

# 控制与决策

Control and Decision

可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型及应用

沈琴琴, 杨林云, 曹阳

引用本文:

沈琴琴, 杨林云, 曹阳. 可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型及应用[J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2797-2806.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.1185>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

时滞累积TDAGM (1,N,t) 模型及其在粮食生产中的应用

[Time-delayed accumulative TDAGM \(1, N, t\) model and its application in grain production](#)

控制与决策. 2021, 36(8): 2002-2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

基于数据驱动的浓密-压滤过程协调优化控制

Data driven coordinated optimization control of thickening-filter process

控制与决策. 2021, 36(5): 1095-1100 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1151>

基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型

[Multi-component system state space partition model based on Markov process](#)

控制与决策. 2021, 36(2): 418-428 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0480>

基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

[Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering](#)

控制与决策. 2021, 36(12): 2946-2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

改进型灰狼算法在热电偶动态补偿中的应用

Application of improved grey wolf algorithm in dynamic compensation of thermocouple

控制与决策. 2021, 36(1): 61-67 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0688>

# 可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型及应用

沈琴琴, 杨林云, 曹阳<sup>†</sup>

(南通大学 交通与土木工程学院, 江苏 南通 226019)

**摘要:** 一致分数阶灰色多变量卷积 (CFGMC( $\alpha, N$ )) 模型在传统的灰色多变量 (GM(1,  $N$ )) 模型基础上引入一致分数阶导数和常数项, 不仅体现了信息的差异性对数据发展趋势的影响, 还实现了与经典 GM(1, 1) 模型的兼容性. 然而 CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型存在驱动因素累加阶数单一、结构简单、微分方程与差分方程之间的转换误差等缺陷. 为此, 对因变量和自变量一致分数阶累加的阶数进行差异化分析, 同时引入非线性校正项并借助于离散灰色模型的思想以消除转换误差, 构建一种可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型, 并分析新模型的基本性质, 给出最优累加阶数的计算方法. 利用该模型对油气管道腐蚀速率进行分析, 结果显示新模型的拟合和预测精度明显优于经典的 GM(1,  $N$ ) 模型、CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型等其他几种灰色多变量模型.

**关键词:** 灰色系统; 灰色多变量模型; 一致分数阶累加; 阶数差异性优化; 离散灰色预测模型; 模型结构拓展  
**中图分类号:** N941.5 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2024.1185

**引用格式:** 沈琴琴, 杨林云, 曹阳. 可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型及应用 [J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2797-2806.

## Variable conformable fractional nonlinear discrete grey multivariate model and its applications

SHEN Qin-qin, YANG Lin-yun, CAO Yang<sup>†</sup>

(School of Transportation and Civil Engineering, Nantong University, Nantong 226019, China)

**Abstract:** Conformable fractional grey multivariate convolutional (CFGMC( $\alpha, N$ )) model introduces the conformable fractional derivative and constant term on the basis of the traditional grey multivariate (GM(1,  $N$ )) model, which not only reflects the influence of the difference of dependent variable information on the data development trend, but also realizes the compatibility with the classical GM(1, 1) model. However, the CFGMC( $\alpha, N$ ) model has some defects, such as single cumulative order of driving factors, simple structure, and conversion error between differential equation and difference equation. Therefore, by setting different conformable fractional accumulation orders to all dependent and independent variables, introducing an additional nonlinear correction term and using the idea of the discrete grey model to eliminate the conversion error, a variable conformable fractional nonlinear discrete grey multivariate model is proposed. Basic properties of the model are analyzed, and the calculation method to compute the optimal accumulation orders is given. Using this model to analyze the corrosion rate of oil and gas pipelines, the results demonstrate that the proposed model exhibits significantly better fitting and prediction accuracy compared to other grey multivariate models, such as the classic GM(1,  $N$ ) model and the CFGMC( $\alpha, N$ ) model.

**Keywords:** grey system; grey multivariate model; conformable fractional order accumulation; differential optimization of orders; discrete grey prediction model; expansion of model structure

## 0 引言

在多变量预测研究中, 统计学模型<sup>[1]</sup>占据了重要地位, 通常基于大量的历史数据和变量之间的线性或非线性关系来构建预测框架. 线性回归模型是最早被广泛应用的方法之一, 但在处理非线性数据

时表现较差. 自回归积分滑动平均 (ARIMA) 模型通过引入时间相关性捕捉系统的动态变化特征. 随着机器学习和深度学习<sup>[2]</sup>的快速发展, 长短期记忆网络和支持向量回归凭借其强大的非线性关系处理能力被广泛应用. 然而, 这类数据驱动方法对训练数据

收稿日期: 2024-10-09; 录用日期: 2025-02-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12471354); 江苏高校“青蓝工程”项目.

责任编辑: 李登峰.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn.

的数量依赖较强. 相比之下, 灰色系统理论<sup>[3]</sup> 提供了另一种思路, 能够在小样本和不确定性较大的环境下, 通过不完全信息建模获得较为可靠的预测结果. 灰色多变量预测模型, 简记为 GM(1, N) 模型, 是灰色系统理论中重要的预测模型之一, 可归为一类特殊的微分方程模型, 其中“1”表示方程的阶数为1阶, “N”表示研究系统包含N个序列, 即一个系统行为特征序列(因变量序列)和N-1个驱动因素序列(自变量序列), 已被广泛应用于能源<sup>[4]</sup>、交通<sup>[5]</sup>以及工业<sup>[6]</sup>等领域.

GM(1, N) 模型将已知因素作为驱动项, 将未知因素作为灰作用量, 通过对所有序列作一阶累加处理使其具有单调性后, 建立一阶微分方程模型以准确描述驱动因素、灰作用量与系统行为之间的关系, 再通过对微分方程求得的时间响应函数进行累减还原, 实现对系统行为的精准预测. 由建模过程可知, 数据的累加处理和微分方程的模型结构是 GM(1, N) 模型两个非常重要的方面. 在数据累加处理方面, 提出了分数阶累加<sup>[7-8]</sup>、新息优先累加<sup>[9-11]</sup>、阻尼累加<sup>[12-13]</sup>、一致分数阶累加<sup>[14-18]</sup>以及动态分数阶累加<sup>[6, 19-21]</sup>等一系列新的累加生成算子; 在微分方程模型结构方面, 相继引入了高阶甚至分数阶导数<sup>[16]</sup>、驱动信息控制项<sup>[22]</sup>、时滞效应驱动项<sup>[23]</sup>、冲击效应项<sup>[24]</sup>、记忆因子参数和结构参数<sup>[25]</sup>等来优化模型结构.

一致分数阶灰色多变量卷积 (CFGMC( $\alpha, N$ )) 模型在 GM(1, N) 模型的基础上首先用一致分数 $\alpha$ 阶导数取代常规导数, 然后在驱动因素项上引入了常数项, 最后利用卷积公式导出模型的时间响应函数. CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型在一定程度上体现了因变量历史信息的差异性对数据发展趋势的影响, 还实现了与经典 GM(1, 1) 模型的兼容性, 在中国城市人均消费水平问题上取得了较好的预测结果. 然而, CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型还存在诸多缺陷, 如尽管采用了一致分数 $\alpha$ 阶导数来构建模型, 但所有序列仍采用传统的一阶累加, 难以深层次挖掘序列的差异化演化规律; 模型结构较为简单, 未考虑数据间的非线性关系, 难以有效挖掘数据的非线性特征; 时间响应函数直接由微分方程模型导出, 而模型参数则由对微分方程积分后得到的差分方程采用最小二乘法导出, 存在从微分方程到差分方程的转换误差等.

为进一步提高 CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型的精度, 本文首先对所有变量均采用一致分数阶累加且对累加阶数进行差异化分析, 然后在驱动因素项中引入非线性项以完善模型结构并挖掘数据的非线性特征, 最后借助离散灰色预测模型<sup>[5, 26-27]</sup> 的思想消除现有

模型的转换误差, 在此基础上构造可变一致分数阶非线性离散灰色多变量 (VCFNDGM(1, N)) 模型. 文中分析了新模型的基本性质, 给出了最优累加阶数的计算方法, 通过数据采集成本高难度大、影响因素复杂且具有较强非线性特征的油气管道腐蚀速率这个实际案例, 验证了所提模型的有效性.

## 1 一致分数阶灰色多变量卷积模型

本节简单回顾 CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型, 分析其优缺点. 为此, 先给出一致分数阶导数的定义.

**定义 1**<sup>[14]</sup> 设  $f(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  为可微函数, 实参数  $\alpha > 0$ , 则  $f$  的一致分数 $\alpha$ 阶导数为

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \begin{cases} t^{[\alpha]-\alpha} \frac{df(t)}{dt}, & \alpha \in (0, 1]; \\ t^{[\alpha]-\alpha} \frac{d^{n+1} f(t)}{dt^{n+1}}, & \alpha \in (n, n+1]. \end{cases}$$

其中:  $n = 1, 2, \dots$ ;  $[\cdot]$  表示向上取整函数.

给定一个包含N个变量的灰色系统

$$X_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(m)). \quad (1)$$

其中:  $X_1^{(0)}$  称为系统的行为特征序列,  $X_i^{(0)}$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ) 称为系统的驱动因素序列,  $m$  为序列的长度. 在构建灰色预测模型时, 先对所有变量进行累加处理以消除波动性, 最经典的是进行一阶累加, 即

$$X_i^{(1)} = (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(m)), \quad (2)$$

其中  $x_i^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^t x_i^{(0)}(j)$ ,  $t = 1, 2, \dots, m$ .

**定义 2**<sup>[16]</sup> 设原始非负数据序列  $X_i^{(0)}$  及其一阶累加生成序列  $X_i^{(1)}$  分别如式 (1) 和 (2) 所示,  $\alpha \in (0, 1]$  为实参数.

1) 称

$$\frac{d^\alpha x_1^{(1)}(t)}{dt^\alpha} + b_1 x_1^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(t) + u \quad (3)$$

为 CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型的白化微分方程. 其中:  $b_1$  和  $u$  分别为发展系数和灰作用量,  $b_i$  为驱动系数.

2) 在初始条件  $x_1^{(1)}(t)|_{t=1} = x_1^{(0)}(1)$  下, CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型的时间响应函数为

$$\hat{x}_1^{(1)}(t) = \left(x_1^{(1)}(1) - \frac{u}{b_1}\right) e^{-\frac{b_1}{\alpha}(t^\alpha-1)} + \frac{u}{b_1} + \sum_{i=2}^N b_i e^{-\frac{b_1}{\alpha}t^\alpha} \times \frac{1}{2} \left( \sum_{s=1}^{t-1} s^{\alpha-1} e^{\frac{b_1}{\alpha}s^\alpha} x_i^{(1)}(s) + \sum_{s=1}^{t-1} (s+1)^{\alpha-1} e^{\frac{b_1}{\alpha}(s+1)^\alpha} x_i^{(1)}(s+1) \right), \quad t = 2, 3, \dots \quad (4)$$

3) CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型的累减还原式为

$$\hat{x}_1^{(0)}(t) = \begin{cases} x_1^{(0)}(1), & t = 1; \\ \hat{x}_1^{(1)}(t) - \hat{x}_1^{(1)}(t-1), & t = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

由定义 1 和定义 2 可知, 一致分数阶导数是常规导数的重要推广, 相比于传统的 GM(1, N) 模型, CFGMC(α, N) 模型采用一致分数 α 阶导数取代了常规的一阶导数, 同时在驱动项上增加了常数项, 实现了与经典 GM(1, 1) 模型的兼容性, 即当 α = 1, N = 1 时, 式 (3) 即为 GM(1, 1) 模型的表示形式. 此外, 利用卷积的思想, 构建的时间响应函数 (4) 避免了 GM(1, N) 模型中将驱动因素看成常数项引起的数值上的误差. 需要说明的是, 文献 [16] 将 α 限定在 (0, 1] 范围内, 但由定义 1 可知, 对于 ∀α > 0 均可建立相应的 CFGMC(α, N) 模型.

从 CFGMC(α, N) 模型的建模过程可以看出, 该模型仍存在如下缺陷:

1) 累加阶数单一. 尽管 CFGMC(α, N) 模型引入了一致分数阶导数, 但由定义 1 和文献 [16] 中关于模型求解的推导可知, 作者在实际应用中将白化微分方程 (3) 等价地表示成<sup>[16]</sup>

$$\frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt} + b_1 t^{\alpha-1} x_1^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i t^{\alpha-1} x_i^{(1)}(t) + ut^{\alpha-1}, \quad (6)$$

即仅包含一阶累加生成序列和常规导数. 此外, 由式 (5) 可以看出, 累减还原时也仅利用传统的一阶累减还原法, 并没有体现出一致分数阶累加与累减算子的优越性.

2) 模型结构简单. 由式 (3) 可知, CFGMC(α, N) 模型中仅包含线性项, 而现实世界的复杂性导致很多情况下数据之间呈现出较强的非线性波动性, 因此 CFGMC(α, N) 模型难以挖掘数据间的非线性特征.

3) 存在转换误差. 由文献 [16] 中的分析可以看出, CFGMC(α, N) 模型的时间响应函数 (4) 是由式 (6) 经常数变易法导出, 而为了求得模型参数  $b_i (i = 1, 2, \dots, N)$  和  $u$ , 需先对式 (6) 两边同时进行  $t - 1$  到  $t$  时刻的数值积分得到差分方程

$$b_1 \frac{t^{\alpha-1} x_1^{(1)}(t) + (t-1)^{\alpha-1} x_1^{(1)}(t-1)}{2} - \sum_{i=2}^N b_i \frac{t^{\alpha-1} x_i^{(1)}(t) + (t-1)^{\alpha-1} x_i^{(1)}(t-1)}{2} - u \frac{t^\alpha - (t-1)^\alpha}{\alpha} = -x_1^{(0)}(t), \quad (7)$$

再将  $X_i^{(1)}$  逐一代入式 (7) 中得到线性方程组后经最小二乘法解出. 因此, 与经典的 GM(1, 1)、GM(1, N)

等模型类似, CFGMC(α, N) 模型仍然存在从微分方程到差分方程的转换误差.

## 2 可变一致分数阶非线性离散灰色多变量模型

为了克服 CFGMC(α, N) 模型中累加阶数单一、模型结构简单、存在转换误差等问题, 进一步提高其预测精度, 本节提出一种可变一致分数阶非线性离散灰色多变量 (VCFNDGM(1, N)) 模型.

### 2.1 模型定义和理论分析

**定义 3**<sup>[14]</sup> 设原始非负数据序列  $X_i^{(0)}$  如式 (1) 所示,  $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ . 称

$$X_i^{(\alpha_i)} = (x_i^{(\alpha_i)}(1), x_i^{(\alpha_i)}(2), \dots, x_i^{(\alpha_i)}(m)) \quad (8)$$

和

$$X_i^{(-\alpha_i)} = (x_i^{(-\alpha_i)}(1), x_i^{(-\alpha_i)}(2), \dots, x_i^{(-\alpha_i)}(m))$$

分别为  $X_i^{(0)}$  的一致分数  $\alpha_i$  阶累加和累减生成序列, 其中

$$\begin{aligned} x_i^{(\alpha_i)}(t) &= \sum_{j=1}^t \left[ \begin{matrix} [\alpha_i] \\ t-j \end{matrix} \right] j^{\alpha_i - [\alpha_i]} x_i^{(0)}(j), \\ x_i^{(-\alpha_i)}(t) &= \sum_{j=1}^t \left[ \begin{matrix} [-\alpha_i] \\ t-j \end{matrix} \right] t^{[\alpha_i] - \alpha_i} x_i^{(0)}(j), \\ &t = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (9)$$

需要说明的是, 一致分数  $\alpha_i$  阶累加和累减生成序列可由一致分数阶导数的定义直接推导而来<sup>[14]</sup>. 基于定义 3 和离散灰色模型的建模思想, 构建如下 VCFNDGM(1, N) 模型.

**定义 4** 设原始非负数据序列  $X_i^{(0)}$  及其一致分数  $\alpha_i$  阶累加生成序列分别如式 (1) 和 (8) 所示, 称

$$\begin{aligned} x_1^{(\alpha_1)}(t) - x_1^{(\alpha_1)}(t-1) + az_1^{(\alpha_1)}(t) = \\ \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(t) + h_1 t^\gamma + h_2 t + h_3 \end{aligned} \quad (10)$$

为 VCFNDGM(1, N) 模型. 其中:  $\alpha_i$  为序列  $X_i^{(0)}$  的一致分数阶累加阶数;  $a$  和  $h_3$  分别为发展系数和灰作用量;  $b_i (i = 2, 3, \dots, N)$  为驱动系数;  $h_1 t^\gamma$  和  $h_2 t$  分别为非线性和线性修正项;

$$z_1^{(\alpha_1)}(t) = \xi x_1^{(\alpha_1)}(t) + (1 - \xi) x_1^{(\alpha_1)}(t-1)$$

为序列  $X_1^{(\alpha_1)}$  的紧邻均值,  $\xi \in [0, 1]$  为背景值系数,  $t = 2, 3, \dots, m$ .

由 VCFNDGM(1, N) 模型结构可以看出, 新模型是诸多经典灰色单变量和多变量模型的拓展, 见表 1.

1) 当  $N = 1, \alpha_1 = 1, \xi = 0.5, h_1 = h_2 = 0$  时, VCFNDGM(1, N) 模型退化为经典 GM(1, 1) 模型

表1 经典灰色预测模型基本形式或离散形式

序号	模型名称	基本形式或离散形式
1	GM(1,1)	$x^{(0)}(t) + az^{(1)}(t) = b$
2	CFGM(1,1)	$x^{(\alpha)}(t) - x^{(\alpha)}(t-1) + az^{(\alpha)}(t) = b$
3	GM(1,N)	$x_1^{(0)}(t) + az_1^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(t)$
4	OGM(1,N)	$x_1^{(0)}(t) + az_1^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(t) + h_1 t + h_2$
5	CFDGM(1,N)	$x_1^{(\alpha)}(t) + b_1 x_1^{(\alpha)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(t) + h_1$

的离散形式<sup>[3,26]</sup>;

2) 当  $N = 1, \xi = 0.5, h_1 = h_2 = 0$  时, VCFNDGM(1, N) 模型即为 CFGM(1, 1) 模型的离散形式<sup>[14]</sup>;

3) 当  $N > 1, \alpha_i = 1 (i = 1, 2, \dots, N), \xi = 0.5, h_1 = h_2 = h_3 = 0$  时, VCFNDGM(1, N) 模型退化为经典 GM(1, N) 模型的离散形式<sup>[3]</sup>;

4) 当  $N > 1, \alpha_i = 1 (i = 1, 2, \dots, N), \xi = 0.5, h_1 = 0$  时, VCFNDGM(1, N) 模型退化为一种优化的 GM(1, N) 模型<sup>[4]</sup>;

5) 当  $N > 1, \alpha_i = \alpha (i = 1, 2, \dots, N), h_1 = h_2 = 0$  时, VCFNDGM(1, N) 模型即为一致分数阶离散灰色多变量 (CFDGM(1, N)) 模型<sup>[27]</sup>。

综合 VCFNDGM(1, N) 模型上述 5 条性质可知, 新模型具有较强的结构兼容性, 可以通过简单的参数变换实现与 GM(1, 1)、CFGM(1, 1)、GM(1, N)、OGM(1, N) 和 CFDGM(1, N) 等经典灰色单变量和多变量模型的等价代换. VCFNDGM(1, N) 模型与其他模型的兼容性关系及转换方式如图 1 所示。

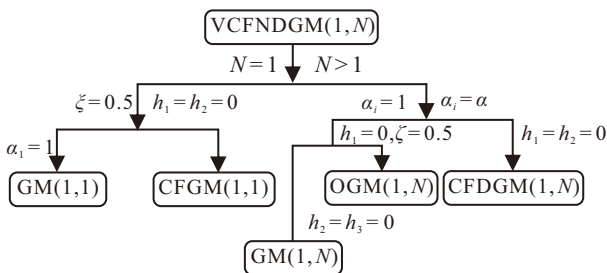


图1 VCFNDGM(1, N) 模型结构兼容性示意图

VCFNDGM(1, N) 模型作为上述 5 种模型的拓展, 具有更广泛的适用性, 不仅保留了传统灰色模型在小样本和不完全信息条件下的优势, 还可有效提高对非线性数据的适应能力和处理精度. 处理复杂、多变量、非线性系统在动态场景下的预测任务时, 该模型具有一定的优势. 此外, VCFNDGM(1, N) 模型具备自适应能力, 能够实时调整累加阶数以应对

系统的动态变化, 适用于实时监控与预测任务.

**定理 1** 设 VCFNDGM(1, N) 模型结构如定义 4 所述, 则在初始条件  $x_1^{(\alpha_1)}(t)|_{t=1} = x_1^{(0)}(1)$  下, VCFNDGM(1, N) 模型的时间响应函数为

$$\hat{x}_1^{(\alpha_1)}(t) = \sum_{q=1}^{t-1} \left[ \vartheta_1 \sum_{i=2}^N \vartheta_2^{q-1} b_i x_i^{(\alpha_i)}(t-q+1) \right] + \sum_{s=0}^{t-2} \vartheta_2^s [(t-s)\vartheta_4 + \vartheta_5] + \sum_{j=2}^t \vartheta_3 \vartheta_2^{t-j} j^\gamma + \vartheta_2^{t-1} x_1^{(0)}(1), \quad t = 2, 3, \dots \quad (11)$$

其中

$$\vartheta_1 = \frac{1}{1+a\xi}, \quad \vartheta_2 = 1 - \frac{a}{1+a\xi},$$

$$\vartheta_3 = \frac{h_1}{1+a\xi}, \quad \vartheta_4 = \frac{h_2}{1+a\xi}, \quad \vartheta_5 = \frac{h_3}{1+a\xi}. \quad (12)$$

**证明** 由式 (10) 可知

$$\hat{x}_1^{(\alpha_1)}(t) = \frac{1}{1+a\xi} \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(t) + \frac{1-a+a\xi}{1+a\xi} \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(t-1) + \frac{h_1}{1+a\xi} t^\gamma + \frac{h_2}{1+a\xi} t + \frac{h_3}{1+a\xi} \triangleq \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(t) + \vartheta_2 \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(t-1) + \vartheta_3 t^\gamma + \vartheta_4 t + \vartheta_5,$$

其中  $\vartheta_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  如式 (12) 所示.

用递推法来推导, 由初始条件可知, 当  $t = 1$  时, 有  $\hat{x}_1^{(\alpha_1)}(t)|_{t=1} = x_1^{(0)}(1)$ . 当  $t = 2$  时, 有

$$\hat{x}_1^{(\alpha_1)}(2) = \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(2) + \vartheta_2 \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(1) + \vartheta_3 2^\gamma + 2\vartheta_4 + \vartheta_5.$$

当  $t = 3$  时, 有

$$\hat{x}_1^{(\alpha_1)}(3) = \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(3) + \vartheta_2 \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(2) + \vartheta_3 3^\gamma + 3\vartheta_4 + \vartheta_5 = \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(3) + \vartheta_1 \vartheta_2 \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(2) + \vartheta_2^2 \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(1) + \vartheta_2 \vartheta_3 2^\gamma + 2\vartheta_2 \vartheta_4 + \vartheta_2 \vartheta_5 + \vartheta_3 3^\gamma + 3\vartheta_4 + \vartheta_5.$$

继续推导, 当  $t = k$  时, 有

$$\hat{x}_1^{(\alpha_1)}(k) = \vartheta_1 \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(k) + \vartheta_1 \vartheta_2 \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(k-1) +$$

$$\begin{aligned} & \dots + \vartheta_1 \vartheta_2^{k-2} \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(\alpha_i)}(2) + \vartheta_2^{k-1} \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(1) + \\ & \vartheta_2^{k-2} \vartheta_3 2^\gamma + 2\vartheta_2^{k-2} \vartheta_4 + \vartheta_2^{k-2} \vartheta_5 + \vartheta_2^{k-3} \vartheta_3 3^\gamma + \\ & 3\vartheta_2^{k-3} \vartheta_4 + \vartheta_2^{k-3} \vartheta_5 + \dots + \vartheta_3 k^\gamma + \vartheta_4 + \vartheta_5 = \\ & \vartheta_1 \left( \sum_{i=2}^N \vartheta_2^0 b_i x_i^{(\alpha_i)}(k) + \dots + \sum_{i=2}^N \vartheta_2^{k-2} b_i x_i^{(\alpha_i)}(2) \right) + \\ & \vartheta_2^{k-2} (2\vartheta_4 + \vartheta_5) + \dots + \vartheta_2^0 (k\vartheta_4 + \vartheta_5) + \\ & \vartheta_3 \vartheta_2^{k-2} 2^\gamma + \vartheta_3 \vartheta_2^{k-3} 3^\gamma + \\ & \dots + \vartheta_3 \vartheta_2^0 k^\gamma + \vartheta_2^{k-1} \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(1). \end{aligned}$$

对上式进行简化并利用初始条件  $\hat{x}_1^{(\alpha_1)}(1) = x_1^{(0)}(1)$ , 可得

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(k) = & \sum_{q=1}^{k-1} \left[ \vartheta_1 \sum_{i=2}^N \vartheta_2^{q-1} b_i x_i^{(\alpha_i)}(k-q+1) \right] + \\ & \sum_{s=0}^{k-2} \vartheta_2^s [(k-s)\vartheta_4 + \vartheta_5] + \sum_{j=2}^k \vartheta_3 \vartheta_2^{k-j} j^\gamma + \vartheta_2^{k-1} x_1^{(0)}(1). \end{aligned}$$

证明成立.  $\square$

根据式 (9) 可得 VCFNDGM(1, N) 模型的累减还原式

$$\hat{x}_1^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^t \left[ \begin{matrix} -\alpha_1 \\ t-i \end{matrix} \right] t^{[\alpha_1]-\alpha_1} \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(i), \quad (13)$$

$t = 1, 2, \dots$  由此可以分析模型的拟合误差, 并预测数据的未来发展趋势. 为求得模型参数  $\hat{p} = [b_2, b_3, \dots, b_N, a, h_1, h_2, h_3]^T$ , 可将  $X_i^{(\alpha_i)}$  中的各分量代入式 (10), 得到关于参数列的超定方程组

$$B\hat{p} = Y, \quad (14)$$

其中系数矩阵  $B \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (N+3)}$  和右端向量  $Y \in \mathbb{R}^{m-1}$  分别具有如下形式:

$$\begin{aligned} B = & \begin{bmatrix} x_2^{(\alpha_2)}(2) & x_3^{(\alpha_3)}(2) & \dots & x_N^{(\alpha_N)}(2) \\ x_2^{(\alpha_2)}(3) & x_3^{(\alpha_3)}(3) & \dots & x_N^{(\alpha_N)}(3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{(\alpha_2)}(m) & x_3^{(\alpha_3)}(m) & \dots & x_N^{(\alpha_N)}(m) \\ (\xi-1)x_1^{(\alpha_1)}(1) - \xi x_1^{(\alpha_1)}(2) \\ (\xi-1)x_1^{(\alpha_1)}(2) - \xi x_1^{(\alpha_1)}(3) \\ \vdots \\ (\xi-1)x_1^{(\alpha_1)}(m-1) - \xi x_1^{(\alpha_1)}(m) \\ 2^\gamma & 2 & 1 \\ 3^\gamma & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m^\gamma & m & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow & \\ Y = & \begin{bmatrix} x_1^{(\alpha_1)}(2) - x_1^{(\alpha_1)}(1) \\ x_1^{(\alpha_1)}(3) - x_1^{(\alpha_1)}(2) \\ \vdots \\ x_1^{(\alpha_1)}(m) - x_1^{(\alpha_1)}(m-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

经最小二乘法可求得:

- 1) 当  $m = N + 4$  且  $|B| \neq 0$  时,  $\hat{p} = B^{-1}Y$ ;
- 2) 当  $m > N + 4$  且  $|B^T B| \neq 0$  时,  $\hat{p} = (B^T B)^{-1} B^T Y$ ;
- 3) 当  $m < N + 4$  且  $|BB^T| \neq 0$  时,  $\hat{p} = B^T (BB^T)^{-1} Y$ .

由上面的分析可知, VCFNDGM(1, N) 模型有如下优点:

1) 对系统行为特征序列  $X_1^{(0)}$  和所有驱动因素序列  $X_i^{(0)} (i = 2, 3, \dots, N)$  均先进行了一致分数阶累加预处理, 且不同的序列累加阶数  $\alpha_i$  均不相同. 这充分体现了信息的差异性对系统演化规律的影响.

2) 添加了非线性修正项  $h_1 t^\gamma$  和线性修正项  $h_2 t$ , 既可在一定程度上挖掘数据的非线性特征, 又实现了与经典 GM(1, N) 模型的离散形式<sup>[26]</sup> 以及优化的 GM(1, N) 模型<sup>[4]</sup> 的兼容性.

3) 直接利用差分形式代替 CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型中的微分形式, 不仅极大地方便了模型时间响应函数的推导, 还避免了确定模型参数时微分方程到差分方程的转换误差, 即时间响应函数和模型参数均直接基于 VCFNDGM(1, N) 模型的基本形式推导而来.

## 2.2 累加阶数最优估计及建模步骤

VCFNDGM(1, N) 模型中的累加阶数  $\alpha_i$ 、非线性参数  $\gamma$  及背景值系数  $\xi$  对于模型的拟合和预测效果至关重要. 为了获得最优参数, 将平均绝对百分比误差作为评估模型精度的指标, 建立如下约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min f(\alpha_i, \gamma, \xi) = & \frac{1}{m-1} \sum_{t=2}^m \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(t) - x_1^{(0)}(t)|}{x_1^{(0)}(t)} \times 100\%. \\ \text{s.t. } \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(t) = & \sum_{q=1}^{t-1} \left[ \vartheta_1 \sum_{i=2}^N \vartheta_2^{q-1} b_i x_i^{(\alpha_i)}(t-q+1) \right] + \\ & \sum_{s=0}^{t-2} \vartheta_2^s [(t-s)\vartheta_4 + \vartheta_5] + \\ & \sum_{j=2}^t \vartheta_3 \vartheta_2^{t-j} j^\gamma + \vartheta_2^{t-1} x_1^{(0)}(1); \\ \vartheta_1 = & \frac{1}{1+a\xi}, \vartheta_2 = 1 - \frac{a}{1+a\xi}, \\ \vartheta_3 = & \frac{h_1}{1+a\xi}, \vartheta_4 = \frac{h_2}{1+a\xi}, \vartheta_5 = \frac{h_3}{1+a\xi}; \\ \hat{x}_1^{(0)}(t) = & \sum_{i=1}^t \left[ \begin{matrix} -\alpha_1 \\ t-i \end{matrix} \right] t^{[\alpha_1]-\alpha_1} \hat{x}_1^{(\alpha_1)}(i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\hat{p} &= Y; \\ 0 &\leq \xi \leq 1; \\ t &= 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (15)$$

上述优化问题是非线性且不可微的,通常采用一些智能优化算法来求解,如粒子群优化算法、鲸鱼优化算法、遗传优化算法等.以粒子群优化(PSO)算法为例,VCFNDGM(1,  $N$ )模型的建模步骤可总结如下.

step 1: 确定系统行为特征序列  $X_1^{(0)}$  和驱动因素序列  $X_i^{(0)}$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ), 将累加阶数  $\alpha_i$  在设定范围  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  内随机初始化, 其初始值通过如下公式生成:

$$\alpha_i = \alpha_{\min} + r \cdot (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}), \quad r \sim U(0, 1),$$

其中  $r$  是一个服从均匀分布  $U(0, 1)$  的随机数. 非线性参数和背景值系数初始值确定方式与  $\alpha_i$  类似, 在后续优化中, 这些参数将被动态调整. 随后, 建立 VCFNDGM(1,  $N$ ) 模型.

step 2: 计算非负序列  $X_i^{(0)}$  的可变一致分数  $\alpha_i$  阶累加生成序列  $X_i^{(\alpha_i)}$ .

step 3: 根据式 (14) 求得参数列  $\hat{p}$ .

step 4: 将所求参数代入式 (11) 求得  $\hat{X}_1^{(\alpha_1)}$ , 根据式 (13) 得到拟合值序列  $\hat{X}_1^{(0)}$ .

step 5: 用 PSO 算法求解优化问题 (15), 计算目标函数值, 更新粒子速度与位置, 获得局部最优累加阶数、非线性参数和背景值系数.

step 6: 重复 step 2 ~ step 5, 粒子根据自身历史最优解和群体全局最优解动态调整速度与位置, 逐步向目标最优解靠近. 通过多次迭代获得全局最优累加阶数、非线性参数和背景值系数以及对应的拟合序列  $\hat{X}_1^{(0)}$ , 并由此预测该序列的未来发展趋势.

### 3 案例分析

油气资源是非常重要的能源矿产和战略物资, 管道运输作为主要输送方式, 极易因腐蚀引发安全生产事故, 但管道腐蚀的数据信息采集成本较高, 过程复杂且受多种不确定因素影响. 本文对油气管道腐蚀速率进行分析和预测以验证模型的有效性和优越性, 所用数据来自某油田特定试验区<sup>[6]</sup>. 由于影响油气管道腐蚀的因素较多, 文献 [6] 计算了各影响因素与腐蚀速率间的灰色关联度, 并选取了溶解  $\text{CO}_2$  含量、注水压力、注水和 SRB 数量作为其相关因素, 具体见表 2.

为了验证新模型的有效性, 本节不仅选取了经典的分数阶 GM(1,  $N$ )(FGM(1,  $N$ )) 模型<sup>[8]</sup>、变量阶数差异性优化的新结构灰色多变量 (SGM(1,  $N$ ))<sup>[6]</sup> 模型作为对比模型, 还与经典的统计学模型 ARIMA

表2 油气管道腐蚀速率及其影响因素

序号	腐蚀速率 ( $\text{mm} \cdot \text{a}^{-1}$ )	溶解 $\text{CO}_2$ 含量 ( $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ )	注水压力 (MPa)	注水 pH	SRB 数量/个
1	0.0650	2.43	10.19	7.14	301
2	0.0780	2.65	10.48	7.45	286
3	0.0840	3.23	10.85	6.73	188
4	0.0920	3.98	11.24	6.66	164
5	0.0990	4.23	11.75	6.60	176
6	0.1060	4.56	11.96	6.58	208
7	0.1090	4.78	12.54	6.55	235
8	0.1134	5.34	12.97	6.50	264
9	0.1167	5.65	13.65	6.46	296
10	0.1195	5.69	14.43	6.41	280
11	0.1213	5.98	14.98	6.40	301
12	0.1234	6.07	15.23	6.35	270
13	0.1279	6.12	15.87	6.32	190
14	0.1326	6.34	16.05	6.29	144
15	0.1506	6.67	16.34	6.17	186
16	0.1745	6.98	16.98	6.05	298
17	0.1942	7.09	17.37	5.95	225

进行对比分析.

上述模型中均有参数需选取, 为此均可建立类似于式 (15) 的非线性优化问题, 并用 PSO 算法寻求最优参数. 在实验中取  $\alpha_{\min} = 0.1$ ,  $\alpha_{\max} = 15$ . 为对比分析不同智能优化算法的效果, 本文还选用了鲸鱼优化算法 (WOA)<sup>[28]</sup> 来求得 VCFNDGM(1, 1) 模型中的最优参数. 选取绝对百分比误差 (APE) 和平均绝对百分比误差 (MAPE) 作为模型的评价指标, 以进一步验证不同模型的拟合和预测效果.

$$\text{APE} = \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(t) - x_1^{(0)}(t)|}{x_1^{(0)}(t)} \times 100\%,$$

$$\text{MAPE} = \frac{1}{m-1} \sum_{t=2}^m \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(t) - x_1^{(0)}(t)|}{x_1^{(0)}(t)} \times 100\%.$$

#### 3.1 油气管道腐蚀速率预测

为了对模型进行训练和评估, 将前 12 组数据作为训练集用于模型的建立和参数优化, 后 5 组数据作为测试集用于检验模型的预测精度和稳定性. FGM(1,  $N$ )、SGM(1,  $N$ ) 和 VCFNDGM(1,  $N$ ) 模型的最优参数见表 3.

表3 各模型最优参数

模型	FGM	SGM	VCFNDGM-PSO	VCFNDGM-WOA
$\alpha$	0.01	—	—	—
$\alpha_1$	—	0.1663	0.6313	0.01
$\alpha_2$	—	-1.2526	6.2617	0.01
$\alpha_3$	—	2.0553	10.5708	2.5924
$\alpha_4$	—	2.7269	0.6330	0.9192
$\alpha_5$	—	-1.3967	7.4227	0.01
$\xi$	0.5	0.5	0.3277	0
$\gamma$	—	0.8269	5.0397	1.8667

以参数 $\alpha_1$ 为例说明累加阶数对模型性能的影响,固定表3中 $\alpha_i(i=2, \dots, 5)$ 、 $\xi$ 和 $\gamma$ 的取值,以0.1为步长,将 $\alpha_1$ 从0.1递增至3.0.图2给出了不同 $\alpha_1$ 取值下模型的拟合和预测误差变化趋势,可以得到:

1) 拟合 MAPE 在 $\alpha_1 \in (0, 1)$ 时保持较低且平稳的水平.当 $\alpha_1$ 在0.6附近时,拟合 MAPE 取得最小值.当 $\alpha_1 > 1$ 时,拟合 MAPE 开始出现波动,并在 $\alpha_1 = 2.1$ 时达到峰值.

2) 预测 MAPE 在 $\alpha_1 \in (0, 1)$ 时波动较小.当 $\alpha_1$ 增加至(1, 2)区间时,预测 MAPE 开始逐渐增大.在 $\alpha_1 = 2.1$ 时预测 MAPE 达到峰值,此时系数矩阵 $B$ 的条件数为 $2.1548 \times 10^8$ ,呈现病态性,导致预测结

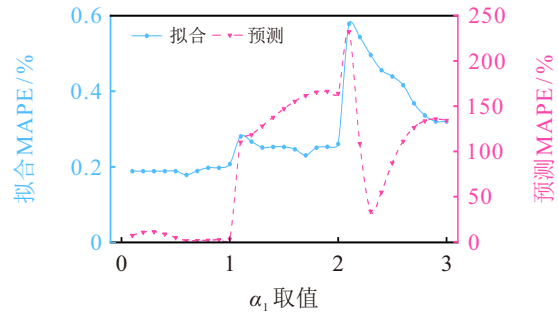


图2 基于不同阶数的 VCFNDGM(1, N) 模型误差

果失真.进一步增大 $\alpha_1$ ,预测 MAPE 再次出现波动.

综上,累加阶数的取值会直接影响到模型的精度,采用智能算法来优化阶数是至关重要的.4类模型的拟合和预测结果见表4.

表4 油气管道腐蚀率拟合和预测值及误差比较

序号	原始值	ARIMA		FGM(1, N)		SGM(1, N)		VCFNDGM(1, N)-PSO		VCFNDGM(1, N)-WOA	
		预测值	APE / %	预测值	APE / %	预测值	APE / %	预测值	APE / %	预测值	APE / %
1	0.0650	0.0650	0	0.0650	0	0.0650	0	0.0650	0	0.0650	0
2	0.0780	0.0650	16.6667	0.0771	1.1538	0.0780	0	0.0780	0	0.0780	0
3	0.0840	0.0888	5.7143	0.0842	0.2381	0.0841	0.1190	0.0840	0	0.0840	0
4	0.0920	0.0902	1.9565	0.0953	3.5870	0.0920	0	0.0920	0	0.0919	0.1087
5	0.0990	0.0988	0.2020	0.1013	2.3232	0.0991	0.1010	0.0994	0.4040	0.0994	0.4040
6	0.1060	0.1052	0.7547	0.1084	2.2642	0.1051	0.8491	0.1052	0.7547	0.1052	0.7547
7	0.1090	0.1121	2.8440	0.1122	2.9358	0.1097	0.6422	0.1096	0.5505	0.1093	0.2752
8	0.1134	0.1122	1.0582	0.1200	5.8201	0.1135	0.0882	0.1133	0.0882	0.1137	0.2646
9	0.1167	0.1171	0.3426	0.1235	5.8269	0.1170	0.2571	0.1166	0.0857	0.1169	0.1714
10	0.1195	0.1197	0.1674	0.1220	2.0921	0.1190	0.4184	0.1194	0.0837	0.1191	0.3347
11	0.1213	0.1220	0.5771	0.1251	3.1327	0.1212	0.0824	0.1214	0.0824	0.1209	0.3298
12	0.1234	0.1230	0.3241	0.1252	1.4587	0.1235	0.0810	0.1234	0	0.1240	0.4862
MAPE / %			2.7825		2.8030		0.2399		<b>0.1863</b>		0.2845
13	0.1279	0.1252	2.1110	0.1230	3.8133	0.1274	0.3909	0.1269	0.7819	0.1272	0.5473
14	0.1326	0.1268	4.3741	0.1249	5.8069	0.1359	2.4887	0.1347	1.5837	0.1329	0.2262
15	0.1506	0.1282	14.8738	0.1276	15.2722	0.1506	0	0.1506	0	0.1482	1.5936
16	0.1745	0.1295	25.7880	0.1296	25.7307	0.1708	2.1203	0.1741	0.2292	0.1705	2.2923
17	0.1942	0.1306	32.7497	0.1279	34.1401	0.1945	0.1545	0.1942	0	0.1944	0.1030
MAPE / %			15.9793		16.9562		1.0309		<b>0.5190</b>		0.9525

由表4可知, VCFNDGM(1, N) 模型的 APE 值均低于其他模型且波动较小.相较于其他对比模型, VCFNDGM(1, N) 模型在训练集和测试集上几乎完全拟合, MAPE 分别为 0.1863% 和 0.5190%, 表明该模型具有较强的适用性.

为了充分展示新模型的优越性,图3给出了各模型的拟合预测曲线及 APE 箱线图.可以发现 VCFNDGM(1, N) 模型的预测曲线与原始序列最为接近, ARIMA 和 FGM(1, N) 模型的预测曲线与原始数据偏差较大.进一步分析 APE 的箱线图,可以发现 VCFNDGM(1, N) 与 SGM(1, N) 模型的 APE 值分布较为集中,这归因于二者在建模过程中均考虑了不同变量之间的差异性,采用了可变的累加阶

数进行数据预处理,从而增强了模型的灵活性和稳定性.

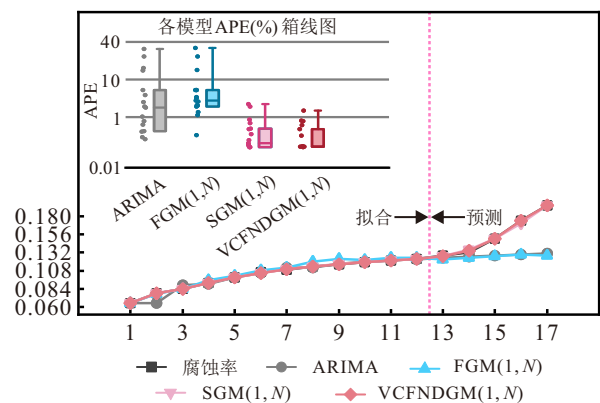


图3 拟合和预测结果及 APE 箱线图

根据油气管道腐蚀速率的预测结果可以发现,  $\text{CO}_2$  含量是影响腐蚀速率的关键因素, 因此可以通过减少  $\text{CO}_2$  的注入量来降低腐蚀速率. 此外, 基于预测模型结果可以提前预测管道的腐蚀风险, 及时进行检查和维修, 避免管道损坏.

### 3.2 不同优化算法性能分析

为了说明 PSO 算法在本文模型的优越性, 选择应用广泛的 WOA 算法进行对比分析, 在不同的迭代次数下, 二者的 MAPE 值和运行时长如表 5 所示.

由表 5 可知, WOA 算法的拟合误差随着迭代次数的增加呈现出波动变化, 优化性能不够稳定. 在相同迭代次数下, PSO 算法的拟合误差更小, 且基本保持在 0.2% 附近. 尽管 WOA 算法的运行时间略快于 PSO 算法, 但其时间差异可以忽略不计. 这充分说明

表5 不同智能优化算法的性能对比

迭代次数	PSO		WOA	
	MAPE / %	t / s	MAPE / %	t / s
50	0.2493	2.74	0.2920	2.58
80	0.1966	3.98	0.3182	3.73
100	0.1863	4.89	0.2845	4.20
200	0.1887	9.54	0.2881	7.58

了 PSO 算法在本文模型中具有更优越的优化能力. 因此, 本文选用 PSO 算法对模型中的超参数进行寻优, 以获得更合理、准确的建模结果.

### 3.3 消融实验

本节构建消融实验对模型优化的必要性进行验证. 消融实验中包含 GM(1, N) 模型<sup>[3]</sup>和 CFGMC( $\alpha$ , N) 模型<sup>[16]</sup>. 实验结果如表 6 所示, 其中 CFGMC( $\alpha$ , N) 模型中的  $\alpha$  通过 PSO 算法得到的最优取值为 1.

表6 消融实验结果

序号	原始值	GM(1, N)		CFGMC( $\alpha$ , N)		VCFNDGM(1, N)	
		预测值	APE / %	预测值	APE / %	预测值	APE / %
1	0.0650	0.0650	0	0.0650	0	0.0650	0
2	0.0780	0.0725	7.0513	0.0787	0.8974	0.0780	0
3	0.0840	0.1059	26.0714	0.0846	0.7143	0.0840	0
4	0.0920	0.1131	22.9348	0.0923	0.3261	0.0920	0
5	0.0990	0.1109	12.0202	0.0998	0.8081	0.0994	0.4040
6	0.1060	0.1121	5.7547	0.1054	0.5660	0.1052	0.7547
7	0.1090	0.1125	3.2110	0.1095	0.4587	0.1096	0.5505
8	0.1134	0.1187	4.6737	0.1133	0.0882	0.1133	0.0882
9	0.1167	0.1221	4.6272	0.1169	0.1714	0.1166	0.0857
10	0.1195	0.1199	0.3347	0.1193	0.1674	0.1194	0.0837
11	0.1213	0.1235	1.8137	0.1213	0	0.1214	0.0824
12	0.1234	0.1224	0.8104	0.1235	0.0810	0.1234	0
MAPE / %			8.1185		0.3900		0.1863
13	0.1279	0.1182	7.5841	0.1265	1.0946	0.1269	0.7819
14	0.1326	0.1185	10.6335	0.1307	1.4329	0.1347	1.5837
15	0.1506	0.1232	18.1939	0.1345	10.6906	0.1506	0
16	0.1745	0.1303	25.3295	0.1359	22.1203	0.1741	0.2292
17	0.1942	0.1270	34.6035	0.1368	29.5572	0.1942	0
MAPE / %			19.2689		12.9791		0.5190

由表 6 可知, 不论是在训练集还是测试集中, 3 个模型的建模性能排序均为 VCFNDGM(1, N) > CFGMC( $\alpha$ , N) > GM(1, N). 对比 VCFNDGM(1, N) 和 CFGMC( $\alpha$ , N) 的模型可知, 引入可变一致分数阶累加算子和非线性修正项能有效捕捉数据间的变换规律, 改进模型的拟合、预测精度. 对比 GM(1, N) 与 VCFNDGM(1, N) 模型可知, 离散灰色模型更能刻画样本序列的变化趋势, 降低误差. 综上, 通过消融实验充分说明了本文模型改进的必要性.

### 3.4 稳定性分析

为了验证 VCFNDGM(1, N) 模型的稳定性和预

测能力, 本节从两个角度说明 VCFNDGM(1, N) 模型的可靠性和稳定性.

#### 1) 交叉验证.

分别选取油气管道腐蚀速率数据的前 50%、60% 和 70% 作为训练集进行建模 (对应的训练数据量分别为 9、10 和 12). 计算模型在不同训练集比例下的 MAPE 值, 实验结果如表 7 所示.

由表 7 可知, VCFNDGM(1, N) 模型在不同训练集占比下的表现具有一定的一致性. 随训练集比例的增加, 训练集 MAPE 变化较小, 其方差为  $2.2755 \times 10^{-4}$ , 表明模型在拟合阶段具有较高的稳

表7 不同训练集占比下 VCFNDGM(1, N) 模型结果

训练集占比	训练集MAPE / %	测试集MAPE / %
50%	0.1990	1.2435
60%	0.1626	1.5202
70%	0.1863	0.5190

定性. 测试集 MAPE 的方差为 0.1782, 反映了模型在预测阶段具有较好的泛化能力和稳定性.

## 2) 蒙特卡洛仿真.

在蒙特卡洛仿真研究中, 对本文 VCFNDGM(1, N) 模型进行 100 次 PSO 寻优, 进而得到 100 组最优目标函数值, 即平均绝对百分比误差. 然后, 根据 100 组结果绘制最优目标函数值的频数分布图, 实验结果如图 4 所示.

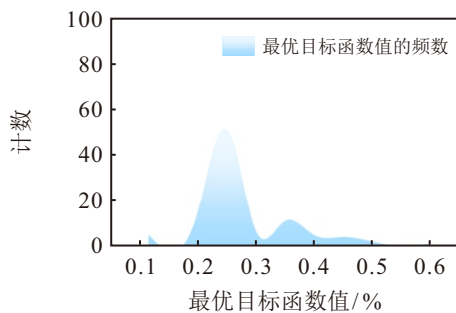


图4 VCFNDGM(1, N) 模型的最优目标函数频数分布图

由图 4 可知, VCFNDGM(1, N) 模型在 100 次重复实验中的目标函数波动范围是 [0.12%, 0.57%], 波动范围相对较小, 且有 51 次结果为 0.25%, 说明 VCFNDGM(1, N) 模型在该特定值附近表现出较高的集中度. 此外, 最优目标函数的分布呈现单峰形态且范围较窄, 频数在主峰处达到最大值, 远离主峰的目标函数值较少且分布稀疏. 这表明随机性对结果的影响较小, 进一步说明了该模型具有较好的稳定性和可靠性.

## 4 结论

本文首先基于阶数差异化的思想, 提出了可变一致分数阶累加生成算子, 该算子能自适应地根据变量数量生成相应数量的阶数并进行差异性优化. 然后添加了非线性修正项将模型结构拓展为非线性结构, 从而实现更多元、更复杂的现实问题的建模. 最后, 基于离散灰色模型的思想, 利用差分形式代替 CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型中的微分形式, 最终构建了可变一致分数阶非线性离散灰色多变量 (VCFNDGM(1, N)) 模型. 新模型有效克服了 CFGMC( $\alpha, N$ ) 模型累加阶数单一, 模型结构简单和存在转换误差的 3 个缺陷. 此外, 这一系列的改进还使得 VCFNDGM(1, N) 模型的计算复杂度降低, 实现起来更为简单. 油气管

道腐蚀速率的应用案例验证了本文模型的合理性. 结果表明, VCFNDGM(1, N) 模型的拟合和预测能力均优于其他模型.

尽管 VCFNDGM(1, N) 模型在实际案例中表现出色, 但仍存在一定的局限性. 未来的研究可以着重于进一步提升模型的自适应性, 尤其是在处理更复杂的非线性问题和大规模数据集时. 考虑到不同领域和问题的特殊性, 可将模型扩展至多层次的复杂结构并结合深度学习等技术, 以增强其在动态系统中的适应能力和预测精度.

## 参考文献 (References)

- [1] 何晓群. 多元统计分析[M]. 第 5 版. 北京: 中国人民大学出版社, 2019.  
(He X Q. Multivariate statistical analysis[M]. The 5th edition. Beijing: China Renmin University Press, 2019.)
- [2] 张驰, 郭媛, 黎明. 人工神经网络模型发展及应用综述[J]. 计算机工程与应用, 2021, 57(11): 57-69.  
(Zhang C, Guo Y, Li M. Review of development and application of artificial neural network models[J]. Computer Engineering and Applications, 2021, 57(11): 57-69.)
- [3] 刘思峰. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 10 版. 北京: 科学出版社, 2024.  
(Liu S F. Grey system theory and its application[M]. The 10th edition. Beijing: Science Press, 2024.)
- [4] Zeng B, Luo C M, Liu S F, et al. Development of an optimization method for the GM(1, N) model[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2016, 55: 353-362.
- [5] Shen Q Q, Cao Y, Yao L Q, et al. An optimized discrete grey multi-variable convolution model and its applications[J]. Computational and Applied Mathematics, 2021, 40(2): 58.
- [6] 尹凤凤, 曾波, 余乐安, 等. 多维灰色模型阶数差异性优化与结构拓展研究[J]. 系统工程理论与实践, 2023, 43(7): 2166-2178.  
(Yin F F, Zeng B, Yu L A, et al. Research on the orders differential optimization and structural expansion of multidimensional grey model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2023, 43(7): 2166-2178.)
- [7] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.
- [8] Ma X, Xie M, Wu W Q, et al. The novel fractional discrete multivariate grey system model and its applications[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 70: 402-424.
- [9] 周伟杰, 张宏如, 党耀国, 等. 新息优先累加灰色离散模型的构建及应用[J]. 中国管理科学, 2017, 25(8): 140-148.  
(Zhou W J, Zhang H R, Dang Y G, et al. New

- information priority accumulated grey discrete model and its application[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2017, 25(8): 140-148.)
- [10] Wu L F, Zhang Z Y. Grey multivariable convolution model with new information priority accumulation[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 62: 595-604.
- [11] 沈琴琴, 曹阳, 王鲁欣, 等. 新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型及应用[J]. *控制与决策*, 2024, 39(12): 3964-3972.  
(Shen Q Q, Cao Y, Wang L X, et al. New information priority conformable fractional discrete GM(1, 1) model and applications[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(12): 3964-3972.)
- [12] 曹阳, 梁爽, 沈琴琴, 等. 阻尼累加离散 GM(1, 1) 模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2023, 38(6): 1687-1694.  
(Cao Y, Liang S, Shen Q Q, et al. Damping accumulated discrete GM (1, 1) model and its application[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(6): 1687-1694.)
- [13] 罗党, 李良帅. 多变量时滞阻尼累加灰色模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2024, 39(8): 2703-2710.  
(Luo D, Li L S. Multivariable time-lag damping accumulated grey model and its application[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(8): 2703-2710.)
- [14] Ma X, Wu W Q, Zeng B, et al. The conformable fractional grey system model[J]. *ISA Transactions*, 2020, 96: 255-271.
- [15] Xie W L, Liu C X, Wu W Z, et al. Continuous grey model with conformable fractional derivative[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 139: 110285.
- [16] Wu W Q, Ma X, Zeng B, et al. A novel multivariate grey system model with conformable fractional derivative and its applications[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2022, 164: 107888.
- [17] Liu C X, Xu Z G, Zhao K Y, et al. Forecasting education expenditure with a generalized conformable fractional-order nonlinear grey system model[J]. *Heliyon*, 2023, 9(6): e16499.
- [18] Zhu H G, Chong L, Wu W Z, et al. A novel conformable fractional nonlinear grey multivariable prediction model with marine predator algorithm for time series prediction[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2023, 180: 109278.
- [19] Kang Y X, Mao S H, Zhang Y H. Variable order fractional grey model and its application[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 97: 619-635.
- [20] Yin F F, Zeng B. A novel multivariable grey prediction model with different accumulation orders and performance comparison[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 109: 117-133.
- [21] Xu Z C, Xie N M, Diao H K. Lithium-ion battery state of health monitoring based on an adaptive variable fractional order multivariate grey model[J]. *Energy*, 2023, 283: 129167.
- [22] 丁松, 党耀国, 徐宁, 等. 基于驱动因素控制的 DFCGM(1, N) 及其拓展模型构建与应用[J]. *控制与决策*, 2018, 33(4): 712-718.  
(Ding S, Dang Y G, Xu N, et al. Modeling and applications of DFCGM(1, N) and its extended model based on driving factors control[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(4): 712-718.)
- [23] 罗党, 安艺萌, 王小雷. 时滞累积 TDAGM(1, N, t) 模型及其在粮食生产中的应用[J]. *控制与决策*, 2021, 36(8): 2002-2012.  
(Luo D, An Y M, Wang X L. Time-delayed accumulative TDAGM(1, N, t) model and its application in grain production[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(8): 2002-2012.)
- [24] 叶莉, 党耀国, 王俊杰. 基于冲击效应的灰色多变量时滞预测模型及其应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2023, 43(5): 1515-1533.  
(Ye L, Dang Y G, Wang J J. Impact effect-based grey multivariable time delay model and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2023, 43(5): 1515-1533.)
- [25] Liu L Y, Liu S F, Yang Y J, et al. A recursive polynomial grey prediction model with adaptive structure and its application[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 249: 123629.
- [26] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(2): 1173-1186.
- [27] 吴文青, 田雪, 夏杰. 一致分数阶多变量离散灰色模型及其在信贷规模中的应用[J]. *数学的实践与认识*, 2024, 54(2): 98-107.  
(Wu W Q, Tian X, Xia J. A conformable fractional multivariable discrete grey model and its application in China's credit scale[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2024, 54(2): 98-107.)
- [28] Sapnken F E, Khalili Tazehkandgheshlagh A, Salomon Diboma B, et al. A whale optimization algorithm-based multivariate exponential smoothing grey-holt model for electricity price forecasting[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 255: 124663.

## 作者简介

沈琴琴 (1984-), 女, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为灰色系统理论与预测、智能交通, E-mail: shenqq@ntu.edu.cn;

杨林云 (2002-), 女, 硕士生, 主要研究方向为灰色系统理论与预测, E-mail: 19502555998@163.com;

曹阳 (1986-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为灰色系统理论与预测、科学计算、智能信息处理, E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn.