

# 控制与决策

Control and Decision

## 切换拓扑下多智能体系统的固定/预定时间优化一致性

李璐珂, 甘勤涛, 孙海涛

引用本文:

李璐珂, 甘勤涛, 孙海涛. 切换拓扑下多智能体系统的固定/预定时间优化一致性[J]. *控制与决策*, 2025, 40(5): 1485-1493.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0906>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### [基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制](#)

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks  
*控制与决策*. 2021, 36(8): 1955-1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

#### [多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制](#)

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft  
*控制与决策*. 2021, 36(5): 1049-1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

#### [基于模型依赖驻留时间的异步切换控制](#)

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time  
*控制与决策*. 2021, 36(3): 609-618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

#### [一种自适应拟牛顿-状态转移混合智能优化算法及应用](#)

A hybrid state transition optimization algorithm based on adaptive quasinewton method and its application  
*控制与决策*. 2021, 36(10): 2451-2458 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0214>

#### [基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制](#)

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm  
*控制与决策*. 2021, 36(1): 173-179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

# 切换拓扑下多智能体系统的固定/预定时间优化一致性

李璐珂, 甘勤涛<sup>†</sup>, 孙海涛

(陆军工程大学(石家庄校区), 石家庄 050003)

**摘要:** 研究切换拓扑下多智能体系统的固定/预定时间优化问题, 提出基于指数函数的分布式固定/预定时间优化算法. 首先, 所提出算法由两个阶段构成: 第 1 阶段确保智能体的状态在固定/预定时间内收敛至各自的局部最优状态, 从而消除零梯度和算法对系统初始状态位于其局部最优解处的要求; 第 2 阶段实现智能体的状态在固定/预定时间内收敛至优化问题的全局最优解. 然后, 利用凸优化理论、Lyapunov 稳定性理论, 分析算法在通信拓扑切换下的收敛性. 所提出的两种算法均无需交换梯度以及 Hessian 矩阵信息, 其设计不依赖符号函数, 且所需参数较少. 最后, 通过数值仿真验证上述理论结果.

**关键词:** 多智能体系统; 固定时间一致性; 预定时间一致性; 分布式优化; 零梯度和; 切换拓扑

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0906

引用格式: 李璐珂, 甘勤涛, 孙海涛. 切换拓扑下多智能体系统的固定/预定时间优化一致性 [J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1485-1493.

## Distributed fixed/predefined-time optimal consensus for multi-agent systems under switching topologies

LI Lu-ke, GAN Qin-tao<sup>†</sup>, SUN Hai-tao

(Army Engineering University of PLA(Shijiazhaung Campus), Shijiazhuang 050003, China)

**Abstract:** This paper investigates the fixed/predefined-time optimization problems of multi-agent systems under switching topology. Two-stage exponential-function-based algorithms are proposed for these problems. The first stage ensures agent states converge to their local optimums within fixed/predefined time, which eliminates the requirement that the initial state must be at its local optimum in the zero-gradient-sum algorithm; The second stage guarantees that all agents achieve the global optimum of the optimization problem within fixed/predefined time. Then based on the convex optimization theory and the Lyapunov stability theorems, the fixed/predefined-time convergence of the developed algorithms is analyzed. Note that the proposed algorithms do not need to exchange the gradient and Hessian matrix information. Additionally, their designs eliminate the dependence on signum function, contain fewer parameters and offer a simplified design. Finally, the obtained results are verified by a numerical simulation.

**Keywords:** multi-agent systems; fixed-time consensus; predefined-time consensus; distributed optimization; zero-gradient-sum; switching topologies

## 0 引言

近年来, 随着大规模通信和计算设备的集成, 以及多无人系统与人工智能等交叉学科在工程技术领域的应用, 众多学者对多智能体系统协同控制与决策技术开展了广泛研究. 分布式优化控制问题作为多智能体协调控制领域的重要问题之一<sup>[1-2]</sup>, 目前已广泛应用于智能电网、机器人协作、资源分配、机器学习等领域<sup>[2-3]</sup>. 该问题的核心为设计分布式协同优化算法, 使得智能体通过信息交换和协作来实现全

局目标函数的最小化.

目前, 已成功应用于工程技术领域的分布式优化算法有分布式拉格朗日乘数法、交替方向乘子法、分布式梯度法<sup>[4]</sup>、次梯度投影法<sup>[5]</sup>以及无梯度法<sup>[6]</sup>等. 另外一种广泛使用的方法为文献 [7] 中基于 Hessian 矩阵的零梯度和 (ZGS) 算法. 具体而言, 该算法适用于分布式计算环境, 通过不同节点间的协作来求解凸优化问题. 它最初用于解决无向通信网络中具有固定拓扑的无约束且可分的凸优化问题,

收稿日期: 2024-07-28; 录用日期: 2024-11-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61305067); 军队高层次科技创新人才工程自主科研项目 ([2022]40).

责任编委: 李忠奎.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: ganqintao@sina.com.

其核心思想是设计一种机制使得动力系统的状态沿着一个不变的零梯度和流形滑动,并最终收敛至凸优化问题的全局最优解.文献[7]首次揭示了ZGS算法与分布式共识算法间的紧密联系.此后,基于ZGS算法的分布式优化研究迅速兴起,并涌现出大量成果.文献[8]提出了一种应用于分布式凸优化问题的离散时间ZGS算法,该算法适用于有向通信网络且实现了指数收敛.为了节约计算和通信资源,Chen等<sup>[9]</sup>提出了一种离散事件触发ZGS算法并证明了其指数收敛性;文献[10]提出的基于动态事件触发机制的ZGS算法和文献[11]提出的基于间歇事件触发机制的ZGS算法进一步节省了资源.

随着分布式优化算法的蓬勃发展和实际工程问题的需要,优化算法的收敛速度受到越来越多的关注.虽然文献[7]提出的ZGS算法能够以指数速度解决优化问题,但是其仍然只能在时间趋于无穷大时收敛至最优解,这意味着在实际应用中只能达到次优解.为了解决这一问题,文献[12-13]分别利用齐次系统理论和滑模控制理论提出了基于ZGS算法的有限时间分布式优化算法,实现了优化问题全局最优解的有限时间可达性.结合固定时间稳定性理论<sup>[14]</sup>,Wang等<sup>[15]</sup>进一步提出了固定时间分布式优化算法,摆脱了有限时间分布式优化算法中时间估计对系统初始状态的依赖.随后,学者们从不同角度更加深入地研究了基于固定时间分布式优化算法的凸优化问题<sup>[16-18]</sup>.鉴于在解决固定时间优化一致问题时,控制目标实现的时间受控制器参数的影响,文献[16,19]基于ZGS算法进一步研究了分布式预定时间优化一致问题,其中实现优化一致的时间可根据需求预先设定.

虽然上述算法的收敛速度得到了大幅提升,但是其设计中所涉及到的符号函数在某些实际应用中可能会导致抖振现象.这种抖振会影响系统的整体性能,增加系统的能量损耗和控制成本.此外,多数现有研究均要求智能体的初始状态处于其局部目标函数的最小值点<sup>[20]</sup>,这一要求显然不符合实际应用场景.尽管文献[15]设计的两阶段优化算法和文献[21]设计的基于积分滑模面的无局部最小化的ZGS算法成功地取消了对系统初始状态的限制,但是这两种算法所含参数过多,且收敛时间的估计过于繁琐.

另一方面,上述研究均假设网络通信拓扑是固定的.在多智能体系统中,环境变化、信号干扰以及智能体和网络故障均可能会导致多智能体间通信链路的中断或增加,这种情况可用切换通信拓扑来描述.在切换拓扑结构中,智能体连接关系的动态变化

导致系统一致性控制面临挑战,研究如何在有限时间内实现高效稳定的分布式最优一致目标,探索更有效的算法和策略具有重要意义.文献[22]利用分布式ZGS算法研究了受时变通信时滞和切换通信影响的分布式凸优化问题;文献[23]在随机切换无向拓扑条件下,设计了基于ZGS算法的有限时间收敛协议,成功使得系统状态在有限时间内收敛至凸优化问题的最优解.然而,针对切换拓扑下多智能体系统固定/预定时间分布式优化问题的研究尚显不足,需要进一步探索和完善.

本文基于固定/预定时间稳定性定理和ZGS算法设计两阶段分布式优化算法,解决切换拓扑下多智能体系统的分布式固定/预定时间最优一致问题.所设计算法具有以下优势:1)不同于针对固定拓扑的优化算法<sup>[15,17]</sup>,本文利用代数图论和固定/预定时间稳定性理论设计更具一般性的切换拓扑下的优化算法;2)第1阶段算法可使得智能体的任意初始状态收敛至各自的局部最优解处,因此,本文不限制系统初始状态为局部目标函数的最优解;3)与文献[15-17]中的算法相比较,所设计基于指数函数的算法巧妙地避免了符号函数的使用,且所含参数较少,对时间的估计更简洁.

## 1 预备知识

符号表示:本文中, $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{R}^+$ 和 $\mathbf{R}^m$ 分别为实数、非负实数、 $m$ 维实空间; $I_m(0_m)$ 、 $I_{m \times m}(0_{m \times m})$ 分别为 $m$ 维单位向量(零向量)和 $m \times m$ 的单位矩阵(零矩阵); $\|x\|$ 为向量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbf{R}^m$ 的欧氏范数; $A \otimes B$ 为矩阵 $A$ 与 $B$ 的克罗内克积; $\nabla H(x)$ 和 $\nabla^2 H(x)$ 分别为函数 $H(x)$ 在 $x$ 处的梯度和Hessian矩阵;对于任意 $x \in \mathbf{R}^m \setminus \{0_m\}$ 和 $k \in \mathbf{R}$ , $\|x\|^k = x/\|x\|^{1-k}$ .

### 1.1 代数图论

对于多智能体系统的无向通信图 $\mathcal{G} = \{\varepsilon, \nu, \mathcal{A}\}$ , $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}$ 为智能体的集合, $\varepsilon \in \nu \times \nu$ 为边的集合. $(\nu_i, \nu_j) \in \varepsilon$ 表示智能体 $\nu_i$ 与 $\nu_j$ 间可传输信息.图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵 $\mathcal{A} = a_{ij} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,若 $(\nu_i, \nu_j) \in \varepsilon$ ,则 $a_{ij} > 0$ ;否则 $a_{ij} = 0$ ,假设每个智能体不需要与自己通信.智能体 $\nu_i$ 的邻居集合为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \nu | (j, i) \in \varepsilon\}$ .图 $\mathcal{G}$ 对应的拉普拉斯矩阵 $L_{\mathcal{G}} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ .其中: $l_{ij} = -a_{ij}$ , $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ .设无向图图集 $\tilde{\mathcal{G}} = \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{\chi}\}$ 为多智能体系统所有可能的通讯拓扑图, $F = \{1, 2, \dots, \chi\}$ 为 $\tilde{\mathcal{G}}$ 的索引集,切换信号 $\omega(t) : [0, +\infty) \mapsto F$ 为 $t$ 时刻的通讯拓扑图在图集 $\tilde{\mathcal{G}}$ 里的索引,即图 $\mathcal{G}_{\omega(t)}$ 为多智能体系统在时刻 $t$ 的通讯拓扑

图.

**假设 1** 对于切换信号 $\omega(t)$ , 通信拓扑图 $\mathcal{G}_{\omega(t)}$ 均为无向连通图.

**1.2 相关定义和引理**

**定义 1**<sup>[17]</sup> 给定凸集 $D$ , 若对于任意 $x, y \in D$ 和 $\theta \in \mathbf{R}^+$ , 二次连续可微凸函数 $H: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

$$H(y) - H(x) - (\nabla H(x))^T(y - x) \geq \frac{\theta}{2} \|x - y\|^2,$$

则称 $H$ 为 $\theta$ 强凸函数. 上述条件等价于 $\nabla^2 H(x) \geq \theta I_m$ . 此外, 对于任意 $M \in \mathbf{R}^+$ 和二次连续可微凸函数 $H: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , 以下两个条件等价:

$$(\nabla H(y) - \nabla H(x))^T(y - x) \leq M \|y - x\|^2,$$

$$\nabla^2 H(x) \leq M I_m.$$

**引理 1**<sup>[16]</sup> 对于无向连通图 $\mathcal{G} = \{\varepsilon, \nu, \mathcal{A}\}$ 对应的半正定拉普拉斯矩阵 $L_{\mathcal{G}}$ , 其特征值由小到大排列为 $0 < \lambda_2(L_{\mathcal{G}}) < \dots < \lambda_{\max}(L_{\mathcal{G}})$ , 其中 $\lambda_2(L_{\mathcal{G}})$ 为 $L_{\mathcal{G}}$ 的最小非零特征值. 此外, 若 $1_m^T x = 0 (x \in \mathbf{R}^m)$ , 则 $x^T L_{\mathcal{G}} x \geq \lambda_2(L_{\mathcal{G}}) x^T x$ .

**引理 2** 函数 $C(x) = W^{\kappa^q x^{2q}} x^{2(1-q)}$ 为凸函数. 其中:  $x, \kappa \geq 0, W > 1$ , 且 $0 < q < \frac{1}{2}$ .

**引理 3**<sup>[24]</sup> 给定凸函数 $C$ 以及 $K^2$ 个实数 $\mu_{pq}$ . 其中:  $C(0) = 0, p, q \in \{1, 2, \dots, K\}, M_p \subseteq \{1, 2, \dots, K\}$ 为任意一个指标集. 可得到

$$\frac{1}{K^2} \sum_{p=1}^K \sum_{q \in M_p} C(\mu_{pq}) \geq C\left(\frac{1}{K^2} \sum_{p=1}^K \sum_{q \in M_p} \mu_{pq}\right).$$

**引理 4** 对于系统 $\dot{x}(t) = h(x(t)), x(0) = x_0 (x \in \mathbf{R}^m)$ , 假设原点为该系统的平衡点. 若存在连续可微且径向无界的函数 $V: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^+$ 满足

$$\frac{dV}{dt} \leq -bW^{aV^q} V^{1-q}.$$

其中:  $a, b > 0, W > 1, 0 < q < 1$ . 则称该系统是固定时间稳定的, 收敛时间满足 $T \leq t_0 + 1/(abq \ln W)$ .

**证明** 定义 $\mathcal{Z}(t) = 1 - W^{-aV^q}$ , 当且仅当 $V(t) = 0$ 时, 有 $\mathcal{Z}(t) = 0$ . 由于 $\frac{dV}{dt} \leq -bW^{aV^q} V^{1-q}$ , 可得到 $d\mathcal{Z} \leq -abq \ln(W) dt$ , 对其两边从 $t_0$ 到 $t$ 进行积分, 可得到 $\mathcal{Z}(t) \leq \mathcal{Z}(t_0) - abq \ln(W)(t - t_0)$ .

由 $\mathcal{Z}(t) \geq 0$ 可知, 当 $t \geq t_0 + \frac{\mathcal{Z}(t_0)}{abq \ln(W)} \doteq T(t_0, x_0)$ 时, 有 $\mathcal{Z}(t) \equiv 0$ . 又由 $0 < W^{-aV^q(t_0)} \leq 1$ 可知,  $T(t_0, x_0)$ 关于 $x_0$ 有界, 即 $T(t_0, x_0) \leq t_0 + 1/[abq \ln(W)]$ . 因此, 当 $t \geq t_0 + 1/[abq \ln(W)]$ 时, 有 $\mathcal{Z}(t) \equiv 0$ 成立. 进一步可得到, 当 $t \geq t_0 + 1/[abq \ln(W)]$ 时, 有 $x(t) \equiv 0$ 成立.  $\square$

**注 1** 引理 4 给出了基于指数函数的固定时间稳定性判别条件. 与包含两项的传统固定时间稳定性定理<sup>[14]</sup>相比, 其形式简洁、参数精简, 因此, 更利于优化算法的设计和算法收敛时间的估计. 此外, 引理中参数 $W$ 和 $a$ 的选取较为灵活, 可通过调整 $W$ 和 $a$ 的值来改变算法收敛时间.

**引理 5** 对于系统 $\dot{x}(t) = h(x(t)), x(0) = x_0 (x \in \mathbf{R}^m)$ , 假设原点为该系统的平衡点. 对于预先给定的时间 $T_p > 0$ , 若存在连续可微且径向无界的函数 $V: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^+$ 满足

$$\frac{dV}{dt} \leq -\frac{1}{aqT_p \ln W} W^{aV^q} V^{1-q}.$$

其中:  $a, b > 0, W > 1, 0 < q < 1$ . 则称该系统是预定时间稳定的.

**证明** 由引理条件, 可得到 $d\mathcal{Z} \leq -1/T_p dt$ , 对其两边从 $t_0$ 到 $t$ 进行积分, 可得到 $\mathcal{Z}(t) \leq \mathcal{Z}(t_0) - (t - t_0)/T_p$ .

由于 $0 < W^{-aV^q(t_0)} \leq 1$ , 当 $t \geq t_0 + T_p \geq t_0 + T_p(1 - W^{-aV^q(t_0)}) = t_0 + T_p \mathcal{Z}(t_0)$ 时, 可得到 $\mathcal{Z}(t) \leq 0$ . 又由于 $\mathcal{Z}(t) \geq 0$ , 则当 $t \geq t_0 + T_p$ 时, 可得到 $\mathcal{Z}(t) \equiv 0$ . 进一步可知, 当 $t \geq t_0 + T_p$ 时, 有 $V(t) \equiv 0$ 成立. 即 $\lim_{t \rightarrow t_0 + T_p} x(t) = 0$ , 且当 $t \geq t_0 + T_p$ 时, 有 $x(t) \equiv 0$ .  $\square$

**1.3 问题描述**

考虑由 $N$ 个智能体组成的一阶多智能体系统, 第 $i$ 个智能体的动力学行为可描述为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t). \tag{1}$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, N; x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{im}(t))^T \in \mathbf{R}^m$ 和 $u_i(t) = (u_{i1}(t), u_{i2}(t), \dots, u_{im}(t))^T \in \mathbf{R}^m$ 分别为第 $i$ 个智能体的状态和控制输入.

本文的目标为设计合适的 $u_i(t)$ 使得所有智能体的状态 $x_i$ 能够在固定/预定时间内以分布式的方式协同收敛至下述一致约束优化问题的全局最优解:

$$\begin{aligned} \min H(x) &= \sum_{i=1}^N H_i(x_i); \\ \text{s.t. } x_i(t) &= x_j(t). \end{aligned} \tag{2}$$

其中:  $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T \in \mathbf{R}^{Nm}; i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j; H_i(x_i)$ 为智能体 $\nu_i$ 对应的局部目标函数;  $H(x)$ 为系统的全局目标函数.

**假设 2** 智能体 $\nu_i$ 的局部目标函数 $H_i(x_i)$ 二次连续可微,  $\theta_i$ 强凸, 且满足 $\nabla^2 H_i(x_i) \leq M_i I_m (M_i > 0)$ .

**注 2** 若函数 $H_i(x_i)$ 满足假设 2 中的条件, 则 $H(x)$ 是 $\psi$ 强凸的, 其中 $\psi \geq \sum_{i=1}^N \theta_i$ . 对于强凸函数 $H(x)$ , 存在唯一的 $x^*$ 使得 $\nabla H(x^*) = 0$ , 即优化问题

(2) 有唯一解.

**假设 3** 智能体  $\nu_i$  可获得  $M$  的值, 其中  $M = \max_{i \in \nu} \{M_i\}$ .

### 2 分布式固定时间最优一致算法

ZGS 框架的一个基本要求是局部目标函数的梯度初始和为 0, 此条件一般通过设置系统初始状态为局部最优解来实现. 为了消除这一限制, 本节将首先设计算法, 使得系统的任意初始状态能够在固定时间内收敛至局部最优解. 在此基础上, 基于 ZGS 框架设计算法使得系统在固定时间内收敛至全局最优解.

#### 2.1 寻找局部最优解

为了使得各智能体的状态在固定时间内收敛至局部目标函数的最优解, 设计系统 (1) 中的控制输入  $u_i$  为

$$u_i(t) = -\gamma[\nabla^2 H_i(x_i)]^{-1} \mathcal{W}^{\|\nabla H_i(x_i)\|^{2q}} \|\nabla H_i(x_i)\|^{1-2q}. \quad (3)$$

其中: 控制增益  $\gamma > 0$ , 参数  $\mathcal{W} > 1$ ,  $0 < q < 1/2$ .

**定理 1** 若假设 2 成立, 则利用算法 (3), 系统 (1) 中各智能体的状态可在固定时间  $T_1$  内收敛至各自的局部最优解, 其中  $T_1 = 1/(2\gamma q \ln \mathcal{W})$ .

**证明** 根据算法 (3), 系统 (1) 可重写为

$$\dot{x}_i(t) = -\gamma[\nabla^2 H_i(x_i)]^{-1} \mathcal{W}^{\|\nabla H_i(x_i)\|^{2q}} \|\nabla H_i(x_i)\|^{1-2q}.$$

对于智能体  $\nu_i$ , 考虑 Lyapunov 函数  $\mathcal{V}_1^i = \|\nabla H_i(x_i)\|^2$ , 当且仅当  $\nabla H_i(x_i) = 0$  时, 有  $\mathcal{V}_1^i = 0$ . 对  $\mathcal{V}_1^i$  求导, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1^i &= 2\nabla H_i^T(x_i) \nabla^2 H_i(x_i) \dot{x}_i = \\ &= -2\gamma \frac{\mathcal{W}^{\|\nabla H_i(x_i)\|^{2q}}}{\|\nabla H_i(x_i)\|^{2q}} \nabla H_i^T(x_i) \nabla H_i(x_i) = \\ &= -b\mathcal{W}^{a\mathcal{V}_1^i} \mathcal{V}_1^{1-q}. \end{aligned}$$

其中:  $a = 1, b = 2\gamma$ .

由引理 4 可知, 当  $t \geq T_1 = 1/(2\gamma q \ln \mathcal{W})$  时, 有  $\mathcal{V}_1^i = 0$ , 即当  $t \geq T_1$  时, 有  $\nabla H_i(x_i) = 0$ .

由假设 2, 有唯一的  $x_i^*$  使得

$$H_i(x_i^*) = \arg \min H_i(x_i),$$

且  $\nabla H_i(x_i^*) = 0$ . 因此, 当  $t \geq T_1$  时, 有  $x_i = x_i^*$ , 其中  $x_i^*$  为局部目标函数  $H_i(x_i)$  的极小值点.

另一方面, 算法 (3) 的设计与系统的通信拓扑无关. 在算法 (3) 下, 智能体间无需信息交换便使得状态  $x_i$  在固定时间内收敛至局部最优状态  $x_i^*$ . 综上, 利用算法 (3), 智能体的状态  $x_i$  可在固定时间  $T_1 =$

$1/(2\gamma q \ln \mathcal{W})$  内收敛至局部最优状态  $x_i^*$ .  $\square$

#### 2.2 寻找全局最优解

当  $t \geq T_1$  时, 系统 (1) 可重写为如下形式:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad x_i(T_1) = x_i^*. \quad (4)$$

为了使得智能体状态在固定时间内收敛至全局目标函数的最优解  $x^*$ , 设计  $u_i$  为

$$u_i(t) = -\gamma[\nabla^2 H_i(x_i)]^{-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathcal{W}^{(a_{ij}^{\omega(t)})^q \|x_i - x_j\|^2} \times (a_{ij}^{\omega(t)})^{1-q} \|x_i - x_j\|^{1-2q}. \quad (5)$$

其中:  $a_{ij}^{\omega(t)}$  为图  $\mathcal{G}_{\omega(t)}$  对应的邻接矩阵中的元素, 其他参数取值与算法 (3) 相同.

由假设 2 可知

$$\sum_{i=1}^N \nabla H_i(x(T_1)) = \sum_{i=1}^N \nabla H_i(x_i^*) = 0.$$

对  $\sum_{i=1}^N \nabla H_i(x_i(t))$  求导, 可得到

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \nabla H_i(x_i(t)) = \sum_{i=1}^N \nabla^2 H_i(x_i) \dot{x}_i = 0.$$

这意味着当  $t \geq T_1$  时,  $\sum_{i=1}^N \nabla H_i(x_i) = C_m$ , 其中  $C_m$  为常向量. 进一步地, 当  $t \geq T_1$  时,  $\sum_{i=1}^N \nabla H_i(x_i(T_1)) \equiv 0_m$ , 即算法 (5) 满足 ZGS 算法的初始条件.

**定理 2** 若假设 1 和假设 2 成立, 则利用算法 (5), 系统 (4) 中所有智能体的状态  $x_i$  可在固定时间  $T_2$  内从局部最优解  $x_i^*$  收敛至全局最优解  $x^*$ , 其中  $T_2 = M/[\gamma q \lambda_2^{\min}(L_{\mathcal{G}(t)}) \ln \mathcal{W}]$ .

**证明** 基于控制 (5), 闭环系统 (4) 可重写为

$$\dot{x}_i(t) = -\gamma[\nabla^2 H_i(x_i)]^{-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}^{\omega(t)} (x_i - x_j) \times [\mathcal{W}^{(a_{ij}^{\omega(t)})^q \|x_i - x_j\|^2} / [(a_{ij}^{\omega(t)})^q \|x_i - x_j\|^2]^q].$$

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$\mathcal{V}(x) = \sum_{i=1}^n H_i(x^*) - H_i(x_i) - \nabla H_i^T(x_i)(x^* - x_i),$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ . 由假设 2 可知

$$\mathcal{V}(x) \geq \sum_{i=1}^N \frac{\theta_i}{2} \|x_i - x^*\|^2.$$

因此, 函数  $\mathcal{V}(x)$  半正定且径向无界. 此外, 当且仅当  $x_i = x^*$  时 (即所有智能体的状态均收敛至全局最优解处), 有  $\mathcal{V}(x) = 0$ . 对  $\mathcal{V}(x)$  求导, 可得到

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \sum_{i=1}^N (x_i - x^*)^T \nabla^2 H_i(x_i) \dot{x}_i =$$

$$-\gamma \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i - x^*)^T a_{ij}^{\omega(t)} (x_i - x_j) \times [\mathcal{W}^{(a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2)^q}] / [(a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2)^q]. \quad (6)$$

交换*i*、*j*, 可得到

$$\dot{V}(x) = -\gamma \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x^* - x_j)^T a_{ij}^{\omega(t)} (x_i - x_j) \times [\mathcal{W}^{(a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2)^q}] / [(a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2)^q]. \quad (7)$$

结合式(6)和(7)可知

$$\dot{V}(x) = \frac{\gamma}{2} \frac{N^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2)^{1-q} \times \mathcal{W}^{(a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2)^q}.$$

利用引理2和引理3, 进一步可得到

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\frac{\gamma}{2} N^2 \left( \mathcal{W}^{(\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2)^q} \times \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2 \right)^{1-q}. \quad (8)$$

由于  $\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|^2 = 2x^T (L_{G_{\omega(t)}} \otimes I_m)x$ ,

由式(8), 可得到

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\frac{\gamma}{2} N^2 \mathcal{W}^{(\frac{2}{N^2} x^T (L_{G_{\omega(t)}} \otimes I_m)x)^q} \times \left( \frac{2}{N^2} x^T (L_{G_{\omega(t)}} \otimes I_m)x \right)^{1-q}. \quad (9)$$

令  $\tilde{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t)$ , 可知  $H(\tilde{x}(t)) \geq H(x^*)$ ,

其中  $x^*$  为全局目标函数  $H(x)$  的唯一最小解. 结合

$$\sum_{i=1}^N \nabla H_i(x_i) \equiv 0, \text{ 有}$$

$$\sum_{i=1}^N [H_i(\tilde{x}) - H_i(x_i) - \nabla H_i^T(x_i)(\tilde{x} - x_i)] - \mathcal{V}(x) =$$

$$H(\tilde{x}) - H(x^*) - (\tilde{x} - x^*) \sum_{i=1}^N \nabla H_i(x_i) =$$

$$H(\tilde{x}) - H(x^*) > 0.$$

由假设1和假设2, 可得到

$$\mathcal{V}(x) \leq \sum_{i=1}^N H_i(\tilde{x}) - H_i(x_i) - \nabla H_i^T(x_i)(\tilde{x} - x_i) \leq \frac{M}{2} \sum_{i=1}^N \|x_i - \tilde{x}\|^2,$$

其中  $\|x_i - \tilde{x}\|^2 = \left\| x_i(t) - \sum_{j=1}^N x_j / N \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^N x_i - x_j \right\|^2 / N^2 \leq \sum_{j=1}^N \|x_i - x_j\|^2 / N$ .

$$\text{由 } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 = 2x^T (L_{G(t)} \otimes I_m)x$$

和文献[16]中的引理3, 可得到

$$\mathcal{V}(x(t)) \leq \frac{M}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|x_i - x_j(t)\|^2 = \frac{M}{N} x^T (L_{G} \otimes I_m)x \leq \frac{M}{\lambda_2(L_{G(t)})} x^T (L_{G(t)} \otimes I_m)x. \quad (10)$$

将式(10)代入(9), 可得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -\frac{\gamma}{2} N^2 \mathcal{W}^{(\frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2(L_{G(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t)))^q} \times \\ &\left( \frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2(L_{G(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t)) \right)^{1-q} \leq \\ &-\frac{\gamma}{2} N^2 \mathcal{W}^{(\frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2^{\min}(L_{G(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t)))^q} \times \\ &\left( \frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2^{\min}(L_{G(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t)) \right)^{1-q} = \\ &-b \mathcal{W}^{a \mathcal{V}^q(x(t))} \mathcal{V}^{1-q}(x(t)). \end{aligned}$$

其中:  $L_{G(t)}$  为时变通信拓扑图对应的拉普拉斯矩阵,  $\lambda_2^{\min}(L_{G(t)}) = \min\{\lambda_2(L_{G(t)})\}$ ,  $a = 2^q (\lambda_2^{\min}(L_{G(t)}))^q / (N^{2q} M^q)$ ,  $b = 2^{-q} \gamma (\lambda_2^{\min}(L_{G(t)}))^{1-q} / (N^{-2q} M^{1-q})$ .

由引理4, 当  $t \geq T_2$  时, 有  $x^* \equiv x^*$ , 其中  $T_2 = M / [\gamma q \lambda_2^{\min}(L_{G(t)}) \ln \mathcal{W}]$ . 结合定理3可知, 利用算法(3)和(5), 智能体的任意初始状态均可在固定时间  $T = T_1 + T_2$  内收敛至全局最优状态  $x^*$ .  $\square$

**注3** 在有限时间分布式优化一致控制中, 系统实现最优一致的时间估计与初始状态有关, 然而, 一些现实系统的初始状态难以获得. 本文对于时间  $T$  的估计与系统的初始状态无关, 所设计算法(3)和(5)可用于处理初始状态无法获得的系统. 此外,  $T$  的值可通过控制器参数  $\gamma$ 、 $\mathcal{W}$  和  $q$  在物理设备允许的范围内调整, 参数越大, 时间越短. 在实际应用中, 往往需要在期望的时间内完成控制目标, 而通过上述调整参数的方法过于繁琐. 第3节将通过预先给定的时间直接精确设置控制器参数, 使得系统状态能够在预定时间内收敛至全局最优解.

**注4** 在文献[25]中, 智能体的状态可在固定时间内实现一致, 但是只能在时间趋于无穷大时收敛至全局最优解; 文献[7, 12, 20]中的算法要求系统初始状态在其局部最优解处; 文献[15-16]设计的算法虽然避免了对初始状态的限制, 但是其收敛时间的估计式所含参数较多, 且参数间关联程度复杂, 可能会耗费较多的计算成本. 所设计两阶段控制算法(3)和(5)对系统的初始状态不做限制, 智能体的状态可在固定时间内到达优化问题的解, 且算法(3)和

(5) 的收敛时间估计只涉及  $\gamma$ 、 $\mathcal{W}$  和  $q$  三个控制器参数, 时间  $T$  的估算式复杂度相对较低.

### 3 分布式预定时间最优一致算法

本节将基于所提出算法 (3) 和 (5) 设计两阶段分布式预定时间优化算法, 以实现切换拓扑下多智能体系统的预定时间最优一致性.

#### 3.1 寻找局部最优解

为了使得系统 (1) 中智能体的状态在预定时间  $\delta T_p$  内收敛至局部最优解, 设计智能体  $\nu_i$  的控制输入  $u_i$  为

$$u_i(t) = -\tilde{\gamma}[\nabla^2 H_i(x_i)]^{-1} \mathcal{W}^{\|\nabla H_i(x_i)\|^{2q}} \|\nabla H_i(x_i)\|^{1-2q}. \quad (11)$$

其中: 控制增益  $\tilde{\gamma} = 1/(2q\delta T_p \ln \mathcal{W})$ , 参数  $\mathcal{W} > 1$ ,  $0 < q < 1/2$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $T_p$  为任意设定的时间.

**定理 3** 在假设 1 下, 利用算法 (11), 系统 (1) 中各智能体的状态可在预定时间  $\delta T_p$  内收敛至各自的局部最优解.

**证明** 对于智能体  $\nu_i$ , 同样考虑 Lyapunov 函数  $\mathcal{V}_1^i = \|\nabla H_i(x_i)\|^2$ . 基于算法 (11), 对其求导, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1^i &= 2\nabla H_i^T(x_i) \nabla^2 H_i(x_i) \dot{x}_i = \\ &= -2\tilde{\gamma} \frac{\mathcal{W}^{\|\nabla H_i(x_i)\|^{2q}}}{\|\nabla H_i(x_i)\|^{2q}} \nabla H_i^T(x_i) \nabla H_i(x_i) = \\ &= -\frac{1}{q\delta T_p \ln \mathcal{W}} \mathcal{W}^{\nu_i^{1-q}} \mathcal{V}_1^{i-1-q}. \end{aligned}$$

根据引理 5, 在预定时间  $\delta T_p$  内有  $\nabla H_i(x_i) = 0$ . 由极值点的唯一性可知  $x_i = x_i^*$ . 同样地, 算法 (11) 的设计与多智能体系统的通信拓扑无关. 智能体仅需自己的信息便可在算法 (11) 下使得状态  $x_i$  在预定时间内收敛至局部最优解  $x_i^*$ .

综上, 在切换拓扑下, 利用算法 (11), 智能体  $\nu_i$  的状态  $x_i$  能够在预定时间  $\delta T_p$  内收敛至其局部最优解  $x_i^*$ .  $\square$

#### 3.2 寻找全局最优解

当  $t > \delta T_p$  时, 系统 (1) 可重写为如下形式:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad x_i(\delta T_p) = x_i^*. \quad (12)$$

为了使得智能体状态在预定时间  $(1 - \delta)T_p$  内从局部最优解  $x_i^*$  收敛至全局最优解  $x^*$ , 设计控制输入  $u_i$  为

$$u_i(t) = -\tilde{\gamma}[\nabla^2 H_i(x_i)]^{-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathcal{W}^{(a_{ij}^{\omega(t)} \|x_i - x_j\|)^q} \times (a_{ij}^{\omega(t)})^{1-q} \|x_i - x_j\|^{1-2q}. \quad (13)$$

其中: 控制增益  $\tilde{\gamma} = M/[\lambda_2^{\min}(L_{\mathcal{G}(t)})q(1 - \delta)T_p \ln \mathcal{W}]$ , 参数  $\mathcal{W}$ 、 $q$  和  $a_{ij}^{\omega(t)}$  的选取和含义与算法 (11) 相同.

**定理 4** 若假设 1 ~ 假设 3 成立, 则系统 (12) 中智能体的状态  $x_i$  在算法 (13) 的作用下可在预定时间  $(1 - \delta)T_p$  内从局部最优解  $x_i^*$  收敛至全局最优解  $x^*$ .

**证明** 在任意时刻  $t$ , 多智能体系统对应的通信拓扑图  $\mathcal{G}(t) \in \tilde{\mathcal{G}}$ , 考虑 Lyapunov 函数为

$$\mathcal{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^n H_i(x^*) - H_i(x_i) - \nabla H_i^T(x_i)(x^* - x_i).$$

根据定理 2 的证明过程, 对其求导, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(x(t)) &\leq \\ &= -\frac{\tilde{\gamma}}{2} N^2 \mathcal{W}^{(\frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2(L_{\mathcal{G}(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t)))^q} \times \\ &\quad \left(\frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2(L_{\mathcal{G}(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t))\right)^{1-q} \leq \\ &= -\frac{\tilde{\gamma}}{2} N^2 \mathcal{W}^{(\frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2^{\min}(L_{\mathcal{G}(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t)))^q} \times \\ &\quad \left(\frac{2}{N^2} \frac{\lambda_2^{\min}(L_{\mathcal{G}(t)})}{M} \mathcal{V}(x(t))\right)^{1-q} = \\ &= -\frac{1}{aq(1 - \delta)T_p \ln \mathcal{W}} \mathcal{W}^{a\mathcal{V}^q(x(t))} \mathcal{V}^{1-q}(x(t)), \end{aligned}$$

其中  $a = 2^q(\lambda_2^{\min}(L_{\mathcal{G}(t)}))^q N^{-2q} M^{-q}$ . 根据引理 5, 利用算法 (13) 可在预定时间  $(1 - \delta)T_p$  内实现  $x_i^* \rightarrow x^*$ . 结合定理 3 可知, 利用算法 (11) 和 (13), 切换拓扑下智能体的任意初始状态均可在预定时间  $T_p$  内收敛至全局最优解  $x^*$ .  $\square$

**注 5** 在现有的固定/预定时间优化算法中<sup>[15, 17, 20]</sup>, 符号函数  $\text{sign}(\cdot)$  为系统实现最优一致发挥了重要作用, 但是其在实际应用中可能会产生抖振现象. 而所提出算法的设计避免了符号函数的使用, 可在一定程度上缓解某些系统的抖振现象. 此外, 与文献 [26] 相比, 智能体间不需要交换彼此的 Hessian 矩阵信息, 这在一定程度上减少了信息传输.

### 4 仿真实例

考虑由 4 个麦克纳姆轮无人车 (UGV) 组成的多智能体系统对未知静态声源的协同搜索问题, 其通信拓扑如图 1 所示. 第  $i$  个 UGV 动力学模型描述为

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Cu_i(t). \quad (14)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, 4$ ;  $x_i(t)$  和  $u_i(t)$  分别为 UGV  $i$  的位置和控制输入; 矩阵  $A = 0_{4 \times 4}$ ,  $C = I_{4 \times 4}$ .

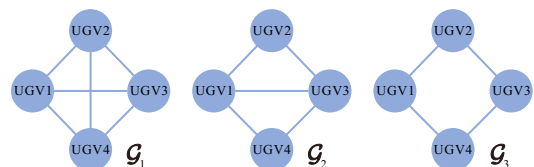


图1 通信拓扑

定义通信拓扑切换信号 $\omega(t)$ 为

$$\omega(t) = \begin{cases} 1, & s \leq t < s + 0.1; \\ 2, & s + 0.1 \leq t < s + 0.2; \\ 3, & s + 0.2 \leq t < s + 1. \end{cases} \quad (15)$$

其中 $s=0, 1, \dots$ , 其图像如图2所示. 由拓扑图 $\mathcal{G}_1$ 、 $\mathcal{G}_2$ 、 $\mathcal{G}_3$ 对应的拉普拉斯矩阵可得到 $\lambda_2^{\min}(L_{\mathcal{G}(t)}) = \min\{4, 2, 2\} = 2$ .

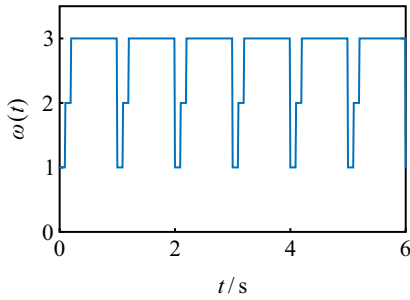


图2 切换信号 $\omega(t) \in \{1, 2, 3\}$

基于图2所示的切换拓扑, 本例的目标为利用所设计算法和未知声源周围的参考锚点位置 $R_i$ , 使得无人车在固定/预定时间内协同定位未知声源的位置. 定义矩阵 $B = [b_{ij}] \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ , 若UGV $i$ 可获得锚点 $j$ 的位置信息, 则 $b_{ij} = 1$ ; 否则 $b_{ij} = 0$ . UGV $i$ 对应的局部目标函数 $H_i(x_i) = \sum_{j=1}^4 b_{ij} \|x_i - R_j\|^2$ , 其表明每个无人车均试图更接近各自的参考锚点. 可知全局目标函数 $H(x) = \sum_{i=1}^4 H_i(x_i)$ 强凸, 且满足 $\nabla^2 H(x) \leq 2I_4$ . 该源定位问题的实质为通过最小化到参考锚点距离的平方和来寻找一个交汇点作为未知源定位的估计. 取锚点的位置为 $R_1 = (3.2, 4.2)^T$ ,  $R_2 = (1, 2)^T$ ,  $R_3 = (-1, 2.4)^T$ ,  $R_4 = (-0.5, 5)^T$ , 则估计的未知声源位置 $x^* = (0.675, 3.4)^T$ , 各无人车和对应参考锚点的最小距离平方和 $H(x^*) = 16.83$ .

首先进行分布式固定时间未知声源定位仿真研究. 取 $\gamma = 2$ ,  $q = 0.4$ ,  $\mathcal{W} = e$  (自然常数), 根据定理1和定理2, 各无人车可先在 $T_1 = 0.625$ 内到达参考锚点 $R_i$ , 然后在 $T_2 = 1.25$ 内从 $R_i$ 处到达全局最优解 $x^*$ , 即在固定时间 $T = 1.875$ 内各无人车可定位出未知声源的位置. 图3为3组具有不同初始状态的无人车位置随时间变化情况. 由图3可知, 具有任意初始状态的无人车在所提出算法作用下, 可在固定时间 $T$ 内定位未知静态声源的位置.

图4~图7分别为无人车在文献[20]和文献[15]中的算法与所提出算法作用下位置变化情况对比. 由图4可见, 对于任意选取的初始状态 $x_1(0) = (3, 5)^T$ ,  $x_2(0) = (2, 1.8)^T$ ,  $x_3(0) = (-2, 1)^T$ ,  $x_4(0) = (1, 4)^T$ ,

无人车在文献[20]算法作用下无法收敛至全局最优解, 而所提出算法可使得无人车收敛至全局最优解. 由图5可见, 相较于文献[15]的算法, 所提出算法对于收敛时间估计更准确, 且收敛性更快. 由图6和图7可见, 与文献[15]中的算法相比, 所提出算法能够在一定程度上缓解抖振现象.

图8为相同初始状态下分别取不同的参数 $\gamma$ 、 $q$ 、 $\mathcal{W}$ 时,  $\sum_{i=1}^4 H_i(x_i) - H(x^*)$ 的变化曲线. 结合表1可知, 不同参数下的优化误差均可在固定时间内收敛至0. 此外, 调整参数 $\gamma$ 、 $q$ 、 $\mathcal{W}$ 的值可以改变声源定位的时间,  $\gamma$ 、 $q$ 和 $\mathcal{W}$ 的值越大, 时间越小.

接下来进行分布式预定时间未知声源定位仿真

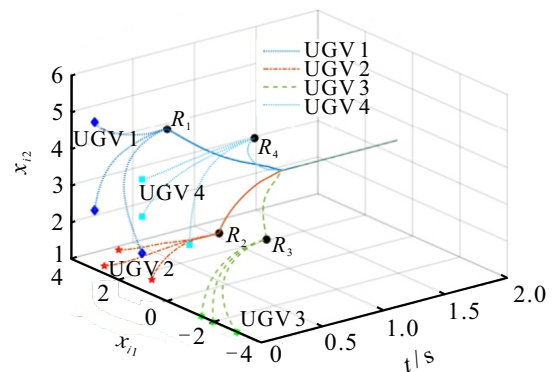


图3 具有不同初始状态的无人车位置随时间变化情况

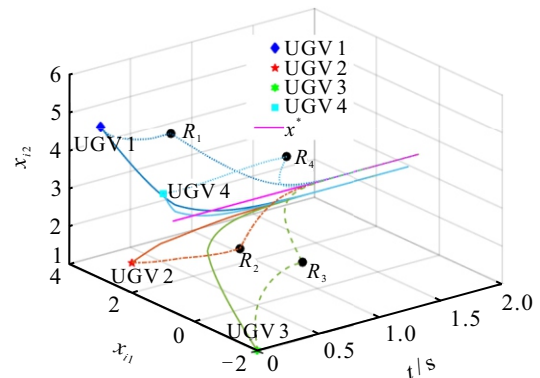


图4 文献[20]算法(实线)与本文算法(虚线)下无人车位置随时间变化情况

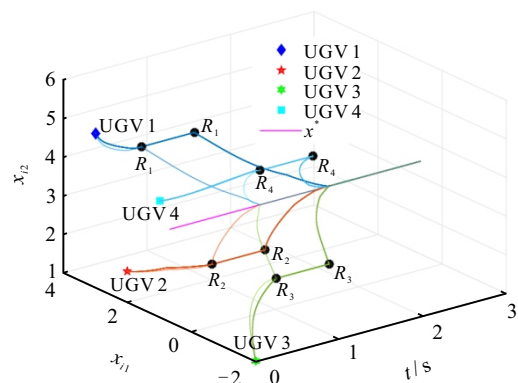


图5 文献[15]算法(实线)与本文算法(虚线)下无人车位置随时间变化情况

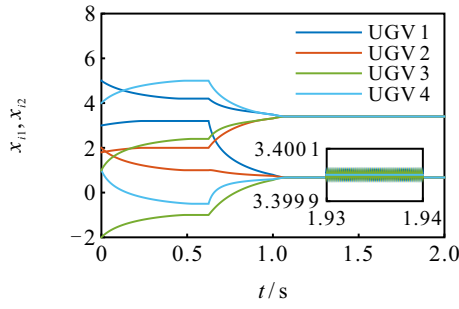


图6 本文算法抖振情况

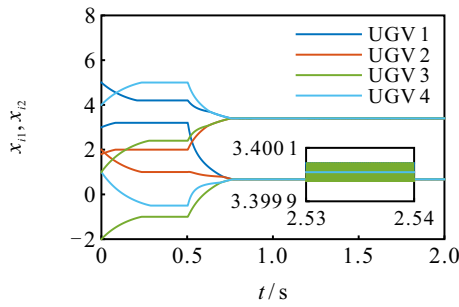


图7 文献 [15] 算法抖振情况

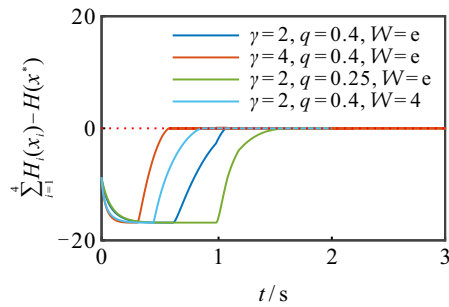


图8 算法 (3) 和 (5) 下优化误差随时间变化情况

表1 不同参数下  $T_1, T_2, T$  的值

|       | $\gamma = 2$<br>$q = 0.4$<br>$W = e$ | $\gamma = 4$<br>$q = 0.4$<br>$W = e$ | $\gamma = 2$<br>$q = 0.25$<br>$W = e$ | $\gamma = 2$<br>$q = 0.4$<br>$W = 4$ |
|-------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| $T_1$ | 0.625                                | 0.313                                | 1                                     | 0.451                                |
| $T_2$ | 1.25                                 | 0.625                                | 2                                     | 0.902                                |
| $T$   | 1.875                                | 0.938                                | 3                                     | 1.353                                |

研究. 选取  $T_p = 1, \delta = 0.5, q = 0.4, W = e$ , 计算可得到  $\bar{\gamma} = 2.5, \tilde{\gamma} = 5$ . 根据定理 3 和定理 4, 各无人车在算法 (11) 和 (13) 作用下可先在预定时间  $\delta T_p = 0.5$  内到达参考锚点  $R_i$ , 最终在预定时间  $T_p = 1$  内到达全局最优解  $x^*$ , 其位置变化曲线如图 9 中虚线所示. 图 9 中: 实线表示无人车在文献 [16] 中算法下的位置变化情况, 可以看出该算法在切换拓扑情况下不能使得无人车位置状态在预定时间  $T_p = 1$  内收敛至全局最优解.

图 10 为相同初始状态下分别取不同参数  $q$  和  $W$  时, 全局目标函数优化误差  $\sum_{i=1}^4 H_i(x_i) - H(x^*)$  随时间变化情况. 根据算法 (11) 和 (13) 的设计, 调整参数  $q$  和  $W$  的值, 参数  $\bar{\gamma}, \tilde{\gamma}$  的值也随之变化, 寻源

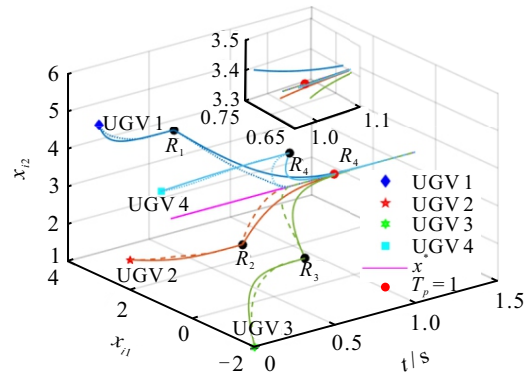


图9 文献 [16] 算法 (实线) 与本文算法 (虚线) 下无人车位置随时间变化情况

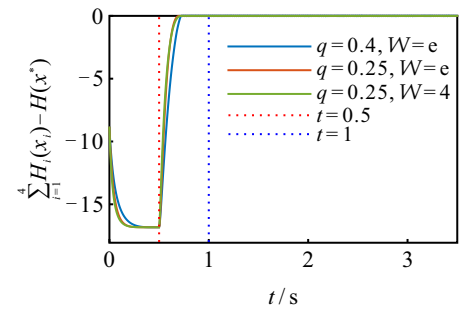


图10 算法 (11) 和 (13) 下优化误差随时间变化情况

问题的优化误差均可在预定时间  $T_p$  内收敛至 0.

### 5 结论

本文研究了切换拓扑下多智能体系统分布式固定/预定时间优化问题. 利用代数图论、ZGS 算法和基于指数函数的固定/预定时间稳定性定理, 分别设计了两阶段分布式固定时间和预定时间优化一致算法. 所提出算法可使得智能体状态先收敛至局部目标函数的最优解, 再收敛至全局目标函数的唯一最优解. 其设计不依赖符号函数, 且所需参数较少, 对收敛时间的估计更简洁. 最后, 以未知静态声源定位问题为例验证了理论结果的有效性. 未来将继续研究通信拓扑联合联通下多智能体系统的分布式优化问题.

### 参考文献 (References)

- [1] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48-61.
- [2] 郭戈, 康健. 具有复杂动力学的多智能体系统分布式优化综述[J]. *控制与决策*, 2024, 39(7): 2113-2124. (Guo G, Kang J. A survey on distributed optimization for multiagent systems with complex dynamics[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(7): 2113-2124.)
- [3] Dall'Anese E, Zhu H, Giannakis G B. Distributed optimal power flow for smart microgrids[J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2013, 4(3): 1464-1475.
- [4] Gharesifard B, Cortés J. Distributed continuous-time convex optimization on weight-balanced digraphs[J].

- IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 781-786.
- [5] Lin P, Ren W, Song Y D. Distributed multi-agent optimization subject to nonidentical constraints and communication delays[J]. *Automatica*, 2016, 65: 120-131.
- [6] Pang Y P, Hu G Q. Gradient-free distributed optimization with exact convergence[J]. *Automatica*, 2022, 144: 110474.
- [7] Lu J, Tang C Y. Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: The continuous-time case[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(9): 2348-2354.
- [8] Zhao X Y, Gao W F, Xie J. Discrete-time zero-gradient-sum algorithm for distributed optimization over directed networks[C]. Proceedings of the 33rd Chinese Control and Decision Conference. Kunming, 2021: 2400-2404.
- [9] Chen W S, Ren W. Event-triggered zero-gradient-sum distributed consensus optimization over directed networks[J]. *Automatica*, 2016, 65: 90-97.
- [10] Yuan Y, He W L, Tian Y C, et al. Distributed discrete-time optimization over directed networks: A dynamic event-triggered algorithm[J]. *Information Sciences*, 2023, 642: 119168.
- [11] 杨菲阳, 于志永, 蒋海军, 等. 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1412-1419.  
(Yang F Y, Yu Z Y, Jiang H J, et al. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems via event-triggered intermittent communication[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1412-1419.)
- [12] Song Y F, Chen W S. Finite-time convergent distributed consensus optimisation over networks[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(11): 1314-1318.
- [13] Feng Z, Hu G Q, Cassandras C G. Finite-time distributed convex optimization for continuous-time multiagent systems with disturbance rejection[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2020, 7(2): 686-698.
- [14] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [15] Wang X Y, Wang G D, Li S H. A distributed fixed-time optimization algorithm for multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2020, 122: 109289.
- [16] Ma L L, Hu C, Yu J, et al. Distributed fixed/preassigned-time optimization based on piecewise power-law design[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(7): 4320-4333.
- [17] Song Y W, Cao J D, Rutkowski L. A fixed-time distributed optimization algorithm based on event-triggered strategy[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(3): 1154-1162.
- [18] 耿超, 武永宝, 孙佳, 等. 抗干扰的多智能体系统固定时间分布式优化算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(2): 527-535.  
(Geng C, Wu Y B, Sun J, et al. Fixed-time distributed optimization algorithm for multi-agent systems with disturbance resistance[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(2): 527-535.)
- [19] 杨涛, 常怡然, 张坤朋, 等. 基于预设时间收敛的分布式优化算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(8): 2364-2374.  
(Yang T, Chang Y R, Zhang K P, et al. Distributed optimization algorithms based on predefined-time convergence[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(8): 2364-2374.)
- [20] Wu Z Z, Li Z K, Yu J Z. Designing zero-gradient-sum protocols for finite-time distributed optimization problem[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(7): 4569-4577.
- [21] Guo G, Zhang R Y K, Zhou Z D. A local-minimization-free zero-gradient-sum algorithm for distributed optimization[J]. *Automatica*, 2023, 157: 111247.
- [22] Guo Z J, Chen G. Distributed zero-gradient-sum algorithm for convex optimization with time-varying communication delays and switching networks[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(16): 4900-4915.
- [23] Tan M C, Ren J W, Ye L, et al. Distributed convex optimization based on zero-gradient-sum algorithm under switching topology[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2023, 17(12): 1611-1624.
- [24] de Villeros P, Sanchez-Torres J D, Defoort M, et al. Predefined-time formation control for multiagent systems-based on distributed optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(12): 7980-7988.
- [25] Ning B D, Han Q L, Zuo Z Y. Distributed optimization for multiagent systems: An edge-based fixed-time consensus approach[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(1): 122-132.
- [26] Gong X, Cui Y K, Shen J, et al. Distributed optimization in prescribed-time: Theory and experiment[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(2): 564-576.

## 作者简介

李璐珂 (1999-), 女, 博士生, 主要研究方向为多智能体系统、分布式优化, E-mail: [lilukeabc@163.com](mailto:lilukeabc@163.com);

甘勤涛 (1981-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为多智能体系统、分布式协同控制, E-mail: [ganqintao@sina.com](mailto:ganqintao@sina.com);

孙海涛 (1981-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为兵器科学与技术、无人集群控制, E-mail: [sunhaitao81@sina.com](mailto:sunhaitao81@sina.com).