

# 控制与决策

Control and Decision

## 动态事件触发通信下分布式预定时间非光滑约束优化算法

郭志军, 曾令伟, 洪宝源, 黎倩, 李志勇

引用本文:

郭志军, 曾令伟, 洪宝源, 等. 动态事件触发通信下分布式预定时间非光滑约束优化算法[J]. 控制与决策, 2025, 40(6): 2031-2040.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.0973>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty  
控制与决策. 2021, 36(9): 2074-2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

#### 基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks  
控制与决策. 2021, 36(8): 1955-1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

#### 超启发式交叉熵算法求解模糊分布式流水线绿色调度问题

Hyper-heuristic cross-entropy algorithm for green distributed permutation flow-shop scheduling problem with fuzzy processing time  
控制与决策. 2021, 36(6): 1387-1396 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1681>

#### 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges  
控制与决策. 2021, 36(3): 599-608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

#### 基于互信息操作变量曲线参数化的间歇过程批内修正优化

Intra-batch correction optimization of batch process with manipulated variable trajectory parameterization based on mutual information  
控制与决策. 2021, 36(1): 234-240 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0825>

# 动态事件触发通信下分布式预定时间非光滑约束优化算法

郭志军<sup>1</sup>, 曾令伟<sup>1</sup>, 洪宝源<sup>1</sup>, 黎倩<sup>2,3†</sup>, 李志勇<sup>4</sup>

(1. 南昌大学 信息工程学院, 南昌 330031; 2. 南昌大学 先进制造学院, 南昌 330031;  
3. 智能机器人江西省重点实验室, 南昌 330031; 4. 西南交通大学 电气工程学院, 成都 611756)

**摘要:** 针对一类多智能体系统的非光滑约束优化问题, 通过构造合适的时变增益函数和动态事件触发通信机制, 提出一种结构简单的基于动态事件触发的分布式预定时间优化算法. 与现有分布式非光滑约束优化研究相比, 所提出的算法收敛性能更优, 收敛时间可由设计者提前给定且收敛时间上界与系统初始状态及控制参数无关; 通信效率更高, 避免了传统连续时间/周期通信带来的通信资源浪费问题; 算法结构更简单, 无需传统的分数幂反馈及额外的辅助变量. 综合运用预定时间收敛理论、惩罚函数法、代数图论及凸优化理论, 证明了系统决策变量在预定时间内收敛于最优解的可调邻域内, 且不存在 Zeno 现象. 仿真结果验证了所提出算法的优势及有效性.

**关键词:** 分布式约束优化; 非光滑函数; 微分投影算子; 事件触发通信; 预定义时间收敛

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.0973

**引用格式:** 郭志军, 曾令伟, 洪宝源, 等. 动态事件触发通信下分布式预定时间非光滑约束优化算法 [J]. 控制与决策, 2025, 40(6): 2031-2040.

## Distributed non-smooth constrained optimization: A predefined-time and dynamic event-triggered approach

GUO Zhi-jun<sup>1</sup>, ZENG Ling-wei<sup>1</sup>, HONG Bao-yuan<sup>1</sup>, LI Qian<sup>2,3†</sup>, LI Zhi-yong<sup>4</sup>

(1. School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China; 2. School of Advanced Manufacturing, Nanchang University, Nanchang 330031, China; 3. Jiangxi Key Laboratory of Intelligent Robot, Nanchang 330031, China; 4. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

**Abstract:** For a class of non-smooth constrained optimization problem, by constructing appropriate time-varying gain function and dynamic event-triggered communication mechanism, we propose a distributed predefined-time and dynamic event-triggered optimization algorithm. Compared with the existing distributed non-smooth optimization, the proposed algorithm mainly has the following three features: 1) Better convergence performance: the convergence time can be pre-set by the user in advance and the upper bound of the convergence time is independent of the initial conditions and the control parameters of the system; 2) Higher communication efficiency: avoiding the waste of communication resources in the traditional continuous time/period communication mechanisms; 3) Simpler algorithm structure: traditional fractional power feedback and additional auxiliary variables are not required. By leveraging the predefined-time convergence theory, penalty function method, algebraic graph theory and convex optimization theory, we prove that the decision variables of the system can converge to a tunable neighborhood of the optimal solution in a predefined-time. The Zeno phenomenon is excluded. The effectiveness of the algorithm is verified by simulations.

**Keywords:** distributed constrained optimization; nonsmooth function; differential projection operator; event-triggered communication; predefined-time convergence

## 0 引言

多智能体系统分布式协同优化控制由于具有良

好的可扩展性、鲁棒性等优势受到国内外学者的广泛关注<sup>[1-2]</sup>. 在分布式协同优化中, 每个智能体只知道

收稿日期: 2024-08-15; 录用日期: 2024-12-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62303206, 62163026); 江西自然科学基金项目 (20224BAB212019, 20224BAB212018, 20242BAB25086, 20242BAB25090); 重庆市自然科学基金项目 (CSTB2024NSCQ-MSX0255); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2682024CX006).

责任编辑: 左志强.

†通信作者. E-mail: qianli@ncu.edu.cn.

自身目标函数及约束信息,通过智能体间的局部信息交互,执行本地决策协议来解决全局优化问题.由于具有“去中心化”的特点<sup>[3]</sup>,分布式优化可以避免集中式优化的大部分问题,因此广泛应用于电网资源分配<sup>[4-6]</sup>、传感网络目标定位<sup>[7-8]</sup>、大规模机器学习<sup>[9-11]</sup>等领域.

在多智能体分布式优化算法设计中,收敛速率是评价算法性能优劣的重要指标之一.针对精确梯度信息不可用情况,基于近似梯度方法;文献[12]提出一种渐近收敛的分布式约束优化算法;文献[13]提出了一种基于时变衰减次梯度的分布式优化方法,用于求解时变通信网络下的集合约束问题;进一步,文献[14]设计了一种改进型比例-积分分布式优化算法,用于求解含集合及不等式约束的分布式优化问题.上述算法只能得到渐近/指数收敛结果.然而,在实际应用中(如电网资源调度)需要以更快的收敛速率求解最优解.为了提高优化算法的收敛速度,基于符号函数/加幂积分策略,研究人员提出了系列分布式有限时间优化算法,保证系统决策变量在有限时间内收敛于最优解<sup>[15-21]</sup>.上述有限时间优化工作主要分为两类:一类是收敛时间上界与系统初始状态有关<sup>[15-17]</sup>(有限时间收敛);另一类是收敛时间上界与系统初始状态无关<sup>[18-21]</sup>(固定时间收敛).然而,基于符号函数/加幂积分策略的分布式有限/固定时间优化方法存在以下两点局限:1) 算法结构相对复杂.由于采用了加幂积分方法,导致在算法实施过程中需要进行分数幂反馈,使得算法的收敛性分析较为复杂,不利于进一步解决非光滑的优化问题,也较难进一步融合事件触发通信方式.2) 收敛时间上界相对保守且不易调节.在基于符号函数/加幂积分策略的方法中,其收敛时间上界估计值往往是一个与系统参数有关的较为复杂的表达式,因此不利于用户进行直接调节,从而使得收敛时间上界估计值通常大于系统实际收敛时间.为了克服上述方法的局限性,借鉴于预定时间收敛理论,研究人员提出了基于时变增益函数的分布式预定时间优化方法<sup>[22-23]</sup>.在该方法中,通过将时变增益函数嵌入至传统的分布式优化方法中,实现整数幂状态反馈,降低了算法的结构复杂性,且该收敛时间上界与系统任何参数无关,并可由设计人员在算法运行前提前设定.然而,在上述工作中<sup>[15-23]</sup>,算法均要求智能体间进行实时通信,这大大增加了系统的通信负担,降低了通信效率.

另一方面,高效通信方式是设计分布式优化算法时必需考虑的一个重要因素.因此,为了减少智能体间的通信频率、提高通信效率,事件触发机制方法

被广泛应用于网络化控制系统中<sup>[24-25]</sup>.近年来,针对多智能体系统的分布式优化问题,许多学者提出了基于事件触发的分布式优化算法<sup>[26-29]</sup>.针对优化函数强凸且可微的情形,基于比例积分思想,文献[26]设计了一种分布式事件触发优化算法.对于优化函数二次可微的情形,文献[27]在零梯度和框架下设计了一种非连续通信的分布式优化控制算法.进一步,针对集合约束优化问题,基于状态投影信息方法,文献[28]提出了一种固定步长的分布式事件触发优化算法.为了更进一步节约通信资源,文献[29]通过在事件触发机制中设置额外的内部变量,设计了一种分布式动态事件触发优化算法.然而,上述基于事件触发的分布式优化工作只能实现渐近/指数收敛<sup>[26-29]</sup>,无法得到更快速的有限/固定/预定时间收敛结果,故而较难应用于对收敛时间要求较高的场合.

为了同时提高算法的收敛速度和通信效率,研究人员提出了系列基于事件触发的分布式有限时间优化算法<sup>[30-34]</sup>.虽然基于事件触发的分布式有限时间优化工作的研究已取得一定成果,但还存在一些问题需要进一步讨论.例如,在文献[30-32]中,只能实现有限/固定时间收敛,无法实现性能更优的预定时间收敛;在文献[33]中,所提出的算法需要与邻居智能体交换辅助变量,这在一定程度上增加了算法的计算量与通信量;另外,上述研究工作<sup>[30-34]</sup>只能适用于目标函数光滑的场合(特别的,文献[31]需要进一步假设目标函数满足一些特定的形式,文献[30, 32, 34]需要目标函数满足二次可微条件),这无疑大大降低了算法的适用范围.因此,针对非光滑的集合约束优化问题,设计同时具有快速收敛速率以及高通信效率的分布式优化算法,是亟待解决的一个问题.

在上述分析基础上,针对集合约束下的非光滑优化问题,本文综合利用时变增益函数、微分投影算子、次梯度信息以及惩罚函数法,提出一种新的基于动态事件触发的分布式预定时间优化算法.本文的主要工作概括如下:

1) 针对含有集合约束的非光滑优化问题,本文提出一种新的基于事件触发通信的分布式预定时间优化算法.与现有渐近/指数收敛研究工作不同<sup>[12-14, 26-29]</sup>,所提出算法保证系统决策变量在预定时间内收敛于最优解的可调邻域内并同时节约网络通信资源.与现有分布式有限时间优化工作不同(处理光滑优化问题)<sup>[30-34]</sup>,所考虑的非光滑优化目标函数更具一般性,难度更高,适用范围更广.

2) 本文提出的算法在结构上更简单.不同于传统分数幂反馈有限时间方法<sup>[15-21]</sup>,本文所提出的基于

时变增益函数的整数幂反馈预定时间方法, 可大大降低算法设计、收敛性分析的复杂性; 不同于传统基于辅助变量的方法<sup>[23,26]</sup>, 本文所提出方法不需要额外的辅助变量且无需交换梯度信息, 在一定程度上降低了算法的计算负担。

本文算法设计及分析的主要难点为: 针对梯度信息不可用及含有集合约束的非光滑优化问题, 在不额外增加辅助变量的前提下, 如何将时变增益函数、事件触发通信机制、惩罚函数及微分投影算子有机巧妙融合, 从而解决网络通信资源受限的非光滑约束优化的快速收敛问题。

### 1 预备知识与问题描述

**符号说明**  $R, R^n, R^{nm}$  分别表示实数集、 $n$  维列向量以及  $n$  行  $m$  列的实矩阵.  $1_n$  表示  $n$  维元素全为 1 的列向量. 符号  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|$  分别代表向量的一范数以及二范数.  $\text{int}(\Omega), \partial\Omega$  分别表示集合  $\Omega$  的内部空间以及集合  $\Omega$  的边界。

#### 1.1 图论

考虑一个包含  $N$  个智能体的无向通信网络  $G = (V, E)$ . 其中:  $V$  表示所有智能体构成的节点集合;  $E = \{(j, i), i, j \in V\} \subset V \times V$  表示智能体间所有边的集合且  $(j, i)$  表示智能体  $i$  可以接收到智能体  $j$  传输的信息; 令  $\mathcal{N}_i = \{j \in V | (j, i) \in E\}$  表示智能体  $i$  所有邻居的集合. 若图  $G$  中的任意两个节点  $i, j$  之间均有一条路径  $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j), i_i \in V$ , 则称图  $G$  是连通的。

#### 1.2 凸优化和微分投影算子

若对于  $f(x), \forall x, y \in R^n, \lambda \in [0, 1]$  有  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ , 则称函数  $f(x) : x \in R^n \rightarrow R$  为凸函数. 定义  $\nabla f(x)$  为函数  $f$  在  $x$  处的梯度, 若函数  $f$  满足  $(x - y)^T (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \geq \alpha \|x - y\|^2$ , 则称函数  $f$  为  $\alpha$ -强凸函数; 若函数  $f$  满足  $\|f(x) - f(y)\| \leq l \|x - y\|$ , 则称函数  $f$  为  $l$ -Lipschitz 连续. 当函数  $f(x)$  不可微时 (即  $f(x)$  非光滑), 如果函数  $g(x) : R^n \rightarrow R^n$  满足  $f(x) + g(x)^T (y - x) \leq f(y)$ , 则称  $g(x)$  为函数  $f$  在  $x$  处的次梯度, 即  $g(x) \in \partial f(x)$ . 对于一个闭凸集, 集合中元素  $x$  在集合上的投影定义为  $P_\Omega(x) = \arg \min_{y \in \Omega} \|x - y\|$ . 令  $T_\Omega(x), N_\Omega(x)$  分别为点  $x$  在集合  $\Omega$  上的切锥和法锥. 其中:  $T_\Omega(x) = \left\{ y : y = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - x}{z^k}, z^k \geq 0, z^k \rightarrow 0, x^k \in \Omega, x^k \rightarrow x \right\}$ ,  $N_\Omega(x) = \{y : y^T(z - x) \leq 0\}$ . 令  $n_\Omega(x) = \{y : \|y\| = 1, y^T(z - x), \forall z \in \Omega\}$ .

**引理 1**<sup>[33]</sup>  $x \in \text{int}(\Omega), y$  在集合  $\Omega$  切锥上的投

影  $P_{T_\Omega(x)}(y) = y$ ; 当  $x \in \partial\Omega, \max_{z \in n_\Omega(x)} z^T y \leq 0$  时, 有  $P_{T_\Omega(x)}(y) = y$ ; 当  $x \in \partial\Omega, \max_{z \in n_\Omega(x)} z^T y \geq 0$  时, 有  $P_{T_\Omega(x)}(y) = y - (y^T z^*) z^*$ , 其中  $z^* = \arg \max_{z \in n_\Omega(x)} y^T z$ .

#### 1.3 基于时变增益函数的预定义时间收敛

**引理 2**<sup>[33]</sup> 考虑微分动力学系统  $\dot{x} = -\sigma h(t)x(t), x(0) = x_0$ , 系统状态  $x(t)$  将在预定时间  $t_f$  收敛到  $x_0(\beta/(1 + \beta))^\sigma$ . 其中:  $\sigma$  为任意大于 0 的常数,  $t_f$  为用户提前设定的收敛时间.  $h(t) = \dot{\phi}(t)/(1 - \phi(t) + \beta), \beta \in (0, 1), \phi(t)$  为时变函数, 且满足如下条件:

- 1) 当  $t = 0$  时,  $\phi(t) = 0, \dot{\phi}(t) = 0$ ;
- 2) 当  $t \in (0, t_f)$  时,  $\phi(t) > 0, \dot{\phi}(t) > 0$ ;
- 3) 当  $t \geq t_f$  时,  $\phi(t) = 1, \dot{\phi}(t) = 0$ .

#### 1.4 问题描述

考虑由  $N$  个智能体组成的系统. 对于任意智能体  $i$ , 假设每个智能体都有一个决策变量  $x_i \in R^r$ , 一个局部非光滑成本函数  $f_i(x_i) : R^r \rightarrow R$  以及一个集合约束  $\Omega$ . 因此, 本文的优化目标为设计基于事件触发通信的分布式预定时间优化协议使得系统决策变量在预定时间内收敛于全局最优解  $x^*$  的可调领域内.  $x^*$  为如下优化问题的最优解:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \sum_{i=1}^N f_i(x_i); \\ \text{s.t. } x_i &\in \Omega, \forall i \in V. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $x = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T \in R^{Nr}$ . 进一步, 基于多智能体一致性理论, 优化问题 (1) 等价于

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N f_i(x_i); \\ \text{s.t. } x_i = x_j, x_i \in \Omega, \forall i, j \in V. \end{aligned} \quad (2)$$

为了解决上述问题, 需做如下假设。

**假设 1** 在本文所研究的多智能体分布式优化问题中, 智能体间的通信网络是无向连通的; 局部目标函数  $f_i(x_i)$  在凸集  $\Omega$  上是  $\alpha_i$ -强凸且  $l_i$ -Lipschitz 连续的。

**假设 2** 若  $x_i$  有界, 则  $f_i(x_i)$  在  $x_i$  处的次梯度  $\partial f_i(x_i)$  总是有界的, 即存在正常数  $M_i$ , 使得下式成立:

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_{i,1}} \right|, \dots, \left| \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_{i,r}} \right| \right\} \leq M_i.$$

**引理 3**<sup>[35]</sup> 若惩罚常数  $K$  满足  $K > \max\{Nl_i, i \in V\}$ . 其中  $N$  为智能体的个数,  $l_i$  为 Lipschitz 常数, 则上述全局优化问题 (2) 等价于如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \mathcal{L}(x) &= \sum_{i \in V} f_i(x_i) + \frac{K}{2} \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|x_i - x_j\|_1; \\ \text{s.t. } x_i &\in \Omega, i \in V. \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\frac{K}{2} \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|x_i - x_j\|_1$  为精确罚函数项。

综上, 本文需要解决的问题可进一步总结如下。

**问题 1** 针对非光滑的集合约束问题 (3), 设计事件触发通信机制下具有预定时间收敛性能的分布式优化算法, 使得智能体的状态  $x_i$  在预定义时间快速收敛于最优解的可调邻域内。

## 2 算法设计与收敛性分析

### 2.1 算法设计

针对问题 1, 基于次梯度、微分投影算子以及时变增益函数, 结合动态事件触发机制, 本文提出了一种动态事件触发通信下的分布式预定时间优化算法

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &\in \\ P_{T_\Omega(x_i(t))} &\left[ -\vartheta(t) \left( \partial f_i(x_i(t)) + \right. \right. \\ &\left. \left. K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right) \right], x_i(0) \in \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $\hat{x}_i(t) = x_i(t_k^i)$  表示智能体  $i$  在触发时刻  $t_k^i$  的决策变量,  $t_k^i$  表示智能体  $i$  的第  $k$  个触发时刻;  $\partial f_i(x_i(t))$  为目标函数在  $x_i$  处的次梯度;  $T_\Omega(x_i(t))$  表示  $x_i$  在集合  $\Omega$  上的切锥;  $P_{T_\Omega(x_i(t))}$  为集合  $\Omega$  在  $x_i(t)$  处切锥的投影; 常数  $K$  定义如引理 3 所示;  $\vartheta(t) = h(t) + 1$ ,  $h(t)$  定义如 1.3 节所示;  $\text{Sgn}(\ast) = [\text{sgn}_1(\ast), \dots, \text{sgn}_r(\ast)]^\top$ ,  $\text{sgn}(\ast)$  为符号函数, 有

$$\text{sgn}(\ast) = \begin{cases} \{1\}, & \ast > 0; \\ [-1, 1], & \ast = 0; \\ \{-1\}, & \ast < 0. \end{cases} \quad (5)$$

为减少智能体间的通信负担, 设计如下动态事件触发机制:

$$\begin{aligned} t_{k+1}^i &= \\ \inf \{t : t \geq t_k^i, \nu_i (\gamma_i \|e_i(t)\|_1 + \\ &K e_i^\top(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t))) > \zeta_i(t)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

其中: 参数  $\nu_i, \gamma_i$  为正常数;  $e_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$  表示测量误差;  $\zeta_i(t)$  是设计的内部动态变量, 且初始值  $\zeta_i(0) > 0$ , 具体有

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i(t) &= -\vartheta(t) \left\{ \eta_i \zeta_i(t) + \delta_i (\gamma_i \|e_i(t)\|_1 + \right. \\ &\left. K e_i^\top(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\eta_i, \delta_i$  为满足  $0 < \delta_i \leq 1, \eta_i > (1 - \delta_i)/\nu_i$  的正

常数。

**注 1** 由引理 3 可知, 问题 (3) 与原问题 (2) 是等价的, 因此本文主要对转换后的问题 (3) 进行算法设计. 在问题 (3) 中, 通过惩罚函数法将  $x_i = x_j$  这一全局耦合约束转换成目标函数的一部分. 在此基础上, 根据梯度下降法、投影算子、时变增益函数策略, 可设计分布式预定时间事件触发优化算法 (4). 值得注意的是, 算法 (4) 中的符号函数项是通过  $\|x_i - x_j\|_1$  求导得来的, 与传统的基于符号函数的有限时间/固定时间方法有本质区别. 由于符号函数的不连续性, 不可避免地会造成系统一定的振荡现象, 从而使得系统决策变量无法平滑地收敛到最优解. 在未来的研究工作中, 期望能设计出更加合理的惩罚函数从而避免在算法 (4) 中使用符号函数。

**注 2** 为了更清晰地阐述算法 (4) 的优势, 给出现有基于比例积分一致性的算法<sup>[23,26]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= k(t) \left[ -\alpha \nabla f_i(x_i(t)) - \beta \sum_{i=1}^N L_{ij} x_j(t) - q_i(t) \right], \\ \dot{q}_i(t) &= \alpha \beta k(t) \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j(t), \sum_{i=1}^N q_i(0) = \mathbf{0}_n. \end{aligned} \quad (8)$$

在上述算法中,  $-\nabla f_i(x_i)$  用来保证系统决策变量收敛于最优值,  $q_i(t)$  用来消除  $\nabla f_i(x_i)$  这一非零项对决策变量一致性造成的影响. 然而, 在本文提出的算法中, 由引理 3 可知, 惩罚常数  $K$  及  $\sum_{i \in \mathcal{N}_i} \|x_i - x_j\|_1$  可保证系统决策变量最终趋于一致, 因此无需额外的辅助变量, 这进一步降低了智能体的计算及通信负担。

### 2.2 收敛性分析

**引理 4** 如果假设 1 和假设 2 都满足, 则称分布式优化算法 (4) 的平衡点  $x^* = [(x_1^*)^\top, (x_2^*)^\top, \dots, (x_N^*)^\top]^\top$  是问题 (3) 的最优解, 当且仅当  $x_i^* \in \Omega, K > \max\{Nl_i\}$  以及下式成立:

$$\begin{aligned} 0_r \in P_{T_\Omega(x_i^*)} &\left\{ -\vartheta(t) \left( \partial f_i(x_i^*) + \right. \right. \\ &\left. \left. K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(x_i^* - x_j^*) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

**证明** 令  $\mathcal{A} = -\vartheta(t) \left( \partial f_i(x_i^*) + K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(x_i^* - x_j^*) \right)$ , 若式 (9) 成立, 则  $x_i^*$  至少满足如下一个条件: 1)  $x_i^* \in \text{int}(\Omega), 0_r \in \mathcal{A}$ ; 2)  $x_i^* \in \partial\Omega, 0_r \in \mathcal{A}$ ; 3)  $x_i^* \in \partial\Omega, \mathcal{A} \in \mathcal{N}_\Omega(x_i^*)$ . 结合 1) ~ 3) 可知, 当  $x_i^* \in \Omega$ , 下式成立:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{N}_\Omega(x_i^*), \quad (10)$$

其中  $\mathcal{N}_\Omega(x_i^*)$  为  $x_i^*$  点在  $\Omega$  上的法锥. 根据 KKT 优化条件<sup>[36]</sup> 可知,  $x^*$  是问题 (3) 的最优解当且仅当  $x_i^* \in \Omega$  以及下式成立:

$$0_r \in -\mathcal{A} + \mathcal{N}_\Omega(x_i^*). \quad (11)$$

显然, 式 (10) 与 (11) 等价. 因此, 分布式优化算法 (4) 的平衡点  $x^*$  是问题 (3) 的最优解. 进一步, 由引理 3 可知, 分布式优化算法 (4) 的平衡点是问题 (2) 的最优解, 此时有  $x_i^* = x_j^*, \forall i, j \in V$ .  $\square$

下面给出本文的主要结果.

**定理 1** 若假设 1 和假设 2 成立, 则各智能体在分布式算法 (4) 及事件触发机制 (6) 和 (7) 作用下, 系统决策变量  $x_i(t)$  在预定时间内收敛于最优解的一个可调邻域内, 即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_f} \|x_i(t) - x_i^*\| \leq \sqrt{2\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\rho V(0)}; \\ \|x_i(t) - x_i^*\| \leq \sqrt{2\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\rho V(0)}, \quad \forall t > t_f; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_i^*\| = 0. \end{cases} \quad (12)$$

其中:  $t_f$  为用户预先设定的收敛时间;  $\beta$  定义如 1.3 节所示;  $\rho = \min\{2\alpha, \gamma\}$ ,  $\alpha = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ ,  $\gamma = \min_{i \in V} \left\{ \eta_i + \frac{\delta_i - 1}{\nu_i} \right\}$ ;  $V(0)$  为候选李雅普诺夫函数  $V(t)$  的初始值.

**证明** 考虑如下候选李雅普诺夫函数:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t). \quad (13)$$

其中:  $V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} \|x_i(t) - x_i^*\|^2$ ,  $V_2(t) = \sum_{i \in V} \zeta_i(t)$ .

由触发条件 (6) 可知

$$\nu_i \left( \gamma_i \|e_i(t)\|_1 + K e_i^T(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right) \leq \zeta_i(t). \quad (14)$$

因此, 式 (7) 可改写为

$$\dot{\zeta}_i(t) \geq -\vartheta(t) \left( \eta_i \zeta_i(t) + \frac{\delta_i}{\nu_i} \zeta_i(t) \right). \quad (15)$$

由于  $\zeta_i(0) > 0$ , 可得如下结论:

$$\zeta_i(t) \geq \zeta_i(0) e^{-(\eta_i + \delta_i/\nu_i)t} > 0. \quad (16)$$

由式 (16) 可知,  $V_2 = \sum_{i \in V} \zeta_i(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ . 因此,  $V(t) = V_1(t) + V_2(t) \geq 0$  在  $t \geq 0$  时恒成立, 即  $V(t)$  是合理的候选李雅普诺夫函数.

令  $V_1(t)$  的李导数为  $L_{\mathcal{F}}V_1$ , 则对于任意  $\varphi \in L_{\mathcal{F}}V_1$ , 根据算法 (4) 以及  $V_1$  的定义可得

$$L_{\mathcal{F}}V_1 = \left\{ \varphi \in R : \varphi = \sum_{i=1}^N (x_i(t) - x_i^*)^T \dot{x}_i(t) \right\}. \quad (17)$$

由算法 (4) 以及切锥、法锥的定义可知

$$\Delta_1 - \dot{x}_i(t) \in \mathcal{N}_\Omega(x_i(t)), \quad (18)$$

其中

$$\Delta_1 \in -\vartheta(t) \left( \partial f_i(x_i(t)) + K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right).$$

进一步, 根据  $x_i(t)$  在集合  $\Omega$  上法锥的定义可知, 式 (18) 可改写成

$$(x_i(t) - x_i^*)^T (\Delta_1 - \dot{x}_i(t)) \geq 0. \quad (19)$$

根据假设 1 和假设 2 以及式 (17) 和 (19), 可知以下结论成立:

$$\begin{aligned} \varphi &\stackrel{(a)}{\leq} \sum_{i \in V} (x_i(t) - x_i^*)^T \Delta_1 \stackrel{(b)}{\leq} \\ &\quad - \alpha \vartheta(t) \sum_{i \in V} (x_i(t) - x_i^*)^T (x_i(t) - x_i^*) - \\ &\quad \vartheta(t) K \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i(t) - x_i^*)^T \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \stackrel{(c)}{\leq} \\ &\quad - \alpha \vartheta(t) \sum_{i \in V} \|x_i(t) - x_i^*\|^2 - \\ &\quad \frac{1}{2} \vartheta(t) K \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t))^T \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \\ &\quad \hat{x}_j(t)) + \vartheta(t) K \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} e_i^T(t) \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \stackrel{(d)}{\leq} \\ &\quad - 2\alpha \vartheta(t) V_1 + \vartheta(t) K \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} e_i^T(t) \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \\ &\quad \hat{x}_j(t)). \end{aligned} \quad (20)$$

其中: 联立等式 (17) 与不等式 (19) 可得不等式 (a) 成立; 由各智能体目标函数  $f_i(x_i(t))$ ,  $\forall i \in V$  的强凸性以及通信拓扑的无向连通性质可知不等式 (b) 成立; 由 Young 不等式可知不等式 (c) 成立; 最后, 由  $V_1(t)$  定义可知不等式 (d) 成立.

对  $V_2(t)$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \sum_{i \in V} \dot{\zeta}_i(t) = \\ &\quad - \sum_{i \in V} \left( \vartheta(t) \eta_i \zeta_i(t) + \vartheta(t) \delta_i \left( \gamma_i \|e_i(t)\|_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. K e_i^T(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

联立式 (20)、(21) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \\ &\quad - 2\alpha \vartheta(t) V_1(t) - \vartheta(t) \sum_{i \in V} \eta_i \zeta_i(t) - \end{aligned}$$

$$\vartheta(t)K \sum_{i \in V} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\delta_i - 1) e_i^T(t) \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) - \vartheta(t) \sum_{i \in V} \delta_i \gamma_i \|e_i(t)\|_1. \quad (22)$$

由事件触发条件 (6) 和 (7), 不等式 (22) 可进一步写成

$$\dot{V}(t) \leq -2\alpha\vartheta(t)V_1(t) - \gamma\vartheta(t)V_2(t) \leq -\vartheta(t)\rho V(t), \quad (23)$$

其中  $\rho = \min\{2\alpha, \gamma\}$ . 当  $t \in [0, t_f]$  时, 根据引理 2 及式 (23) 可知

$$V(t) \rightarrow \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\rho V(0), \quad \forall t \rightarrow t_f. \quad (24)$$

结合  $V(t)$  的定义可知

$$\|x_i(t) - x_i^*\| \rightarrow \sqrt{2\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\rho V(0)}, \quad \forall t \rightarrow t_f. \quad (25)$$

当  $t \in [t_f, \infty)$  时, 可知  $\vartheta(t) = 1$ , 此时有

$$\dot{V}(t) \leq -\rho V(t). \quad (26)$$

因此, 如下不等式恒成立:

$$V(t) \leq e^{-\rho(t-t_f)} V(t_f). \quad (27)$$

结合  $V(t)$  的定义, 式 (27) 可进一步写为

$$\|x_i(t) - x_i^*\| \leq \sqrt{2e^{-\rho(t-t_f)} V(t_f)}, \quad \forall t \geq t_f. \quad (28)$$

由式 (28) 可知, 当  $t \geq t_f$  时, 智能体决策变量  $x_i(t)$ ,  $\forall i \in V$  将以指数速率  $\rho$  收敛于最优解.  $\square$

**注 3** 对于每个智能体  $i$  而言, 通过增加额外的 Slater 条件, 可以将集合约束  $\Omega$  改成局部集合约束  $\Omega_i$ . 根据定理 1 的证明过程可知, 只需在算法设计和收敛性分析中将  $\Omega$  改成  $\Omega_i$  即可, 并不会给现有工作增加困难. 为了简便起见, 本文考虑集合约束  $\Omega$ .

**注 4** 由式 (25) 和 (28) 可知, 算法收敛速率与参数  $\rho$  有关. 根据  $\rho$  的定义可知, 当强凸参数  $\alpha$  较小时, 收敛速率主要由目标函数的参数决定. 当强凸参数  $\alpha$  较大时, 收敛速率主要由触发参数  $\gamma$  决定. 具体如下: 若  $\gamma < 2\alpha$ , 则通过增大  $\eta_i$  和  $\delta_i$ , 并减小  $\nu_i$  可适当提高算法收敛速率; 若  $\gamma \geq 2\alpha$ , 则各智能体决策变量  $x_i$  将以指数速率  $\rho = 2\alpha$  收敛于最优解.

**定理 2** 若假设 1 和假设 2 都满足, 则各智能体在分布式优化算法 (4) 及事件触发通信机制 (6) 和 (7) 下运行, 则系统不会发生 Zeno 现象.

**证明** 当智能体  $i$  在  $t = t_k^i$  时, 有  $e_i(t_k^i) = 0$ . 当  $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$  时, 根据  $e_i(t)$  的定义, 有

$$e_i(t) = -\int_{t_k^i}^t \dot{x}_i(t) dt. \quad (29)$$

由时变增益函数的定义可知  $\dot{\phi}(t)$  是有界的, 令

$\varepsilon = \max_i \{\dot{\phi}(t)\}$ , 可知  $\vartheta(t) \leq (\varepsilon + \beta)/\beta$ . 由假设 2 可知, 函数  $f_i(x_i(t))$  在  $x_i(t)$  处的次梯度  $\partial f_i(x_i(t))$  是有界的, 且有  $\left\{ \left| \frac{\partial f_i(x_i(t))}{\partial x_{i,1}(t)} \right|, \dots, \left| \frac{\partial f_i(x_i(t))}{\partial x_{i,r}(t)} \right| \right\} \leq M_i$ . 由符号函数的定义以及向量一范数的性质可知

$$K \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right\|_1 \leq rKN. \quad (30)$$

由  $P_{T_\Omega(x_i(t))}$  的定义, 结合式 (5) 可知

将式 (30) 代入 (29) 可得

$$\|e_i(t)\|_1 \leq (t - t_k^i) \frac{2r(\varepsilon + \beta)(M_i + KN)}{\beta}. \quad (31)$$

在触发时刻  $t = t_{k+1}^i$ , 由触发条件 (6) 可知

$$\gamma_i \|e_i(t_{k+1}^i)\|_1 + K e_i^T(t_{k+1}^i) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t_{k+1}^i) - \hat{x}_j(t_{k+1}^i)) > \frac{1}{\nu_i} \zeta_i(t_{k+1}^i). \quad (32)$$

由  $\text{Sgn}(\cdot)$  函数的定义, 有

$$\gamma_i \|e_i(t_{k+1}^i)\|_1 + K e_i^T(t_{k+1}^i) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Sgn}(\hat{x}_i(t_{k+1}^i) - \hat{x}_j(t_{k+1}^i)) \leq \|e_i(t_{k+1}^i)\|_1 (\gamma_i + rKN). \quad (33)$$

由不等式 (16) 可知

$$\zeta_i(t_{k+1}^i) \geq \zeta_i(0) e^{-(\eta_i + \delta_i/\nu_i)t_{k+1}^i}. \quad (34)$$

将式 (33)、(34) 代入 (32) 可得

$$\|e_i(t_{k+1}^i)\|_1 \geq \frac{\zeta_i(0) e^{-(\eta_i + \delta_i/\nu_i)t_{k+1}^i}}{\nu_i(\gamma_i + rKN)}. \quad (35)$$

在不等式 (31) 中令  $t = t_{k+1}^i$ , 结合式 (35) 可得

$$t_{k+1}^i - t_k^i \geq \frac{\beta \zeta_i(0) e^{-(\eta_i + \delta_i/\nu_i)t_{k+1}^i}}{2r\nu_i(\varepsilon + \beta)(M_i + KN)(\gamma_i + rKN)} > 0. \quad (36)$$

由式 (36) 可知, 智能体间的任意两个触发间隔严格大于 0. 因此, 系统不会发生 Zeno 现象.  $\square$

**注 5** 与现有大部分研究工作相比, 本文所提出算法主要有以下特征: 1) 在算法性能方面, 不同于现有仅仅考虑有限/固定时间收敛<sup>[15-20]</sup> 或者仅仅考虑事件触发通信<sup>[26-29]</sup> 的分布式优化工作, 本文提出一种同时考虑预定时间收敛性能和事件触发通信的分布式优化算法, 极大提高了算法的收敛性能. 2) 在优化问题方面, 不同于现有基于事件触发的分布式有限/固定/预定时间优化算法<sup>[30-34]</sup>, 本文考虑一种更加复杂的非光滑优化问题. 3) 在预定时间算法设计方面, 现有有限/固定/预定时间优化方法大都采用加幂积分思路<sup>[15-21]</sup>. 然而, 加幂积分方法导致算法在结构

上更为复杂. 同时, 算法的收敛上界相对更加保守且不易调节. 本文提出的基于时变增益函数的方法可巧妙规避这些问题. 4) 在算法结构方面, 为了解决优化问题的一致性约束  $x_i = x_j$ , 现有工作通常需要设计额外的辅助变量<sup>[23,26]</sup>, 从而保证决策变量最终趋于一致值. 本文通过构造合适的惩罚函数项, 在无需额外的辅助变量前提下巧妙解决了非光滑约束的一致性优化问题, 进一步精简了算法的冗余变量, 提高了算法的运行效率.

### 3 仿真研究

本节通过两个数值仿真案例来验证本文所提出算法的有效性和优势.

**案例 1** 考虑由 4 个智能体组成的多智能体系统, 智能体间的通信拓扑为无向环形拓扑. 令  $x_i = [x_{i,1}, x_{i,2}]^T \in R^2, \forall i \in V$ . 局部成本函数为  $f_i = x_i^T a_i x_i + b_i^T x_i + c_i \|x_i\|_1$ . 其中:  $a_1 = [1 \ 2; 0 \ 1], a_2 = [0 \ 1; 2 \ 2], a_3 = [1 \ 5; -2 \ 1], a_4 = [1.5 \ 2; 2 \ 0.5]; b_1 = [0.7, 0.8]^T, b_2 = [1, 1]^T, b_3 = [0.5, 0.5]^T, b_4 = [0.4, 1.2]^T; c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.5$ . 集合约束给定定为  $\|x_i - o\| \leq 5, \forall i$

$\in V$ , 其中  $o = [2, 3]^T$ ; 智能体的决策变量初始值为  $x_1(0) = [4, 6]^T, x_2(0) = [-0.5, 6.5]^T, x_3(0) = [-1, 0]^T, x_4(0) = [4.5, 0]^T$ .

1) 算法基本性能测试. 为了测试算法的预定时间收敛性能, 时变增益函数的参数选择为

$$h(t) = \begin{cases} \frac{10}{0.8^6} t^6 - \frac{24}{0.8^5} t^5 + \frac{15}{0.8^4} t^4, & 0 \leq t < t_f; \\ 1, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (37)$$

其中预定收敛时间  $t_f = 0.8$  s. 对于动态事件触发函数的参数, 选择  $\nu_i = 0.82, \delta_i = 1, \gamma_i = 1\ 500, \zeta_i(0) = 1\ 200, \eta_i = 0.54, i \in V$ .

图 1 以  $x_{i,1}, x_{i,2} (i = 1, 2, 3, 4)$  为横、纵坐标, 展现了当  $t \geq 0$  时, 各决策变量  $x_i (\forall i \in V)$  的运行轨迹. 其中, 红色外圈为所设定的集合约束, 黑色圆点为系统决策变量的初始值, 紫色星号为决策变量的最终值. 可以清晰地看出, 智能体的决策变量初始值在集合当中, 且对于之后任意时间, 每个智能体的决策变量始终在集合内, 并最终收敛到边界上的近似最优解  $x_i^*$ . 图 2 描绘了状态  $x_{i,1}, x_{i,2}$  状态随时间变化的运

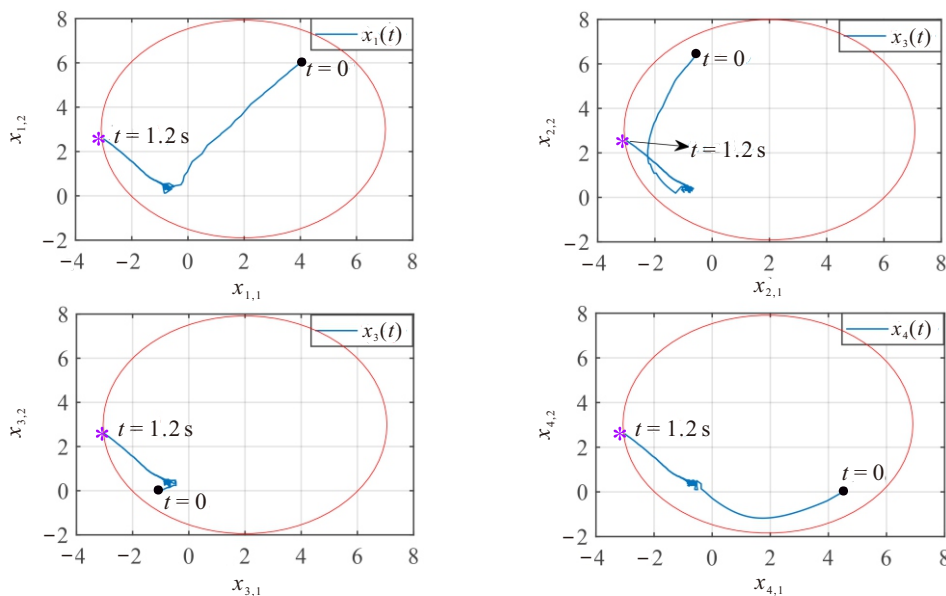


图1 案例 1 智能体  $i$  的决策变量运动轨迹

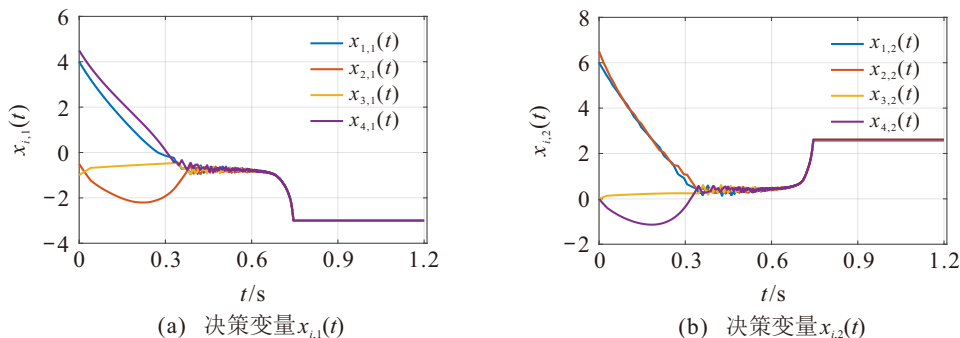


图2 案例 1 智能体  $i$  决策变量  $x_{i,1}, x_{i,2}$  变化曲线

动轨迹, 可以清楚地看到各决策变量在预定时间  $t_f$  内一致性地收敛到最优解. 图 3 则展示了智能体 2 的触发情况, 其中  $\phi_2(t) = \nu_2 \left( \gamma_2 \|e_2(t)\|_1 + Ke_2^T(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_2} \text{Sgn}(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_j(t)) \right)$ .

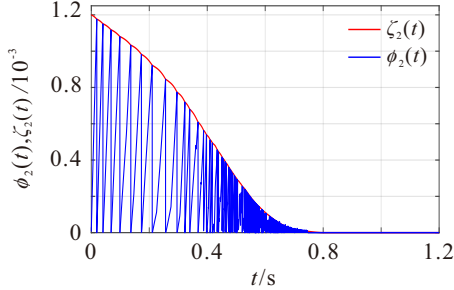


图3 案例 1 智能体 2 触发情况

2) 对比实验. 为了进一步测试所提出的算法的性能, 将算法 (4) 与文献 [35] 的算法 (19) 进行对比试验, 其中各智能体的初始值、控制参数均与测试 1) 相同.

从图 4(a), (b) 可以看出, 算法 (4) 与文献 [35] 所提出的算法 (19) 均能实现最小化全局成本函数, 但算法 (4) 可以在预定时间 0.8 s 内求解优化问题, 且其收敛时间比文献 [35] 中的算法 (19) 的收敛时间更快. 在仿真时间内, 文献 [35] 中各智能体的触发次数为 50000 次, 而算法 (4) 中各智能体触发次数分别为 2427, 1555, 2727, 4967 次. 这意味着本文所提出的算法与文献 [35] 中的算法 (19) 相比可以有效地节约多智能体系统的通信资源.

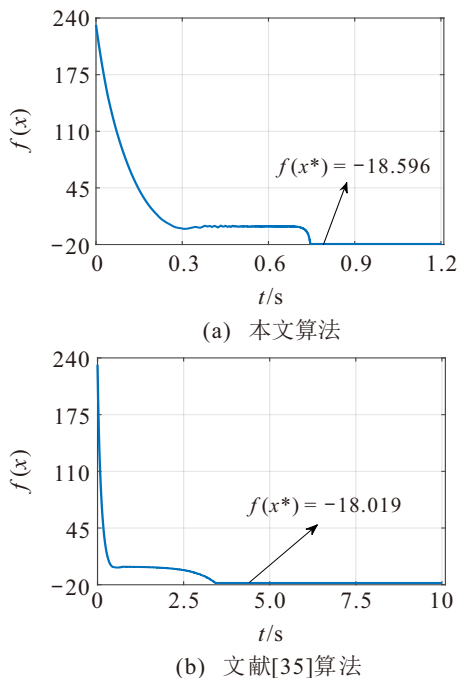


图4 案例 1 不同算法下成本函数  $f(x)$  变化曲线

案例 2 在智能电网的电池储能系统 (BESS)

中, 其成本函数通常由资本支出、运营支出、充放电成本以及电池容量约束等因素组成<sup>[19]</sup>. 考虑如下由 5 个电池组组成的电池储能系统, 电池组间的通信拓扑为无向环形拓扑. 各电池组的成本函数为  $f_i(x_i) = 0.5(x_{i1} + 0.1)^2 + 0.02\|x_{i1}\|_1 + 0.1e^{-0.2x_{i1}^2} + 0.5(x_{i2} + 0.2)^2 + 0.01\|x_{i2}\|_1 + 0.15e^{-0.2x_{i2}^2} + 0.5(x_{i3} + 0.25)^2 + 0.15\|x_{i3}\|_1 + 0.2e^{-0.2x_{i3}^2}$ . 其中: 决策变量  $x_{i1}$  为电池当前储能水平,  $x_{i2}$  为电池充放电速率,  $x_{i3}$  为电池老化参数. 各电池组决策变量初始值为  $x_1(0) = [1.3, 2.5, 6.6]^T$ ,  $x_2(0) = [2.2, 2.8, 6.4]^T$ ,  $x_3(0) = [3.4, 3.5, 3.7]^T$ ,  $x_4(0) = [4.2, 4.5, 4.1]^T$ ,  $x_5(0) = [4.5, 3.8, 4.6]^T$ . 集合约束给定为  $B_1 \leq x_i \leq B_2$ , 其中  $B_1 = [1, 2, 3]^T$ ,  $B_2 = [10, 9, 8]^T$ . 时变增益函数  $h(t)$  参数与案例 1 中相同, 预定义收敛时间  $t_f = 0.02$  s. 动态事件触发参数  $\nu_i = 0.1$ ,  $\delta_i = 1$ ,  $\gamma_i = 3000$ ,  $\zeta_i(0) = 50$ ,  $\eta_i = 0.5$ ,  $i \in V$ .

如图 5(a) 所示, 各电池组大约在  $t = 0.016$  s 时达成共识, 且收敛时各决策变量的值为  $x_i^* = [2.15, 2.22, 3.00]^T$ . 图 5(b) 表明成本函数从  $t = 0$  时逐渐减小, 在  $t = 0.012$  时达到最小值. 各电池组的触发次数分别为 131、152、77、135、126 次. 综上分析, 本文所提出的算法 (4) 与动态事件触发策略 (6) 在提高算法的收敛速率以及节约通信资源方面具有较好的效果.

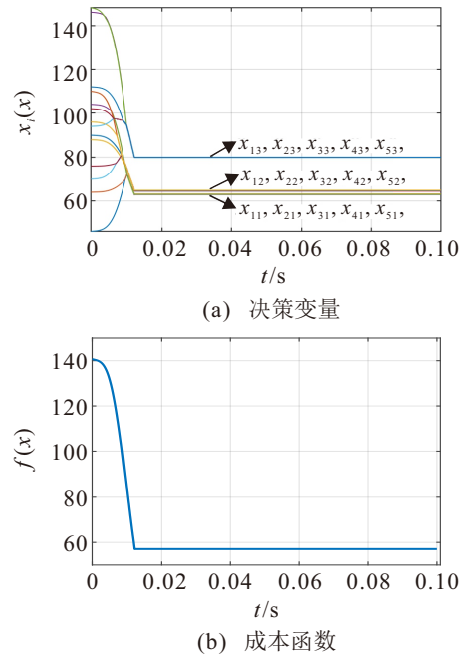


图5 案例 2 智能体决策变量与成本函数变化曲线

4 结论

针对多智能体系统含有集合约束的非光滑优化问题, 本文研究了事件触发通信下的快速分布式优化算法. 基于惩罚函数、时变增益函数、次梯度下降

法、微分包含、投影策略等技术, 本文提出了一种基于时变增益函数的分布式预定时间优化算法. 利用李雅普诺夫稳定性、预定时间收敛理论、凸优化、微分算子及不等式放缩等技巧, 证明了系统决策变量在预定时间内收敛于系统全局最优解的一个可调邻域内, 同时保证算法不存在 Zeno 现象. 另外, 通过对比仿真案例验证了所提出算法的优势. 在未来的研究工作中, 将进一步设计新的惩罚函数项, 并同时考虑非平衡图下的分布式预定时间优化问题.

#### 参考文献 (References)

- [1] Yang T, Yi X L, Wu J F, et al. A survey of distributed optimization[J]. *Annual Reviews in Control*, 2019, 47: 278-305.
- [2] 郭戈, 康健. 具有复杂动力学的多智能体系统分布式优化综述[J]. *控制与决策*, 2024, 39(7): 2113-2124.  
(Guo G, Kang J. A survey on distributed optimization for multiagent systems with complex dynamics[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(7): 2113-2124.)
- [3] 谢佩, 游科友, 洪奕光, 等. 网络化分布式凸优化算法研究进展[J]. *控制理论与应用*, 2018, 35(7): 918-927.  
(Xie P, You K Y, Hong Y G, et al. A survey of distributed convex optimization algorithms over networks[J]. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 918-927.)
- [4] Fan Z, Fan B, Liu W X. Distributed control of DC microgrids for optimal coordination of conventional and renewable generators[J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2021, 12(6): 4607-4615.
- [5] Zhang W, Xu Y L, Liu W X, et al. Distributed online optimal energy management for smart grids[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2015, 11(3): 717-727.
- [6] 李志勇, 谈世磊. 基于周期事件触发机制的分布式资源分配算法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(2): 563-571.  
(Li Z Y, Tan S L. Periodic event-triggered mechanism based distributed resource allocation algorithm[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(2): 563-571.)
- [7] Zhang Y Q, Lou Y C, Hong Y G, et al. Distributed projection-based algorithms for source localization in wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(6): 3131-3142.
- [8] Zhao M, Yang Y Y. Optimization-based distributed algorithms for mobile data gathering in wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2012, 11(10): 1464-1477.
- [9] Jakovetic D, Xavier J M F, Moura J M F. Convergence rates of distributed nesterov-like gradient methods on random networks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(4): 868-882.
- [10] Shi W, Ling Q, Yuan K, et al. On the linear convergence of the ADMM in decentralized consensus optimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1750-1761.
- [11] Varagnolo D, Zanella F, Cenedese A, et al. Newton-raphson consensus for distributed convex optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(4): 994-1009.
- [12] Zhang Y Q, Lou Y C, Hong Y G. An approximate gradient algorithm for constrained distributed convex optimization[J]. *CAA Journal of Automatica Sinica*, 2014, 1(1): 61-67.
- [13] Qiu Z R, Liu S, Xie L H. Distributed constrained optimal consensus of multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2016, 68: 209-215.
- [14] Yang S F, Liu Q S, Wang J. A multi-agent system with a proportional-integral protocol for distributed constrained optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3461-3467.
- [15] Lin P, Ren W, Farrell J A. Distributed continuous-time optimization: Nonuniform gradient gains, finite-time convergence, and convex constraint set[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(5): 2239-2253.
- [16] Mao S, Dong Z W, Schultz P, et al. A finite-time distributed optimization algorithm for economic dispatch in smart grids[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4): 2068-2079.
- [17] 朱文博, 王庆领. 基于梯度估计的多智能体系统有限时间分布式优化[J]. *控制理论与应用*, 2023, 40(4): 615-623.  
(Zhu W B, Wang Q L. Gradient estimations based distributed finite-time optimization for multi agent systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 615-623.)
- [18] Chen G, Li Z Y. A fixed-time convergent algorithm for distributed convex optimization in multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2018, 95: 539-543.
- [19] Ning B D, Han Q L, Zuo Z Y. Distributed optimization for multiagent systems: An edge-based fixed-time consensus approach[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(1): 122-132.
- [20] Chen G, Yang Q, Song Y D, et al. Fixed-time projection algorithm for distributed constrained optimization on time-varying digraphs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(1): 390-397.
- [21] de Villeros P, Sanchez-Torres J D, Defoort M, et al. Predefined-time formation control for multiagent systems based on distributed optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(12): 7980-7988.
- [22] Guo Z J, Chen G. Predefined-time distributed optimal allocation of resources: A time-base generator scheme[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(1): 438-447.
- [23] 杨涛, 常怡然, 张坤朋, 等. 基于预设时间收敛的分布式优化算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(8): 2364-2374.  
(Yang T, Chang Y R, Zhang K P, et al. Distributed optimization algorithms based on predefined-time convergence[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(8): 2364-2374.)

- [24] Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [25] Dimarogonas D V, Frazzoli E, Johansson K H. Distributed event-triggered control for multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(5): 1291-1297.
- [26] Kia S S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication[J]. *Automatica*, 2015, 55: 254-264.
- [27] Chen W S, Ren W. Event-triggered zero-gradient-sum distributed consensus optimization over directed networks[J]. *Automatica*, 2016, 65: 90-97.
- [28] Liu C X, Li H P, Shi Y, et al. Distributed event-triggered gradient method for constrained convex minimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(2): 778-785.
- [29] Zhang Z Q, Lunze J, Sun Y G, et al. Dynamic event-triggered communication based distributed optimization[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(17): 8504-8522.
- [30] Yang F Y, Yu Z Y, Jiang H J. Distributed finite-time optimisation for multi-agent systems via event-triggered aperiodically intermittent communication[J]. *International Journal of Systems Science*, 2022, 53(8): 1674-1689.
- [31] 杨菲阳, 于志永, 蒋海军, 等. 事件触发间歇通讯下多智能体系统的固定时间分布式优化[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1412-1419.  
(Yang F Y, Yu Z Y, Jiang H J, et al. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems via event-triggered intermittent communication[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1412-1419.)
- [32] Song Y W, Cao J D, Rutkowski L. A fixed-time distributed optimization algorithm based on event-triggered strategy[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(3): 1154-1162.
- [33] Guo Z J, Chen G. Distributed dynamic event-triggered and practical predefined-time resource allocation in cyber-physical systems[J]. *Automatica*, 2022, 142: 110390.
- [34] Chen S Y, Jiang H J, Yu Z Y. Distributed predefined-time optimization algorithm: Dynamic event-triggered control[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2024, 11(1): 486-497.
- [35] Li W J, Zeng X L, Liang S, et al. Exponentially convergent algorithm design for constrained distributed optimization via nonsmooth approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(2): 934-940.
- [36] Ruszczyński A. *Nonlinear optimization*[M]. Princeton: Princeton University Press, 2006.

### 作者简介

郭志军 (1991-), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为多智能体分布式优化与学习、多机器人系统, E-mail: [guozhijun@ncu.edu.cn](mailto:guozhijun@ncu.edu.cn);

曾令伟 (2001-), 男, 硕士生, 主要研究方向为分布式事件触发优化, E-mail: [zenglw11@163.com](mailto:zenglw11@163.com);

洪宝源 (2000-), 男, 硕士生, 主要研究方向为基于时变增益的分布式优化算法, E-mail: [hby20210324@163.com](mailto:hby20210324@163.com);

黎倩 (1988-), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为智能控制与人工智能, E-mail: [qianli@ncu.edu.cn](mailto:qianli@ncu.edu.cn);

李志勇 (1992-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为分布式固定时间优化算法, E-mail: [lizhiyong@swjtu.edu.cn](mailto:lizhiyong@swjtu.edu.cn).