

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法

鲁宇明, 曹龙昊, 董显娟, 熊丽娟

引用本文:

鲁宇明, 曹龙昊, 董显娟, 等. 基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2025, 40(8): 2473-2480.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.1229>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for manyobjective optimization  
控制与决策. 2021, 36(8): 1804-1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

#### 基于向量角分解的高维多目标进化算法

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition  
控制与决策. 2021, 36(3): 761-768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

#### 基于分解的多目标多因子进化算法

A multiobjective multifactorial evolutionary algorithm based on decomposition  
控制与决策. 2021, 36(3): 637-644 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0525>

#### 尺度自适应的多特征融合相关滤波目标跟踪算法

Scale adaptation and multi-feature fusion correlation filtering object tracking algorithm  
控制与决策. 2021, 36(2): 429-435 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0445>

#### 一种求解约束多目标问题的协作进化算法

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems  
控制与决策. 2021, 36(11): 2656-2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

# 基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法

鲁宇明<sup>1†</sup>, 曹龙昊<sup>1</sup>, 董显娟<sup>2</sup>, 熊丽娟<sup>1</sup>

(1. 南昌航空大学 航空制造与机械工程学院, 南昌 330063;

2. 南昌航空大学 材料科学与工程学院, 南昌 330063)

**摘要:** 针对约束多目标进化算法存在难以平衡种群收敛性与多样性的问题, 提出一种基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法 (CMOEA-BAD). 该算法设计主种群和辅助种群, 它们分别独立进化, 以求解原始问题和辅助问题. 对于主种群, CMOEA-BAD 将理想点与最低点的角度信息相结合构成平均矢量角, 并将该角度融入约束支配原则进行个体选择, 以平衡种群的多样性与收敛性. 对于辅助种群, 设计一种种群规模动态缩减机制, 通过动态地调整辅助种群的规模来降低其在进化过程中所占用的计算资源, 以加快算法的收敛速度. 为验证所提出算法的性能, 将所提出算法在 MW 和 DTLZ 测试问题上与 PPS、BiCo、NSBiDiCo、MFOSPEA2 以及 CMOES 算法进行比较分析, 并应用于实际工程问题中. 实验结果表明, 所提出算法不仅能够有效平衡种群的收敛性与多样性, 还可以显著提高算法的收敛速度. 算法整体运行时间缩短了 28%, 综合性能更优.

**关键词:** 多目标优化; 约束; 矢量角度; 动态缩减机制; 收敛性; 多样性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1229

**引用格式:** 鲁宇明, 曹龙昊, 董显娟, 等. 基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法 [J]. 控制与决策, 2025, 40(8): 2473-2480.

## A constrained multi-objective evolutionary algorithm based on average vector angle and dynamic reduction mechanism

LU Yu-ming<sup>1†</sup>, CAO Long-hao<sup>1</sup>, DONG Xian-juan<sup>2</sup>, XIONG Li-juan<sup>1</sup>

(1. College of Aeronautical Manufacturing and Mechanical Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China; 2. College of Materials Science and Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

**Abstract:** Balancing population convergence and diversity remains a significant challenge in constrained multi-objective evolutionary algorithms. To remedy this issue, this article proposes a constrained multi-objective evolutionary algorithm based on average vector angle and dynamic reduction mechanism (CMOEA-BAD). This algorithm designs a main population and an auxiliary population, which evolve independently. The main population is dedicated to solving the original problem, while the auxiliary problem focuses on solving the ancillary questions. On the one hand, the CMOEA-BAD takes into account the angle information of the ideal and lowest points of the main population, designs an average vector angle, and selects individuals based on this vector angle through constraint dominance principles to achieve the goal of balancing population diversity and convergence. On the other hand, this article proposes a population size dynamic reduction mechanism for the auxiliary population, which dynamically adjusts the size of the auxiliary population to reduce the computational resources it occupies during the evolution process, in order to accelerate the convergence speed of the algorithm. In order to verify the performance of the algorithm, the proposed algorithm is compared with PPS, BiCo, NSBiDiCo, MFOSPEA2, and CMOES algorithms in MW and DTLZ test problems, and applied to practical engineering problems. Experimental results show that the proposed algorithm can not only effectively balance the convergence and diversity of population, but also significantly improve the convergence speed of the algorithm. The overall running time of the algorithm has been shortened by 28%, and the overall performance is better.

**Keywords:** multi-objective optimization; constraints; vector angle; dynamic reduction mechanism; astringency; diversity

收稿日期: 2024-10-21; 录用日期: 2025-02-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62473188); 江西省科技厅自然科学基金项目 (20242BAB25094); 江西省教育厅科技项目 (GJJ2401009).

责任编辑: 巩敦卫.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: luyuming69@163.com.

本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

## 0 引言

约束多目标优化问题 (CMOPs) 广泛存在于科学研究和现实应用中. 如车间调度、汽车盘式制动器优化、供水系统的水泵调度、机械臂轨迹规划<sup>[1-4]</sup>, 由于目标和约束的共存, CMOPs 相对于无约束优化问题具有更多的挑战. 因此, 对 CMOPs 的研究具有重要理论和实践意义.

约束多目标进化算法 (CMOEAs) 是公认的求解约束多目标优化问题的有效方法<sup>[5]</sup>, 约束处理技术和多目标进化算法是其关键组成部分. 根据算法的基本思想, 现有约束多目标算法大致可分为如下 3 类.

1) 基于协同进化的方法. 文献 [6] 提出了一种均匀搜索策略, 该策略依据已获得的非支配解集来界定一个具有潜力的搜索区域, 并利用这一区域内的解来辅助搜索 CPF 以加快收敛速度; 文献 [7] 提出了一种多任务框架, 该框架采用  $\varepsilon$  约束技术将原始任务的约束边界放宽, 构成辅助任务, 利用两个任务间的知识迁移, 实现了在可行域与不可行域间的互补搜索, 有效地获得了 Pareto 最优解.

2) 平衡收敛性与可行性的方法. 文献 [8] 提出通过学习 CPF 和 UPF 的分布, 利用 CPF 与 UPF 间的关系来平衡收敛性与可行性; 文献 [9] 提出了一种自动切换两阶段算法, 该算法用一个阶段处理无约束问题, 用另一个阶段处理原始 CMOP, 并根据总体状态在这两个阶段间自动切换.

3) 利用不可行解的方法. 文献 [10] 提出了一种基于  $\varepsilon$  约束处理的方法, 该方法将种群的约束边界放宽到  $\varepsilon$ , 使得一些多样性较好的不可行解得以保留, 并利用这些不可行解协助种群寻找 CPF; 文献 [11] 提出了一个基于移位的惩罚函数, 首先将不可行解移动至最近可行解的位置, 然后根据其约束违反程度进行惩罚, 以实现从进化初期的多样性和可行性向进化后期的多样性和收敛性的自适应过渡.

目前, 研究人员逐渐开发并利用角度信息来解决多目标问题<sup>[12]</sup>. 文献 [13] 将结合角度信息的约束处理技术嵌入至多目标进化算法中, 用于处理 CMOPs; 文献 [14] 提出了一种改进的角度惩罚距离, 将收敛性与多样性融合为一个标量值, 以实现在进化过程中对两者进行平衡; 文献 [15] 提出了一种基于角度信息的约束高维多目标进化算法, 通过构造角度违反度函数直接从合并种群中选择个体, 用于提高算法的收敛速度; 文献 [16] 设计了一种基于角度的选择策略来更新存档种群, 该策略根据种群间余弦夹角的大小进行个体的选择, 删除角度较小的个体以提高种群的多样性.

尽管上述算法利用角度信息在处理部分 CMOPs

问题上表现出色, 但是其仅依赖单一参考点 (理想点或最低点) 获取角度信息的方法存在缺陷, 导致所获得的信息缺乏完整性, 以至于在后续的选择过程中, 这种不完整的信息可能会导致优势个体的丢失.

针对上述问题, 本文提出一种基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法 (CMOEA-BAD). 该算法采取双种群协同进化的方法: 对于主种群, CMOEA-BAD 在其交配选择过程中将理想点与最低点的角度信息相结合构成平均矢量角, 将该角度融入约束支配原则进行个体选择, 以平衡种群的多样性与收敛性; 对于辅助种群, 针对其在进化后期占用计算资源的问题, 设计一种种群规模动态缩减机制, 通过动态地调整辅助种群的规模来提高算法的收敛速度.

## 1 相关概念

### 1.1 约束多目标优化问题的定义

不失一般性, 一个 CMOP 可用如下方式表示:

$$\begin{aligned} \text{minimize } F(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)]^T; \\ \text{subject to } g_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \\ h_j(x) &= 0, \quad j = p + 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $x$  为一个候选解,  $n$  为决策变量数目,  $\Omega$  为决策空间;  $M$  为目标数目;  $g_i(x)$  为第  $i$  个不等式约束;  $h_j(x)$  为第  $j$  个等式约束.

### 1.2 矢量角的定义

矢量角是指在归一化目标空间中两个解间的夹角 (不考虑约束). 要计算矢量角必须先找到最低点  $Z^{\min} = (z_1^{\min}, z_2^{\min}, \dots, z_m^{\min})$  和理想点  $Z^{\max} = (z_1^{\max}, z_2^{\max}, \dots, z_m^{\max})$ , 即找到所有解的第  $i$  个目标的最小值和最大值. 首先, 将目标向量进行归一化<sup>[13]</sup>, 如下所示:

$$F(x_j) = \frac{f_i(x_j) - Z_i^{\min}}{Z_i^{\max} - Z_i^{\min}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

对于任意两个解  $x_u$  与  $x_v$  ( $x_u \neq x_v$ ) 间的矢量夹角为

$$\text{angle}(x_u, x_v) = \arccos \left( \left| \frac{F(x_u) \times F(x_v)}{\|F(x_u)\| \times \|F(x_v)\|} \right| \right). \quad (3)$$

一般而言, 矢量角在一定程度上能够反映两个解间搜索方向的相似性. 若两个解从完全不同的方向进行搜索, 则它们之间的矢量角会很大; 否则, 它们之间的矢量角会相对较小.

## 2 算法设计

### 2.1 算法的整体框架

所提出 CMOEA-BAD 算法采用双种群协同进

化的方法. 其中: 主种群 (Population1) 专注于解决包含约束条件和多个目标的原始问题; 辅助种群 (Population2) 则致力于处理简化后的辅助问题, 即在忽略约束条件下对原始问题进行优化. 由于辅助问题比原始问题更加简单, 辅助种群的解比主种群的解具有更好的收敛性和多样性. 另外, 由于辅助种群在进化过程中不用考虑约束, 通过将其子代的信息共享给主种群, 能够帮助主种群跳出局部最优. 具体流程如算法 1 所示.

算法 1 CMOEA-BAD 算法流程.

输入: 种群规模  $N$ , 最大评价次数  $FE_{max}$ , 动态系数  $\delta$ ;  
 输出: 主种群  $P_1$ .

1. 随机初始化主种群  $P_1$  和辅助种群  $P_2$ , 种群规模均为  $N$ , 当前评价次数  $FE = 0$
2. while  $FE < FE_{max}$  do
3.  $P_1$  通过二元锦标赛选出优势个体, 种群规模为  $N$   
 $P_2$  通过二元锦标赛选出优势个体, 种群规模为  $N$
4.  $P_1$  通过交叉变异操作产生子代  $O_1$ , 种群规模为  $N$   
 $P_2$  通过交叉变异操作产生子代  $O_2$ , 种群规模为  $N \times \delta$
5. 将  $P_1 \cup O_1$  进行基于平均矢量角的交配选择操作, 得到种群  $P'_1$  种群规模为  $N$
6. 将  $P'_1$  通过交叉变异操作进行二次繁殖产生子代  $O'_1$ , 种群规模为  $N$
7. 将  $P'_1$ 、 $O'_1$  和  $O_2$  合并为新种群  $P''_1$ , 即  $P''_1 = P'_1 \cup O'_1 \cup O_2$ , 将  $P_2$ 、 $O_1$  和  $O_2$  合并为新种群  $P'_2$ , 即  $P'_2 = P_2 \cup O'_1 \cup O_2$
8. 将  $P''_1$  进行环境选择操作, 得到的种群更新为主种群  $P_1$ , 种群规模为  $N$
9. 将  $P'_2$  进行环境选择操作, 得到的种群更新为辅助种群  $P_2$ , 种群规模为  $N \times \delta$
10. end while
11. return  $P_1$

在算法 1 中, 经过交配选择 (步骤 5) 后, 选出的个体具有良好的收敛性和多样性, 为进一步扩大该优势, 本文选择对这些优势个体进行二次繁殖. 步骤 6 和步骤 7 中的环境选择操作采用文献 [17] 中提出的方法, 将个体的空间密度和拥挤距离构成适应度函数, 并根据个体的适应度大小进行筛选个体, 以进一步提高种群的多样性.

## 2.2 基于平均矢量角的交配选择

### 2.2.1 平均矢量角的设计

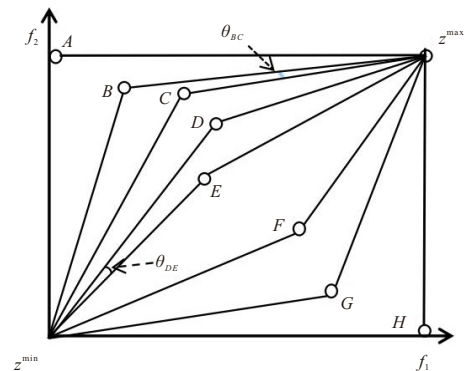
目前, 一些多目标进化算法利用角度信息筛选个体, 取得了较好的效果<sup>[18]</sup>, 但是, 这些算法只是单一地使用一个参考点 (最低点或理想点) 来计算余弦

角. 本文研究发现, 选用不同的参考点会导致对某些个体的偏好, 可能会造成优势个体的损失. 因此本文设计了平均矢量夹角, 任意两个解  $x_u$  与  $x_v$  间的平均矢量角定义如下所示:

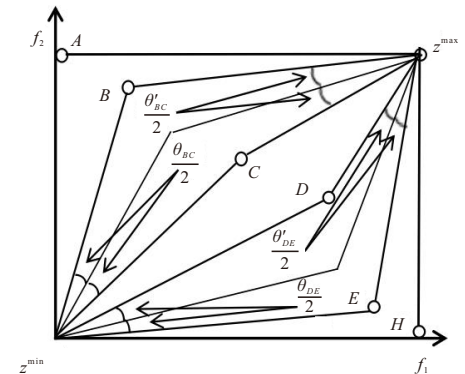
$$\text{average angle} = \frac{\text{angle}^{\min}(x_u, x_v) + \text{angle}^{\max}(x_u, x_v)}{2} \quad (4)$$

其中:  $\text{angle}^{\min}(x_u, x_v)$  表示以最低点  $Z^{\min}$  为参考点, 解  $x_u$  与  $x_v$  形成的夹角; 而  $\text{angle}^{\max}(x_u, x_v)$  表示以理想点  $Z^{\max}$  为参考点, 解  $x_u$  与  $x_v$  形成的夹角.

本文基于图 1 分析平均矢量角的优势. 图 1(a) 是使用单一参考点来计算余弦角, 首先找到最低点  $Z^{\min}$  和理想点  $Z^{\max}$ , 由于  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  互不支配, 采用角度信息来筛选个体. 若以理想点  $Z^{\max}$  作为参考点, 则这些个体间矢量夹角最小的为  $\theta_{BC}$ ; 若以最低点  $Z^{\min}$  作为参考点, 则这些个体间矢量夹角最小的为  $\theta_{DE}$ . 这意味着依赖单一参考点评估个体间的相似性, 可能会导致对某些个体的偏好. 图 1(b) 是将两个参考点相结合, 使用平均矢量角来测量个体间的相似性. 该方法同时兼顾了理想点和最低点, 有效地保证了公平性.



(a) 单一参考点



(b) 两个参考点结合

图1 不同参考点的矢量角

### 2.2.2 交配选择操作

交配选择操作主要根据式 (4) 计算出个体的平均矢量夹角, 通过保留角度较大的个体, 删除角度最

小的个体来提高种群的多样性. 详细步骤如算法2所示.

算法2 基于平均矢量角的交配选择操作.

输入: 进行交配选择操作的种群  $P$ ;

输出: 种群  $P'_1$ .

1.  $P_0 =$  非支配排序( $P$ ),  $P_0$ 第1层个体记为 $Q_0$ , 剩余个体记为 $R_0$
2. if  $|Q_0| \leq N$  do
3.  $K = N - |Q_0|$ ,  $P'_0 = R_0$
4. else
5.  $K = N$ ,  $P'_0 = Q_0$
6. end if
7. 归一化 $P'_0$ , 找到点 $Z^{\min}$ 、点 $Z^{\max}$ 并计算个体的约束违反程度(CV)
8. 采用切比雪夫方法<sup>[19]</sup>计算个体的聚合函数 $g^{te}$ , 并由式(4)和(5), 计算个体的平均矢量角 $\text{average angle}(x_u, x_v)$ 和角度阈值 $\theta_k$
9. while  $|P'_0| > K$  do
10.  $P'_1 =$  截断函数( $P'_0$ ),  $P'_1$ 的种群规模为 $N$
11. end while
12. return  $P'_1$

算法2中截断函数具体步骤如下: 找到种群中平均矢量夹角最小的两个个体(假设为 $x_u$ 和 $x_v$ ), 通过删除角度最小的个体来保持种群的多样性. 截断函数根据以下3个规则进行截断.

**规则1** 当 $\text{CV}(x_u) = 0$ 且 $\text{CV}(x_v) = 0$ 时: 若 $g^{te}(x_u) \leq g^{te}(x_v)$ , 则删除 $x_v$ ; 否则, 删除 $x_u$ .

**规则2** 当 $\text{CV}(x_u) \neq 0$ 或 $\text{CV}(x_v) \neq 0$ 且夹角小于阈值 $\text{average angle}(x_u, x_v) \leq \theta_k$ 时: 若 $\text{CV}(x_u) \leq \text{CV}(x_v)$ , 则删除 $x_v$ ; 否则, 删除 $x_u$ .

**规则3** 当上述条件均不满足时: 若 $g^{te}(x_u) \leq g^{te}(x_v)$ , 则删除 $x_v$ ; 否则, 删除 $x_u$ .

为使得所选出个体的分布性相对较好, 本文引入文献[13]的方法设置 $\theta_k$ , 具体公式为

$$\theta_k = \begin{cases} \theta_0 \left(1 + \frac{\text{FE}}{\text{FE}_{\max}}\right)^{cp}, & 1 \leq \text{FE} \leq T_C; \\ \frac{\pi}{2}, & T_C \leq \text{FE} \leq \text{FE}_{\max}; \end{cases}$$

$$T_C = \alpha \cdot \text{FE}_{\max};$$

$$cp = \log(N)/\log(1 + \alpha). \quad (5)$$

其中: 角度阈值 $\theta_k$ 为用于评价个体分布性优劣的一项指标, 大于 $\theta_k$ 的个体被认为其分布性较好;  $\theta_0$ 为初始阈值;  $\alpha$ 为一个参数, 按照文献[13]分别设置为 $\frac{\pi}{2N}$ 和0.8; FE为当前评价次数;  $\text{FE}_{\max}$ 为最大评价次数.

## 2.3 种群规模动态缩减机制

在双种群算法中, 由于两个种群均在生成子代和评估个体, 两者均在消耗计算资源. 然而, 随着进化的进行, 辅助种群在进化后期对主种群并没有提供帮助, 但是, 此时辅助种群仍然在消耗计算资源. 针对上述问题, 本文设计了一种种群规模动态缩减机制, 通过动态地调整辅助种群的规模降低其在进化过程中所占用的计算资源, 以加快算法的收敛速度.

种群规模动态缩减机制主要依靠动态系数 $\delta$ 来实现, 即将辅助种群每次迭代后保留的个体数量 $N \times$ 动态系数 $\delta$ , 从而达到对种群规模的控制. 本文设计动态系数 $\delta$ 的公式如下所示:

$$\delta = \frac{9 \times 10^{-1}}{1 + \tan\left(\left(\frac{\text{FE}}{\text{FE}_{\max}}\right) \times \frac{\pi}{2}\right)^5} + \delta_{\min}. \quad (6)$$

由式(6), 将初始种群规模 $N$ 设定为100, 最大评价次数 $\text{FE}_{\max}$ 设定为 $1 \times 10^5$ , 最小动态系数 $\delta_{\min}$ 设定为0.1, 得到种群规模随评价次数的变化趋势如图2所示.

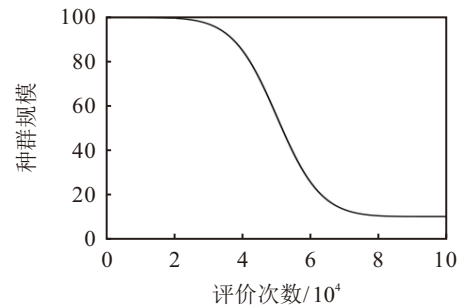


图2 种群规模随着评价次数的变化趋势

图2表明: 在进化初期辅助种群帮助主种群越过不可行域, 其对于主种群帮助较大, 故几乎不减少其规模; 随着种群不断进化, 主种群逐渐越过不可行域收敛至CPF, 辅助种群对于主种群帮助变小, 在该机制的作用下, 辅助种群规模从100逐渐缩减至10, 将其所占用的计算资源逐渐降低, 从而加快算法的收敛速度.

## 2.4 算法复杂度分析

CMOEA-BAD算法主要包括种群初始化、子代个体生成、基于平均矢量角的交配选择和环境选择4部分. 假设 $N$ 为种群中个体数量,  $M$ 为目标的个数,  $O(MN)$ 为初始化的计算复杂度; 子代生成主要通过交叉变异操作来产生, 可在线性时间内完成, 复杂度为 $O(MN)$ ; 在基于平均矢量角的交配选择过程中, 最坏情况下的复杂度为 $O(MN)^2$ , 环境选择最坏情况下的复杂度为 $O(MN)^2$ . 综合以上分析, CMOEA-BAD算法的复杂度约为 $O(MN)^2$ .

### 3 实验与分析

为检验所提出算法的有关性能, 选择 DTLZ<sup>[20]</sup> 和 MW<sup>[21]</sup> 两个约束多目标测试函数集进行仿真实验, 将所提出算法与经典算法 PPS<sup>[22]</sup> 以及其余 4 个当前性能优异的约束多目标进化算法 BiCo<sup>[16]</sup>、NSBiDiCo<sup>[23]</sup>、MFOSPEA2<sup>[7]</sup>、CMOES<sup>[6]</sup> 进行比较, 并在进化多目标优化平台<sup>[24]</sup> 上进行算法性能对比以及消融实验。

#### 3.1 实验有关参数设置

1) 种群规模和进化算子参数设置. 为保证实验的公平性, 各算法的种群规模均设置为 100. BiCo、MFOSPEA2、CMOES 和 CMOEA-BAD 按照原文献采用模拟二进制交叉和多项式变异生成后代; PPS 和 NSBiDiCo 按照原文献采用差分进化操作和多项式变异生成后代. 各算法的交叉变异参数统一设置为交叉概率  $P_c = 1$ , 变异概率  $P_m = 1/D$  ( $D$  为决策变量的维度), 交叉和变异的分布参数分别为  $\eta_c = 20$ ,  $\eta_m = 20$ .

2) 性能指标和算法终止条件. 为综合衡量算法收敛精度, 采用修正的反世代距离 IGD+<sup>[25]</sup> (modified inverted generation distance) 和超容量 HV<sup>[26]</sup> (hypervolume) 作为评价指标来验证算法的收敛性和分布性. 算法终止条件: 所有问题的最大评价次数  $FE_{max}$  均设为 100 000.

#### 3.2 算法性能对比实验

所有实验均独立运行 30 次, 采用 Wilcoxon 秩和检验<sup>[27]</sup> 比较算法性能差异性, 置信度为 95%, “+” “-” “=” 分别表示对比算法显著优于、显著劣于和无差别于 CMOEA-BAD 算法, 排名第 1 的算法加粗

显示.

图 3 为 PPS、BiCo、NSBiDiCo、MFOSPEA2、CMOES 和 CMOEA-BAD 算法在 MW14 问题上的求解结果. 图 3 中: PPS 和 NSBiDiCo 算法所获得的前沿解分布较为拥挤, 种群多样性不好; BiCo、MFOSPEA2 和 CMOES 算法虽然获得了部分分布在前沿的有效解, 但是个体分布较为稀疏, 分布性较差; 而 CMOEA-BAD 算法获得的解接近真实帕累托前沿且分布较为均匀, 相较于其他对比算法, CMOEA-BAD 算法获得的不可行解较少, 算法的多样性和分布性更好.

表 1 为 DTLZ 和 MW 系列的 24 个测试函数的 IGD+ 和 HV 的 Wilcoxon 秩和检验的统计结果. 由 IGD+ 可见: CMOEA-BAD 算法显著优于其他 5 种对比算法, 显著占优的比例分别为 100%、50%、100%、37.5%、33.3%, 排名前 3 的算法为 CMOEA-BAD、MFOSPEA2 和 CMOES; 由 HV 可见: CMOEA-BAD 算法仍然显著优于其他 5 种算法, 显著占优的比例分别为 95.8%、50%、95.8%、33.3%、33.3%, 排名前 3 的算法为 CMOEA-BAD、MFOSPEA2 和 CMOES.

表 2 为 6 种算法在 DTLZ 和 MW 系列测试函数上的运行时间平均值统计结果. 由表 2 可知: NSBiDiCo 算法在 10 个 DTLZ 测试问题上的耗时最短; CMOEA-BAD 算法在剩余的 14 个 MW 测试问题上的耗时最短; 同时, 在所有测试问题中, CMOEA-BAD 算法的总运行时间最短. 这一结果表明, CMOEA-BAD 算法在求解 DTLZ 和 MW 系列问题时的收敛速度更快.

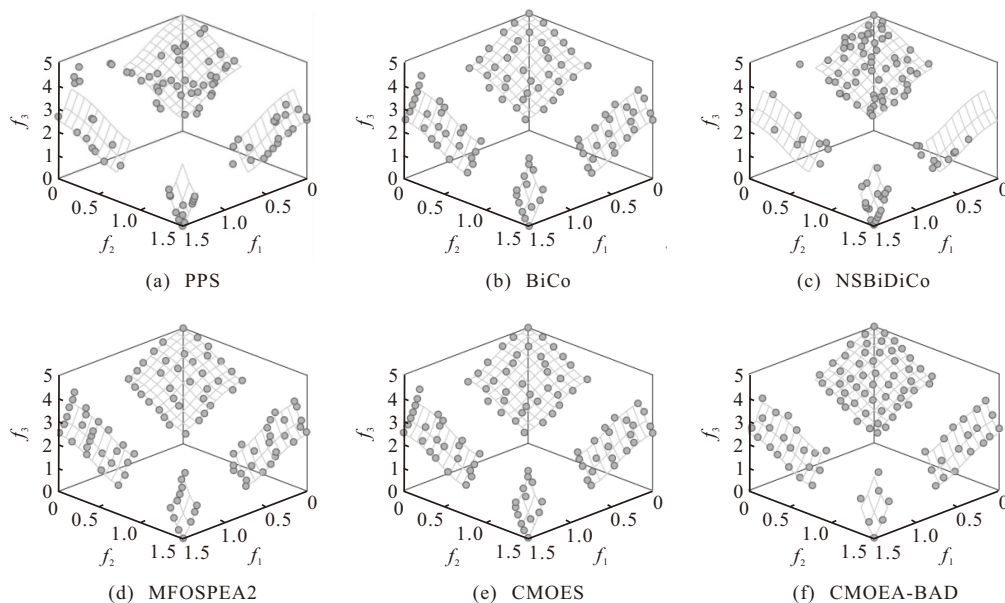


图3 各种算法在 MW14 问题上种群分布

表1 6种算法在DTLZ和MW测试函数上Wilcoxon秩和检验结果

算法	IGD+				HV			
	+	-	=	rank	+	-	=	rank
PPS	0	24	0	5.00(5)	1	23	0	5.04(5)
BiCo	3	12	9	3.08(4)	3	12	9	3.08(4)
NSBiDiCo	0	24	0	5.63(6)	0	23	1	5.54(6)
MFOSPEA2	8	9	7	2.58(2)	8	8	8	2.71(2)
CMES	6	8	10	2.79(3)	5	8	11	2.75(3)
CMOEA-BAD				<b>1.92(1)</b>				<b>1.875(1)</b>

表2 各算法在测试函数上运行时间平均值 s

算法	DTLZ	MW	DTLZ+MW
PPS	48.14	33.71	39.72
BiCo	25.30	15.99	19.87
NSBiDiCo	<b>17.70</b>	19.44	18.71
MFOSPEA2	44.44	47.74	46.36
CMOES	499.03	291.79	378.14
CMOEA-BAD	24.26	<b>14.68</b>	<b>18.67</b>

表4 各算法在测试函数上运行时间平均值 s

算法	DTLZ	MW	DTLZ+MW
PPS	48.14	33.71	39.72
BiCo	25.30	15.99	19.87
NSBiDiCo	<b>17.70</b>	19.44	18.71
MFOSPEA2	44.44	47.74	46.36
CMOES	499.03	291.79	378.14
CMOEA-BAD*	35.74	19.13	26.05
CMOEA-BAD	24.26	<b>14.68</b>	<b>18.67</b>

3.3 算法消融实验

为了进一步验证平均矢量角对CMOEA-BAD性能的影响,本文采用3种不同获取角度信息的方法进行消融实验.这3种方法分别为按照参考点 $Z^{\min}$ 来获得角度信息,记为CMOEA-BAD<sup>1</sup>;按照参考点 $Z^{\max}$ 来获得角度信息,记为CMOEA-BAD<sup>2</sup>;结合参考点 $Z^{\min}$ 和 $Z^{\max}$ 来获得角度信息的CMOEA-BAD.

表3为CMOEA-BAD<sup>1</sup>、CMOEA-BAD<sup>2</sup>、CMOEA-BAD在DTLZ和MW系列测试函数IGD+平均值和标准差的Wilcoxon秩和检验结果.由表3可知,CMOEA-BAD算法显著优于CMOEA-BAD<sup>1</sup>与CMOEA-BAD<sup>2</sup>,显著占优的比例分别为45.8%、54.2%.通过对比CMOEA-BAD<sup>1</sup>与CMOEA-BAD<sup>2</sup>不难发现,单一选用最低点 $Z^{\min}$ 或理想点 $Z^{\max}$ 获取的角度信息并无明显差别;对比CMOEA-BAD<sup>1</sup>、CMOEA-BAD<sup>2</sup>与CMOEA-BAD算法可以发现,结合参考点 $Z^{\min}$ 和 $Z^{\max}$ 来获得角度信息的CMOEA-BAD算法具有更好的收敛性,验证了采用平均矢量角比单一使用理想点或最低点来获取角度信息更加科学、有效.

表3 3种算法的Wilcoxon秩和检验结果

算法	IGD+			
	+	-	=	rank
CMOEA-BAD <sup>1</sup>	2	11	11	2.33(2)
CMOEA-BAD <sup>2</sup>	1	13	10	2.33(2)
CMOEA-BAD				<b>1.33(1)</b>

表4为6种算法以及CMOEA-BAD\*(未加入动态缩减机制)在DTLZ和MW测试集上平均运行时间的统计结果.由表4可知:在前6种算法中,耗时

最短的算法为NSBiDiCo和BiCo;而加入CMOEA-BAD算法进行对比后,耗时最短的算法为NSBiDiCo和CMOEA-BAD.通过对比CMOEA-BAD与CMOEA-BAD\*算法在10个DTLZ问题和14个MW问题上的表现,发现CMOEA-BAD算法的平均运行时间相较于CMOEA-BAD\*算法分别减少了32%和23%,总体平均运行时间缩短了28%,以上结果有效地验证了加入动态缩减机制能够显著降低算法的运行时间,提高运行速度.

4 实际应用

盘式制动器因其结构简洁、紧凑和制动性能好等一系列优点,在汽车和工程机械领域得到了广泛应用.本节通过对盘式制动器进行优化设计,进一步验证CMOEA-BAD算法的有效性.在制动器结构设计中,重量和停止时间的优化是两个关键的优化目标;主要包含4个决策变量:制动器的内外圈直径 $x_1$ 和 $x_2$ ,啮合力 $x_3$ 、摩擦面的数量 $x_4$ ;受限于5个约束:内外圈半径的最小间距、制动的最大长度、压力、温度以及扭矩限制.具体优化模型如下所示:

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= 4.9 \times 10^{-5}(x_2^2 - x_1^2)(x_4 - 1); \\ f_2(x) &= \frac{9.82 \times 10^6(x_2^2 - x_1^2)}{x_3 x_4 (x_2^3 - x_1^3)}. \\ \text{s.t. } g_1 &= (x_2 - x_1) - 20 \geq 0; \\ g_2 &= 30 - 2.5(x_4 + 1) \geq 0; \\ g_3 &= 30 - 2.5(x_4 + 1) \geq 0; \\ g_4 &= \frac{2.66 \times 10^{-2} x_3 x_4 (x_2^3 - x_1^3)}{(x_2^2 - x_1^2)} - 900 \geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

其中决策变量的取值范围为 $x_1 \in [55, 80]$ 、 $x_2 \in [75, 110]$ 、 $x_3 \in [1\ 000, 3\ 000]$ 、 $x_4 \in [2, 20]$ 。针对上述问题, 将所提出算法与其他算法进行对比实验, 由于实际问题无法获取真实的 Pareto 前沿, IGD+不再适用, 本文只采用 HV 作为评价指标, 各算法在该问题上独立运行 30 次, 函数评价次数设定为 100 000。表 5 为 6 种算法 HV 的最优值 (Best)、均值 (Mean) 与标准差 (Std) 的统计结果。由表 5 可知, 所提出算法的最优值、均值和标准差均明显优于其他算法。

表5 各算法在盘式制动设计问题上的 HV 指标比较

算法	Best	Mean	Std
PPS	0.9025	0.8860	0.0137
BiCo	0.9120	0.8896	0.0152
NSBiDiCo	0.8951	0.8795	0.0135
MFOSPEA2	0.9126	0.8919	0.0150
CMOES	0.9085	0.8895	0.0161
CMOEA-BAD	<b>0.9182</b>	<b>0.8989</b>	<b>0.0126</b>

## 5 结论

本文提出了一种基于平均矢量角和动态缩减机制的约束多目标进化算法 (CMOEA-BAD), 在平衡种群的收敛性与多样性的同时, 显著提高了收敛速度。该算法首次将理想点与最低点的角度信息相结合构成平均矢量角, 通过基于平均矢量角的交配选择, 改善了算法的分布性和多样性。此外, 所提出算法设计了一种种群规模动态缩减机制, 通过动态地减小辅助种群的规模来提高算法的收敛速度, 使得算法整体运行时间缩短了 28%。在经典测试函数集 DTLZ 和 MW 上进行了仿真实验, 实验结果表明: 相比于现阶段性能优越的算法, CMOEA-BAD 表现出色, 能够较好地平衡种群的收敛性与多样性。在应用于汽车盘式制动器优化问题上, 所提出算法同样表现优异, 进一步验证了 CMOEA-BAD 在解决约束多目标问题上具备良好的竞争力。

## 参考文献 (References)

[1] 王静, 雷德明. 考虑批处理机的绿色模糊混合流水车间调度问题[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3413-3421. (Wang J, Lei D M. Research on energy-efficient fuzzy hybrid flow shop scheduling with batch processing machines[J]. Control and Decision, 2024, 39(10): 3413-3421.)

[2] Mrausi S, Trimble J, Olabanji O, et al. Investigating the mechanical properties of automotive brake disc and pad developed from locally sourced materials[C]. Proceedings of the 14th International Conference on Mechanical and Intelligent Manufacturing Technologies. Cape Town, 2023: 197-203.

[3] Mala-Jetmarova H, Sultanova N, Savic D. Lost in

optimisation of water distribution systems? A literature review of system operation[J]. Environmental Modelling & Software, 2017, 93: 209-254.

[4] 崔靖凯, 王凯, 范正奇, 等. 基于改进灰狼算法的冗余机械臂最优轨迹规划[J]. 控制与决策, 2025, 40(5): 1457-1466. (Cui J K, Wang K, Fan Z Q, et al. Optimal trajectory planning of redundant manipulator based on improved gray wolf algorithm[J]. Control and Decision, 2025, 40(5): 1457-1466.)

[5] 王蕊, 顾清华. 一种求解约束多目标问题的协作进化算法[J]. 控制与决策, 2021, 36(11): 2656-2664. (Wang R, Gu Q H. A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems[J]. Control and Decision, 2021, 36(11): 2656-2664.)

[6] Ming F, Gong W Y, Jin Y C. Even search in a promising region for constrained multi-objective optimization[J]. CAA Journal of Automatica Sinica, 2024, 11(2): 474-486.

[7] Jiao R W, Xue B, Zhang M J. A multiform optimization framework for constrained multiobjective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(8): 5165-5177.

[8] Liang J, Qiao K J, Yu K J, et al. Utilizing the relationship between unconstrained and constrained Pareto fronts for constrained multiobjective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(6): 3873-3886.

[9] Tian Y, Zhang Y J, Su Y S, et al. Balancing objective optimization and constraint satisfaction in constrained evolutionary multiobjective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(9): 9559-9572.

[10] Zhou J L, Zou J, Zheng J H, et al. An infeasible solutions diversity maintenance epsilon constraint handling method for evolutionary constrained multiobjective optimization[J]. Soft Computing, 2021, 25(13): 8051-8062.

[11] Ma Z W, Wang Y. Shift-based penalty for evolutionary constrained multiobjective optimization and its application[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(1): 18-30.

[12] Zhou Y R, Xiang Y, Chen Z F, et al. A scalar projection and angle-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(6): 2073-2084.

[13] Fan Z, Fang Y, Li W J, et al. MOEA/D with angle-based constrained dominance principle for constrained multi-objective optimization problems[J]. Applied Soft Computing, 2019, 74: 621-633.

[14] 王旭健, 张峰干, 姚敏立. 基于动态分解和角度惩罚距离的高维多目标进化算法[J]. 电子学报, 2024, 52(8): 2773-2785. (Wang X J, Zhang F G, Yao M L. High-dimensional multi-objective evolutionary algorithm based on dynamic decomposition and angular penalty distance[J].

- Acta Electronica Sinica*, 2024, 52(8): 2773-2785.)
- [15] 刘冰洁, 毕晓君. 一种基于角度信息的约束高维多目标进化算法[J]. *电子学报*, 2021, 49(11): 2208-2216. (Liu B J, Bi X J. A constrained many-objective evolutionary algorithm based on angle information[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(11): 2208-2216.)
- [16] Liu Z Z, Wang B C, Tang K. Handling constrained multiobjective optimization problems via bidirectional coevolution[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(10): 10163-10176.
- [17] Tian Y, Zhang T, Xiao J H, et al. A coevolutionary framework for constrained multiobjective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(1): 102-116.
- [18] Zhou Y R, Chen Z F, Huang Z X, et al. A multiobjective evolutionary algorithm based on objective-space localization selection[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(5): 3888-3901.
- [19] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731.
- [20] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach — Part I: Solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601.
- [21] Ma Z W, Wang Y. Evolutionary constrained multiobjective optimization: Test suite construction and performance comparisons[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(6): 972-986.
- [22] Fan Z, Li W J, Cai X Y, et al. Push and pull search for solving constrained multi-objective optimization problems[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 44: 665-679.
- [23] Mendes C S R, Araújo A F R, Farias L R C. Non-dominated sorting bidirectional differential coevolution[C]. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Honolulu, 2023: 1709-1714.
- [24] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. PlatEMO: A Matlab platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum][J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87.
- [25] Ishibuchi H, Masuda H, Tanigaki Y, et al. Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance[C]. *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Cham, 2015: 110-125.
- [26] Shang K, Ishibuchi H, He L J, et al. A survey on the hypervolume indicator in evolutionary multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(1): 1-20.
- [27] Derrac J, García S, Molina D, et al. A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, 1(1): 3-18.

#### 作者简介

鲁宇明 (1969–), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为工程优化、智能算法, E-mail: [luyuming69@163.com](mailto:luyuming69@163.com);

曹龙昊 (2000–), 男, 硕士生, 主要研究方向为进化算法、智能制造, E-mail: [931858112@qq.com](mailto:931858112@qq.com);

董显娟 (1979–), 女, 副教授, 博士, 主要研究方向为航空材料成形理论及技术, E-mail: [dxj3@163.com](mailto:dxj3@163.com);

熊丽娟 (1979–), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为智能算法, E-mail: [20630098@qq.com](mailto:20630098@qq.com).