果启发,在三维情形下采用 5 个磁铁的配置模式,如图 4D 所示.其中:以 4 个围绕1 个的分布模式,磁铁均朝下方,正中的磁铁为垂直朝下,其电流方向与其他磁铁相反,另外 4 个磁铁以与水平夹角约60°的朝向摆放,以此形成类似于 5 连杠式 Delta 机器人.相机放置在正对执行模块 30 cm处,如图 4B 和图 4E 所示.为了获取 3 个维度的信息,采用反光镜将立方体侧面视角信息提供给相机.如图 4F 所示,在相机视野中可获得执行器的正面和侧面视图.

# 2.3 高维磁悬浮 DRL 控制方法

由于电磁场的复杂性,对于采用多个电磁铁集成的 Maglev-Delta 机器人而言,构建高精度的数学模型并不容易,这使得传统的控制方法难以奏效.为此,本文研究不依赖模型 DRL 控制方法. 在二维场景下 Maglev-Delta 机器人采用 PPO 算法,三维场景下采用 SAC 算法,它们均属于 Actor-Critic 构架的算法. Actor-Critic 是结合策略优化和价值评估的一类先进强化学习方法,其包含两个组件: Actor 和 Critic. Actor 为策略网络,负责根据观测状态选择动作;Critic 为价值网络,用于评估在当前观测状态下选择某个动作的预期回报. Critic 通过对比实际回报与预期回报的差异,提供误差信号来帮助 Actor 优化策略.

#### 2.3.1 观测状态

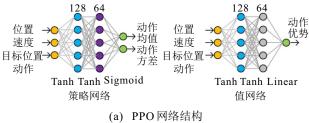
直觉上似乎以图像作为观测状态会更好,但是在样本稀疏的情况下,该方式增加了网络收敛难度. 因此,以执行器物理状态作为观测状态,建模如下所示:

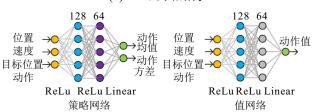
$$s_{t} = \left\{ \begin{bmatrix} p_{t-2} \\ v_{t-2} \\ t_{t-2} \\ a_{t-2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ v_{t-1} \\ t_{t-1} \\ a_{t-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_{t} \\ v_{t} \\ t_{t} \\ a_{t} \end{bmatrix} \right\}. \tag{12}$$

其中: t为时间步, s为观测状态, p为执行器位置, v为执行器运动速度, a为 DRL 控制器上一个状态下执行的动作. 观测状态包含多帧信息, 因此, 隐含了执行器的加速度信息.

#### 2.3.2 网络结构

DRL 控制器基于 TensorFlow 框架搭建, 如图 5 所示. 其中: 二维场景下采用 PPO 算法 (图 5(a)), 三维场景下采用 SAC 算法 (图 5(b)), 两种算法的策略 网络和值网络均采用全连接网络的构成方式.





(b) SAC网络结构

#### 图5 DRL 控制器网络结构

# 2.3.3 奖励函数

理论上在构建奖励函数时只需以执行器与目标位置的距离(位置误差)进行建模即可,然而,初步实验表明该方式下训练出来的策略并不理想,尤其是执行器到达目标位置后不能稳定悬浮.为此,本文引入速度约束和指数映射的方式建模奖励函数,如下所示:

$$r = \alpha \cdot \exp\left(-\frac{e_p^2}{2\sigma_p^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right). \tag{13}$$

其中:  $\alpha$ 为奖励强度,  $e_p$ 和v分别为位置误差和球速,  $\sigma_p$ 和 $\sigma_v$ 分别为位置误差和球速对应的奖励范围. 该思想来源于 PID 控制的微分项, 通过速度信息引导策略网络提前修正位置偏差, 以实现更迅速、敏捷的悬浮效果. 同时, 采用指数映射的目的是强调在目标位置时, DRL 智能体能够获得最高的奖励. 本文将训练分为 3 个阶段, 每个阶段包括5×10<sup>6</sup>步训练. 第 1 阶段:  $\sigma_p$ =0.15,  $\sigma_v$ =50; 第 2 阶段:  $\sigma_p$ =0.111,  $\sigma_v$ =300; 第 3 阶段:  $\sigma_p$ =0.05,  $\sigma_v$ =10.

# 2.3.4 电磁场非线性弱化函数

磁场强度与磁铁和执行器间距离的 3 次方成反比的物理特性,导致在控制器训练过程中,当执行器靠近磁铁时,磁力随着距离的缩短迅速增强.这种急剧增加的磁力会将执行器"困"在磁铁附近的小区域中,限制其运动范围.由于控制器在与环境交互时所能探索的区域有限,其学习到的策略也会偏向这些局部区域,阻碍了控制器在训练过程中的有效探索.电磁场的这种强非线性特性使得控制策略的解的形态非常狭窄,DRL 控制器很难探索到有效解而实现收敛.

针对这一问题,最直觉的解决方法似乎是通过降低电流来削弱磁场强度,以释放执行器并允许其移动至距离磁铁较远的区域.然而,减弱磁力会导致执行器无法在低场强区域受到足够的作用力,急剧压缩了可控空间.另一种解决方案是将操作区域放置在相对远离电磁铁的位置,以通过减少磁场变化幅度使其在操作区域内分布得更均匀.然而,该做法同样会产生可控空间较小的问题.

为此,本文提出基于调整磁场强度非线性特性的设计方案,其核心思想是通过小球与磁铁的距离构建权重函数,逐步弱化随距离急剧增强的磁力.图 6 为磁场强度调整示意图.如图 6 所示:构造一条权重曲线,该曲线以距离为自变量,用于平滑过渡磁场强度的增长,公式为

$$f_{\rm act} = w \times f_o, \tag{14}$$

其中w表示权重,其模型为

$$w = \min(d^2, 1), \ d \in [0, 1]. \tag{15}$$

这里d为小球到原点的距离. f。为原始磁场强度,它与小球到磁铁的距离d<sub>m</sub>的 3 次方成反比,即

$$f_o = \frac{1}{d_m^3}, \ d_m \in [0, 1].$$
 (16)

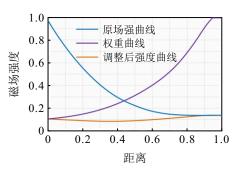


图6 磁场强度调整示意图

修正效果如图 6 所示: 磁场强度经权重函数修正后变得相对平稳 (见橙色曲线). 这一调整有效削弱了磁场的非线性特征, 使得磁场强度不会随着距离变化而显著变化. 这种设计大幅度提升了小球在训练过程中到达其他区域的概率, 增加了控制器的探索能力, 同时降低了控制策略的复杂度, 最终克服了 DRL 控制器在高维磁悬浮任务中的收敛难题.

# 3 实验

所搭建 Maglev-Delta 机器人实物如图 7 所示. 本节将通过 3 个实验验证 Maglev-Delta 机器人的性能,分别为二维场景下的多目标磁悬浮实验、模拟搬运实验和三维场景下的多目标悬浮实验. Maglev-Delta 机器人主要配置如下: PC 机为英特尔酷睿 i7 13700k CPU, GTX 1080 GPU, 16 GB 内存; Arduino型号为 Mega2560, PWM 调制频率为 1 kHz, 系统的控制周期为 10 ms; 电磁铁的驱动电压为 60 V.

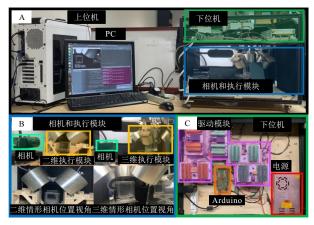


图7 Maglev-Delta 机器人实物

# 3.1 二维多目标磁悬浮实验

本实验的目的是令机器人以最快的速度将执行

器从当前位置移动至一给定位置并悬停,直至新目标位置出现,再将执行器移动至新的目标位置.

实验结果如图 8 所示. 小球沿 X和 Y方向的轨迹如图 8A 和图 8B 所示, 控制误差如图 8C 和图 8D 所示. 由误差结果可知, 在 X 方向和 Y 方向的相对平均误差 (绝对误差值比可控范围) 分别为 0.05 和 0.060 8, 由于克服重力是悬浮的主要挑战, Y 方向 (垂直方向) 的平均相对误差略大, 可见 Maglev-Delta 机器人的悬浮精度很高. 图 8E 和图 8F 分别为两次切换悬浮位置时的运动轨迹. 图 8E 的轨迹为图 8A 和图 8B 中棕色时间段发生的轨迹, 图 8F 中的轨迹表示蓝色时间段发生的轨迹. 由图 8A 和图 8B 可见, 执行器从一个位置移动至另一个位置所需时间非常短, 其中棕色时间段对应的运动速度达到 62 mm/s, 远快于其他类似的磁悬浮系统<sup>[1,3]</sup>. 由图 8E 和图 8F 可见, 执行器的运动轨迹并不是直线, 而是类似于最速降线, 表明 DRL 控制器能够学到优秀的控制策略.

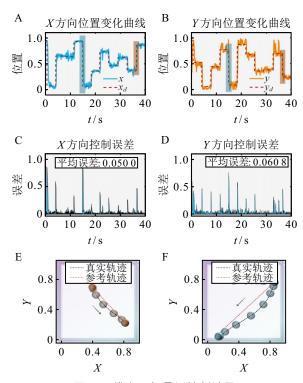


图8 二维多目标悬浮控制结果

# 3.2 二维模拟搬运实验

本实验模拟生活中的磁悬浮搬运操作,如图 9A 所示. 执行器作为非磁性负载的载体,将目标器件搬运至指定位置. 期间磁悬浮的目标位置是连续的,类似于柔性机械臂末端执行器作业过程中沿着连续的轨迹运动. 实验包括两个阶段: 在第 1 阶段, 执行器首先将货物从下部区域运送到上部区域,并在运送后返回至左下角的原始位置;第 2 阶段则是将负载从上部区域搬运到下部区域,并在运送完成后返回

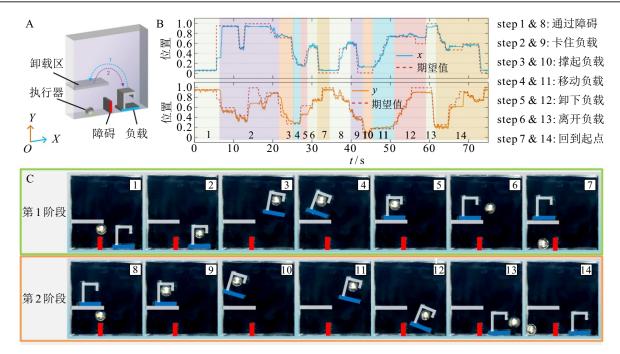


图9 二维模拟搬运实验结果

原位. 实验结果如图 9B 和图 9C 所示: 图 9B 为执行器的期望轨迹和实际轨迹,图 9C 为搬运过程中不同阶段的图像. 在搬运的两个阶段中,控制误差总保持在较低水平,尤其是执行器在 step 4~ step 6 和 step 7 卸下负载期间.

# 3.3 三维多目标磁悬浮实验

本实验验证 Maglev-Delta 机器人在三维情形下的多目标悬浮性能,实验设置与二维情形类似.

实验结果如图 10 所示. 整体上执行器能够很好

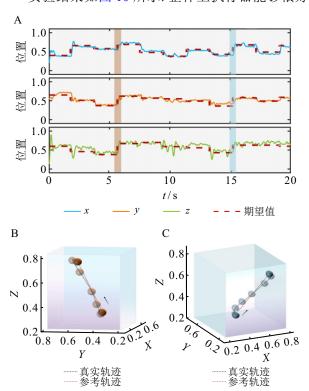


图10 三维多目标悬浮控制结果

地跟踪预期轨迹, 其平均移动速度约为96 mm/s, 显著快于文献 [1] 中三维磁悬浮控制所达到约4 mm/s 的移动速度, 且误差保持在较低水平. 此外, 对比 X Y与 Z 三个方向的控制效果可见: 在水平方向的控制较为平稳, 超调情况很少见, 展示出机器人优秀的悬浮控制性能; 而在 Z 方向的控制效果相对差, 如在 10 s 处绿色曲线的波动, 其原因是垂直方向需要克服重力, 当系统出现稍微的干扰 (Arduino 通讯不稳定等) 时, 会造成执行器抖动. 图 10B 和图 10C 为两段切换目标位置时执行器的运动轨迹, 从中可得出类似于二维场景下的结论.

# 3.4 应用潜力分析

本节将结合前述实验结果和磁悬浮的基本原理,对 Maglev-Delta 机器人在实际应用中的潜力进行深入分析. 具体而言, 若采用大型电磁铁作为执行模块的构建基础,则本研究将探讨该机器人在悬浮控制中的可实现空间尺度及其可承载的控制重量. 这一分析将为 Maglev-Delta 机器人在不同应用场景中的可行性提供理论依据.

假设 Maglev-Delta 机器人要控制一个由顺磁性材料 (铁磁性材料) 组成的物体的运动. 磁偶极子 m表示为m = kVB, 其中 k 为取决于材料的系数. 磁场引起的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{k\boldsymbol{V} \cdot \nabla(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B})}{\rho V} = \frac{k}{\rho} \nabla(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}) \propto \nabla(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}). \tag{17}$$

这里:  $\rho$ 为材料的质量密度; 材料保持不变, 因此,  $k/\rho$ 为一个常数. 现在考虑两个系统: 对于小系统, 磁

场由电磁铁提供, 其偶极矩强度表示为 $m_0$ ; 对于大系统, 电磁铁偶极矩的强度表示为 $m'_0(m'_0 > m_0)$ . 对于小系统, 半径 $r=r_0$ 周围的感应加速度为

$$|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0)| \propto \nabla(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}) \propto m_0^2 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r^6}\right)\Big|_{r=r_0} \propto \frac{m_0^2}{r_0^7}.$$
(18)

对于大系统,则 $(r=r'_0)$ 周围的加速度为

$$|\boldsymbol{a}(r_0')| \propto \frac{(m_0')^2}{(r_0')^7}.$$
 (19)

按比例放大,将 $|a(r_0)|$ 与 $|a(r'_0)|$ 等同,可得到

$$\frac{r_0'}{r_0} = \left(\frac{m_0'}{m_0}\right)^{2/7}. \tag{20}$$

当使用由 $m'_0$ 表示的大型电磁铁时,上述缩放关系可预测 Maglev-Delta 机器人的操控范围  $(r'_0)$ . 前文三维场景实验结果表明,现有的小型机器人操控空间为 $(3.5\,\mathrm{cm})^3$ 的区域,操控物体的质量为 $0.8\,\mathrm{g}$ . 有:

- 1) 当采用大型起重电磁铁 (截面直径为 240 cm, 高度为 30 cm, 最大工作电流为 154 A) 构建 Delta 机器人时,该机器人可在  $(1.1\,\mathrm{m})^3$ 的区域内悬浮操控 26.2 kg 的重物.
- 2) 当采用超强磁场的托卡马克线圈 (截面积为  $(10.5\,\mathrm{m})^2$ , 高度为 $18.6\,\mathrm{m}$ , 最大工作电流为  $75\,\mathrm{kA}$  时, 该机器人可实现在  $(27.3\,\mathrm{m})^3$ 的区域内悬浮操控  $3.8\times10^5\,\mathrm{kg}$  的重物.

# 4 讨论

#### 4.1 整体控制效果

由多目标悬浮控制的运动轨迹可见,执行器运动轨迹类似于最速降线.从直观角度理解,走直线虽然为最短路径,但是该情形要求电磁铁往上拉着执行器,导致抵消掉部分垂直方向的重力,而磁铁的侧向力在开始阶段显然不能太大,越大意味着也带来越大的往上拉力,使得执行器无法在前期获得较大加速度.对于执行器的实际轨迹,显然在该方式下DRL控制器首先令重力给执行器加速,使得执行器在初期快速提高速度,然后再"牵"着执行器"甩"到目标位置,即通过提高前期加速度而提升整体平均速度来获得最短运动时间.这表明DRL控制器在训练过程中能够推理出优秀的控制策略.

整体上,尽管磁悬浮在二维和三维空间中具有高度非线性的特性,但是 Maglev-Delta 机器人通过利用 DRL 强大策略推理能力仍然能够实现快速、精确的非接触操控.此外,实验验证了 Maglev-Delta 机器人可穿越障碍物运输非磁性物体,即使它们没有经过此类任务的训练,且负载比执行器本身更重,为实现非接触运输非磁性物体开辟了新途径. Maglev-

Delta 机器人的多功能性为高维度非接触操控应用提供了可能性.

#### 4.2 硬件局限性

在二维和三维操控实验中, 沿垂直方向 (即 Z 方向) 的精度略低于水平方向 (即 X和 Y 方向). 这是因为垂直方向存在重力. 即使是在 40 mm 高的空间中,由于重力的作用,小球也能在 0.1 s 内加速至 980 mm/s. 因此, 磁场和相应的输出电流必须迅速调整以克服重力. 这样严格的要求超出了硬件系统 (Arduino 和台式机) 的能力范围. 为了规避系统硬件性能约束难题, 在实验中用矿物油填充丙烯酸盒, 以降低极限情况下操控执行器的加速度需求. 尽管硬件条件有限,所提出 DRL 控制器在垂直方向的最大运动速度仍然能够达到96 mm/s, 比文献 [3] 快了约 50 倍.

Maglev-Delta 机器人的悬浮稳定效果会受到整个电源系统和通讯系统的干扰. 尤其是在三维场景下, 当 Arduino 通讯出问题时, 五路电磁铁中只要有一路异常均会带来执行器的强烈抖动. 该情况在未来可通过优化下位机或采用冗余设计进行缓解.

#### 4.3 PPO 和 SAC 的收敛性

经实验发现, PPO 在三维情形下无法收敛, 而 SAC 可以. PPO 是基于策略梯度的 DRL 方法, 它通过限制策略更新幅度来保证训练的稳定性. 其目标函数通常表示为

 $L(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_{\theta_{\text{old}}}}[\min(r_t(\theta)A_t, \operatorname{clip}(\theta, \epsilon)A_t)].$  (21) 其中:  $\operatorname{clip}(\theta, \epsilon) = \operatorname{clip}(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon); \ r_t(\theta) = \frac{\pi_{\theta}(a_t|s_t)}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_t|s_t)}$  为新旧策略的比值; $A_t$ 为优势函数; $\epsilon$ 为一个较小的整数,用于限制策略的更新. PPO 通过截断比值  $r_t(\theta)$ 来防止策略过度更新,保证训练稳定性,随着策略的更新会导致旧样本被弃用,这使得其数据利用效率较低. SAC 是基于动作熵最大化的 DRL 方法,它在策略优化中加入了最大熵项,以提高探索能力. SAC 的目标函数表示为

 $L(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim D}[Q(s_t, a_t) + \alpha H(\pi(\cdot|s_t))].$  (22) 这里:  $Q(s_t, a_t)$ 为Q值函数,表示在状态 $s_t$ 执行动作 $a_t$ 后的期望回报;  $H(\pi(\cdot|s_t))$ 为策略的熵,用于增加探索性;  $\alpha$ 是一个权衡探索和利用的系数; D 为从经验回放池中抽取的数据样本.由于 SAC 属于纯离线训练方法,能够充分使用经验回放技术,使得历史样本总是可用于优化策略,具有较高的数据利用率.

# 4.4 DRL 控制器与 PID 控制器性能对比

根据文献以及本文前期研究发现,高维情形下 并不容易实现 PID 控制 (效果往往比较牵强). 为了 对比 DRL 控制器 (以 PPO 为例) 与 PID 控制器的性能,本文在一维场景下 (采用单一磁铁悬于小球上方,通过控制磁力实现悬浮控制的模式) 展开模拟对比实验.

实验效果如图 11 所示: PPO 控制器的跟踪速度显著快于 PID 控制器 (图 11A), 控制误差小 (图 11B), 且没有超调量. 整体上, PPO 控制器的性能显著优于 PID 控制器. PPO 控制器的优越性也可通过图 11C看出, 它的输出动作呈非线性变化, 表现出灵活有力的控制性能. 如当小球位置接近期望位置时 (0.1 s 左右), PPO 控制器的输出瞬间从 1 下降至接近于 0 以实现迅速减速、避免超调, 而 PID 控制器因其自身输出的线性变化特性而无法做到如此精妙的控制效果.

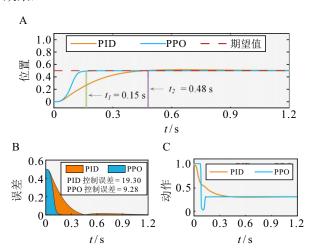


图11 一维情形下 DRL 控制器与 PID 控制器性能对比

### 5 结 论

本文研究了面向高维度非接触操控的磁悬浮控 制系统 —— Maglev-Delta 机器人. 为了实现在二维 和三维场景下的磁悬浮控制,首先,通过理论分析确 定了电磁铁的布局形态; 然后, 以视觉伺服控制的模 式搭建了软硬件系统, 考虑到多个电磁铁构成的机 器人难以清晰建模,采用不依赖模型的深度强化学 习方法设计了控制器,并针对性设计电磁场强度线 性化函数、奖励函数解决了 DRL 的收敛难题; 最后, 通过多目标磁悬浮控制实验和模拟搬运实验展示了 Maglev-Delta 机器人的性能, 验证了该机器人在高维 度场景下能够快速灵活地完成悬浮控制.同时,在实 验结果的基础上,对 Maglev-Delta 机器人进行应用 潜力分析,表明在理想硬件设置下,可实现在超过  $(27.3\,\mathrm{m})^3$ 的区域内搬运 $3.8\times10^5$  kg 的非磁性物体, 展示了该机器人在高维度非接触操控领域的巨大应 用前景.

#### 参考文献 (References)

- [1] Abbasi S A, Ahmed A, Noh S, et al. Autonomous 3D positional control of a magnetic microrobot using reinforcement learning[J]. Nature Machine Intelligence, 2024, 6: 92-105.
- [2] 徐甜莉, 孙宗耀, 蔡彬, 等. 有量化输入的受干扰磁悬 浮系统的鲁棒自适应渐近跟踪控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(8): 2656-2662.
  - (Xu T L, Sun Z Y, Cai B, et al. Robust adaptive asymptotic tracking control of magnetic levitation systems with quantized input and disturbances[J]. Control and Decision, 2024, 39(8): 2656-2662.)
- [3] Nishino T, Fujitani Y, Kato N, et al. 3D positional control of magnetic levitation system using adaptive control: Improvement of positioning control in horizontal plane[J]. Intelligent Robots and Computer Vision XXIX: Algorithms and Techniques, 2012, 8301: 192-197.
- [4] 李娇娇, 韩芝菲, 孙宗耀, 等. 基于事件触发策略的输出受限磁悬浮系统的有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 861-866.
  (Li J J, Han Z F, Sun Z Y, et al. Event-triggered finite-time stabilization of maglev system with output constraint[J]. Control and Decision, 2024, 39(3): 861-
- [5] Zhou D J, Zhu L M, Liu J, et al. Vertical magnetic field distribution characteristics of triple-peak halbach array PMG and its engineering application in HTS maglev train[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2022, 32(9): 1-8.
- [6] Al-Nuaimi I I I, Mahyuddin M N, Bachache N K. A non-contact manipulation for robotic applications: A review on acoustic levitation[J]. IEEE Access, 2022, 10: 120823-120837.
- [7] Seah S A, Drinkwater B W, Carter T, et al. Correspondence: Dexterous ultrasonic levitation of millimeter-sized objects in air[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2014, 61(7): 1233-1236.
- [8] 李荣和, 桑汉德, 陈爽, 等. 气体物理性质对近场超声 悬浮特性的影响研究[J]. 应用声学, 2023, 42(1): 131-137.
  - (Li R H, Sang H D, Chen S, et al. A study on the influence of gas physical properties on near-field acousticlevitation characteristics[J]. Journal of Applied Acoustics, 2023, 42(1): 131-137.)
- [9] 刘国鹏, 尤静林, 王建, 等. 气动悬浮无容器激光加热技术的应用:  $MgTi_2O_5$  晶体及其熔体微结构的原位超高温拉曼光谱研究[J]. 光谱学与光谱分析, 2023, 43(8): 2507-2513.
  - (Liu G P, You J L, Wang J, et al. Application of aerodynamic levitator laser heating technique: Microstructures of MgTi<sub>2</sub>O<sub>5</sub> crystal and melt by in-situ superhigh temperature Raman spectroscopy[J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2023, 43(8): 2507-2513.)
- [10] Suzuki Y, Miki D, Edamoto M, et al. A MEMS electret generator with electrostatic levitation for vibrationdriven energy-harvesting applications[J]. Journal of

- Micromechanics and Microengineering, 2010, 20(10): 104002.
- [11] 黄雪峰, 陈矗, 李嘉欣, 等. 基于激光悬浮的单颗微米粒子/纳米团簇的散射强度分布测量[J]. 物理学报, 2023, 72(17): 36-47. (Huang X F, Chen C, Li J X, et al. Measurement of scattering intensity distribution of single microparticles/nanoclusters based on laser levitation[J]. Acta Physica Sinica, 2023, 72(17): 36-47.)
- [12] Lin F J, Teng L T, Shieh P H. Intelligent adaptive backstepping control system for magnetic levitation apparatus[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2007, 43(5): 2009-2018.
- [13] Kummer M P, Abbott J J, Kratochvil B E, et al. OctoMag: An electromagnetic system for 5-DOF wireless micromanipulation[C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Anchorage, 2010: 1610-1616.
- [14] 姚宏, 郭雷, 徐健学. 高维磁悬浮控制系统混沌与控制器设计研究[J]. 仪器仪表学报, 2003, 24(2): 175-178. (Yao H, Guo L, Xu J X. The research on the controller's design and chaos for a multidimensional magnetic levitation control system[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2003, 24(2): 175-178.)
- [15] Ge S C, Nemiroski A, Mirica K A, et al. Magnetic levitation in chemistry, materials science, and biochemistry[J]. Angewandte Chemie: International Ed in English, 2020, 59(41): 17810-17855.
- [16] Sitti M, Wiersma D S. Pros and cons: Magnetic versus optical microrobots[J]. Advanced Materials, 2020, 32(20): e1906766.
- [17] 蓝益鹏, 李洁. 直线同步电动机磁悬浮系统的自适应模糊滑模控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(3): 693-698. (Lan Y P, Li J. Adaptive fuzzy sliding mode control for magnetic suspension system of linear synchronous motor[J]. Control and Decision, 2021, 36(3): 693-698.)
- [18] Zhu H Y, Teo T J, Pang C K. Flexure-based magnetically levitated dual-stage system for high-bandwidth positioning[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(8): 4665-4675.
- [19] Bachovchin K D, Hoburg J F, Post R F. Magnetic fields and forces in permanent magnet levitated bearings[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2012, 48(7): 2112-2120.

[20] 刘冠诚, 陆永华, 杨海波, 等. 基于力失衡的二维主动

- 磁悬浮驱动方法分析与测试[J]. 测试技术学报, 2024, 38(2): 109-119. (Liu G C, Lu Y H, Yang H B, et al. Analysis and test of two-dimensional active maglev actuation and control method based on force imbalance[J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2024, 38(2): 109-119.)
- [21] 邹晋彬, 易辉阳, 张鹏辉, 等. 基于 Q-MPC 的径向四自由度磁悬浮轴承控制策略[J]. 轴承, 2024(7): 36-44. (Zou J B, Yi H Y, Zhang P H, et al. Control strategy of radial four degree of freedom magnetic bearings based on Q-MPC[J]. Bearing, 2024(7): 36-44.)
- [22] Ren M Y, Oka K. Design of a noncontact bending

- testing device using magnetic levitation mechanism[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2024, 71(2): 1697-1707.
- [23] Miyazaki H, Ohji T, Amei K, et al. Formulation of a three-dimensional movable magnetic levitation system and its performance in tests[J]. Journal of the Magnetics Society of Japan, 2010, 34(3): 395-400.
- [24] Khamesee M B, Kato N, Nomura Y, et al. Design and control of a microrobotic system using magnetic levitation[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2002, 7(1): 1-14.
- [25] Nakamura T, Khamesee M B. A prototype mechanism for three-dimensional levitated movement of a small magnet[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 1997, 2(1): 41-50.
- [26] 张钦彤, 王昱超, 王鹤羲, 等. 大语言模型微调技术的 研究综述[J]. 计算机工程与应用, 2024, 60(17): 17-33. (Zhang Q T, Wang Y C, Wang H X, et al. Comprehensive review of large language model finetuning[J]. Computer Engineering and Applications, 2024, 60(17): 17-33.)
- [27] Silver D, Huang A, Maddison C J, et al. Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search[J]. Nature, 2016, 529: 484-489.
- [28] Mnih V, Kavukcuoglu K, Silver D, et al. Human-level control through deep reinforcement learning[J]. Nature, 2015, 518: 529-533.
- [29] 罗彪, 胡天萌, 周育豪, 等. 多智能体强化学习控制与决策研究综述[J]. 自动化学报, DOI: 10.16383/j.aas. c240392. (Luo B, Hu T M, Zhou Y H, et al. Survey on multi-agent reinforcement learning for control and decision-making[J]. Acta Automatica Sinica, DOI: 10.16383/j. aas.c240392.)
- [30] 户高铭, 蔡克卫, 王芳, 等. 基于深度强化学习的无地 图移动机器人导航[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 985-993. (Hu G M, Cai K W, Wang F, et al. Mapless navigation based on deep reinforcement learning for mobile robots[J]. Control and Decision, 2024, 39(3): 985-993.)
- [31] Schulman J, Wolski F, Dhariwal P, et al. Proximal policy optimization algorithms[J/OL]. 2017, arXiv: 1707. 06347.
- [32] Haarnoja T, Zhou A, Hartikainen K, et al. Soft actorcritic algorithms and applications[J/OL]. 2018, arXiv: 1812.05905.
- [33] Earnshaw S. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether[J]. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1848, 7: 97.

#### 作者简介

黄国明 (1992-), 男, 博士, 主要研究方向为机器学习、智能控制系统, E-mail: ghuang33@wisc.edu;

周清逸 (1997-), 男, 博士生, 主要研究方向为电磁模拟、量子电动力学和光学计算, E-mail: qzhou75@wisc.edu.