

# 控制与决策

Control and Decision

## 函数型灰色关联分析及应用

刘宁, 韦保磊

引用本文:

刘宁, 韦保磊. 函数型灰色关联分析及应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(8): 2459–2466.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.1278>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 小样本下多稀疏表示分类器的决策融合方法

Decision fusion of multiple sparse representation-based classifiers in case of small samples

*控制与决策*. 2021, 36(8): 1984–1990 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1839>

#### 基于模糊-两阶段超效率SBM的电网应急能力动态综合评价

Dynamic comprehensive evaluation of power grid emergency capability based on fuzzy-two-stage super efficiency SBM

*控制与决策*. 2021, 36(6): 1333–1341 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1128>

#### 基于条件对抗生成孪生网络的目标跟踪

Conditional generative adversarial siamese networks for object tracking

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1110–1118 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1215>

#### 基于向量集逆区间滤波的故障观测器设计

Vector set inversion interval filtering based fault observer design

*控制与决策*. 2021, 36(12): 2973–2981 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0212>

#### 基于互信息操作变量曲线参数化的间歇过程批内修正优化

Intra-batch correction optimization of batch process with manipulated variable trajectory parameterization based on mutual information

*控制与决策*. 2021, 36(1): 234–240 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0825>

# 函数型灰色关联分析及应用

刘宁<sup>1</sup>, 韦保磊<sup>2†</sup>

(1. 南京理工大学机械工程学院, 南京 210094; 2. 南京理工大学经济管理学院, 南京 210094)

**摘要:** 针对灰色关联分析对于非等间隔含噪序列数据精度低或不适用等问题, 首先, 提出从含噪数据重构本征函数及其高阶导函数的惩罚样条光滑法, 以弱化序列数据分布间隔和观测误差的影响; 然后, 设计能够综合静态关联性和动态关联性的函数型关联度, 并论证其规范性、接近性、分解形式和实践应用准则; 最后, 将所提出模型应用于火炮身管烧蚀磨损截面特征分析. 结果表明: 所提出方法能够准确辨识烧蚀磨损截面与弹丸初速减退的关联关系, 且优于对比模型, 验证了所提出方法的可靠性和有效性.

**关键词:** 灰色关联分析; 灰色关联度; 样条光滑; 火炮身管; 烧蚀磨损

**中图分类号:** N94 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2024.1278

**引用格式:** 刘宁, 韦保磊. 函数型灰色关联分析及应用 [J]. 控制与决策, 2025, 40(8): 2459-2466.

## Functional grey relational analysis with applications

LIU Ning<sup>1</sup>, WEI Bao-lei<sup>2†</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;  
2. School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** This paper aims to address the low-accuracy or inapplicable challenges when applying the existing ones to non-equidistant, noisy sequential data. First, a penalized spline smoothing technique is introduced to learn intrinsic functions together with their high-order derivatives from noise data, weakening the effect of temporal distributions and measurement errors. Then, a general formula of functional grey relational degrees is designed to synthesize both static and dynamic relational degrees. Subsequently, we discuss the properties of normality and closeness, decomposed forms, as well as the practical guides. The empirical results on analyzing erosion and wear of gun barrels show that the proposed method accurately identifies the relationship between erosion and wear at different profiles and bullet velocity reduction, and outperforms the competitive models, indicating its reliability and effectiveness.

**Keywords:** grey relational analysis; grey relational degrees; spline smoothing; gun barrels; erosion and wear

## 引言

灰色关联分析作为小样本多因素分析方法, 其运用关联度反映因素间的关联性, 多用于辨识系统的主要因素和次要因素. 自邓聚龙<sup>[1]</sup>原创性地提出邓氏关联度以来, 该方法已被广泛应用于解决经济、管理、工程等领域的实践问题<sup>[2-4]</sup>.

近年来, 学者们以邓氏关联度为范例, 构建了多种新型灰色关联度, 如点关联度<sup>[5]</sup>、T型关联度<sup>[6]</sup>、斜率关联度<sup>[7]</sup>以及这些关联度的改进和拓展<sup>[8-10]</sup>. 这些方法具有相同的特征——整体关联度是局部关联系数的加权平均. 有别于此, 广义灰色关联分析将系统因素的离散观测视为连续函数的顺序采样, 并以

连续函数的几何形状相似性为关联度. 注意到, 连续函数揭示了不同采样方式下离散观测的内在本征结构, 故称之为本征函数<sup>[11]</sup>. 从组成上看, 广义灰色关联分析包括关联算子、本征函数、关联度. 韦保磊等<sup>[12]</sup>对关联算子及其性质做出了较为系统的研究, 不再赘述. 下文将从后两方面归纳广义灰色关联分析的研究进展.

从离散观测序列求解本征函数是广义灰色关联分析的首要问题. Liu等<sup>[13]</sup>采用了分段线性插值方法来求解本征函数, 提出了包括灰色绝对、相对、相似、接近关联度在内的一系列关联分析新方法; 陈勇明等<sup>[14]</sup>运用了三次样条插值方法来求解本征函数,

收稿日期: 2024-11-01; 录用日期: 2025-02-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (72301140, 72471119, 72472073).

责任编辑: 李登峰.

†通信作者. E-mail: weibei@yeah.net.

克服了分段线性插值方法求解本征函数的局限(如插值函数在节点处不光滑且在大曲率附近误差大),设计了灰色样条绝对关联度.虽然这些工作提高了广义灰色关联度的准确性,但是,受限于插值方法所固有的性质,该类方法不能有效处理离散观测中的异常值和观测误差<sup>[15]</sup>.在实践中,观测误差是不可避免的,因此,需要更为稳健有效的本征函数求解方法.

从本征函数出发设计满足关联公理的关联度公式是广义灰色关联分析的关键<sup>[16]</sup>.以本征函数间的距离为相异性度量,而后引入单调递减的归一化函数将其映射至区间(0, 1]上,是最经典的设计方式,如灰色绝对、相对、相似、接近关联度均以本征函数曲线间的面积为相异性度量,倒数函数为归一化函数.需要注意的是,在计算本征函数曲线间的面积时,若曲线相交,则必然产生正负面积相互抵消的现象<sup>[17]</sup>,这将减小距离、夸大关联度,甚至会产生与领域知识矛盾的关联序结果<sup>[18]</sup>.为此,通过修正面积的计算方式,可优化上述灰色关联度<sup>[12]</sup>,如叶璟等<sup>[19]</sup>提出了能够辨识关联方向的双向灰色A-S型综合关联度.进一步地,将研究对象从序列数据拓展为面板数据,学者们提出了矩阵型灰色绝对<sup>[20]</sup>、网格<sup>[21]</sup>、相似<sup>[22]</sup>、接近<sup>[23]</sup>、面角关联度<sup>[24]</sup>,以及更一般的矩阵型关联度设计准则<sup>[25]</sup>.虽然这些成果极大地丰富了灰色关联分析的内容,但是,它们仍然停留在“灵感式”的算术构造层面,缺少统一的分析框架.此外,已有的灰色关联分析方法均假设序列数据等间隔分布且不含缺失值,这进一步限制了灰色关联分析的适用范围.

鉴于此,本文首先引入惩罚样条光滑法来重构本征函数及其导函数,以弱化数据观测误差和分布方式的影响;然后,设计综合本征函数静态和动态关联性的函数型关联度,论证其应用准则;最后,运用火炮身管烧蚀磨损截面特征分析实例来验证所提出方法的可靠性和有效性.

## 1 函数型灰色关联分析

### 1.1 关联算子

对于序列  $X = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$ , 设  $\mathcal{D}$  为关联算子, 则  $Y = \mathcal{D}X = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)\}$  为关联算子序列.  $\mathcal{D}$  的定义和物理意义如表 1 所示.

表1 关联算子及其意义<sup>[12]</sup>

算子	定义	意义
初值化	$y(t_k) = x(t_k)/x(t_1)$	定基比
始点零化	$y(t_k) = x(t_k) - x(t_1)$	定基增长量
初值-始点零化	$y(t_k) = [x(t_k) - x(t_1)]/x(t_1)$	定基增长率

由表 1 可知, 关联算子既是原始序列的数据预处理方式, 也是原始序列对应向量空间的仿射变换, 即

$$[y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)]^T = \Phi[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]^T + \xi.$$

其中:  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . 具体地, 初值化算子对应伸缩变换为

$$\Phi = \text{diag}\left(\frac{1}{x(t_1)}, \dots, \frac{1}{x(t_1)}\right), \xi = \mathbf{0}.$$

始点零化算子对应平移变换为

$$\Phi = I_n, \xi = -x(t_1) \times \mathbf{1}_{n \times 1}.$$

初值-始点零化算子对应仿射变换为

$$\Phi = \text{diag}\left(\frac{1}{x(t_1)}, \dots, \frac{1}{x(t_1)}\right), \xi = -\mathbf{1}_{n \times 1}.$$

由仿射变换的性质可知, 关联算子保持了原对象的“几何形状”特征, 如集合的凸性、点之间的共线性、直线的平行性、平行线段长度比例不变性等, 故其作为关联度的前置数据预处理方法是合适的.

### 1.2 本征函数

实践中, 序列  $X$  包含观测误差导致算子序列  $Y$  也包含误差, 故采用惩罚样条光滑法重构算子序列的本征函数及其高阶导函数, 具体如下.

给定基函数  $\phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_L(t)]^T$ , 本征函数的基函数表示为  $\phi^T(t)\mathbf{b}$ , 则系数优化的目标函数为

$$\mathcal{J}(\mathbf{b}) = \sum_{k=1}^n [y(t_k) - \phi^T(t_k)\mathbf{b}]^2 + \lambda \int_{t_1}^{t_n} \left[ \frac{d^r}{dt^r} \phi^T(t)\mathbf{b} \right]^2 dt. \quad (1)$$

其中: 等号右边第 1 项反映了本征函数的拟合优度; 等号右边第 2 项反映了本征函数的光滑特征;  $\lambda \in [0, \infty)$  为超参数, 用于平衡拟合优度和光滑性;  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_L]^T$  为待定系数;  $r \in \mathbb{N}^+$  为正则惩罚项的阶数, 且一般设置为 2<sup>[26]</sup>. 特别地, 当  $\lambda = 0$  时, 本征函数曲线光滑度最小; 相反地, 当  $\lambda \rightarrow \infty$  时, 本征函数曲线光滑度最大, 近似为直线. 由于基函数及其各阶导数均已知, 式 (1) 中的正则惩罚项可重写为

$$\int_{t_1}^{t_n} \left[ \frac{d^r}{dt^r} \phi^T(t)\mathbf{b} \right]^2 dt = \mathbf{b}^T \mathbf{Q} \mathbf{b}, \quad (2)$$

这里  $\mathbf{Q} = \int_{t_1}^{t_n} \frac{d^r}{dt^r} \phi(t) \frac{d^r}{dt^r} \phi^T(t) dt$  为  $L$  阶方阵. 将式 (2) 代入 (1), 目标函数可重写为

$$\mathcal{J}(\mathbf{b}) = (\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{b})^T (\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{b}) + \lambda \mathbf{b}^T \mathbf{Q} \mathbf{b}. \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \phi^T(t_1) \\ \phi^T(t_2) \\ \vdots \\ \phi^T(t_n) \end{bmatrix}.$$

由极值定理可知,系数的估计值为

$$\hat{\mathbf{b}} = [\mathbf{P}^T \mathbf{P} + \lambda \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{y}, \quad (4)$$

其中超参数 $\lambda$ 可基于广义交叉验证准则寻优来确定,即最小化广义交叉验证误差,有

$$\mathcal{J}(\lambda) = \frac{n}{[\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_\lambda)]^2} (\mathbf{y} - \mathbf{S}_\lambda \mathbf{y})^T (\mathbf{y} - \mathbf{S}_\lambda \mathbf{y}). \quad (5)$$

这里:  $\text{Tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹,  $\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{P}[\mathbf{P}^T \mathbf{P} + \lambda \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{P}^T$ 为 $n$ 阶方阵.

将超参数和估计系数代入本征函数的基函数表达式,可得到本征函数及其各阶导函数为

$$\hat{y}^{(\tau)}(t) = \frac{d^\tau}{dt^\tau} \phi^T(t) \hat{\mathbf{b}}, \quad t \in [t_1, t_n]. \quad (6)$$

其中:  $0 \leq \tau \leq r$ 为导函数的阶数,  $\tau = 0$ 表示原函数,  $\hat{y}^{(0)}(t) = \hat{y}(t)$ .

在实现上述算法时,基函数的类型和数目、超参数寻优遵循以下准则:

1) 选择B样条函数为基函数,其局部紧支撑的优良性质保证了高效的计算性能<sup>[27]</sup>;

2) 基函数的数目设置为序列长度加B样条函数的阶数<sup>[26]</sup>;

3) 在以10为底的对数尺度上对超参数进行线性搜索,确定式(5)的最小值.

**例1** 对函数 $y(t) = \sin(2\pi t) + 0.2\epsilon(t)$ 在区间 $t \in [0, 2]$ 内不规则抽样,  $\epsilon(t)$ 为高斯白噪声过程,采样所得到的离散序列 $Y_1$ 和 $Y_2$ 如图1所示.

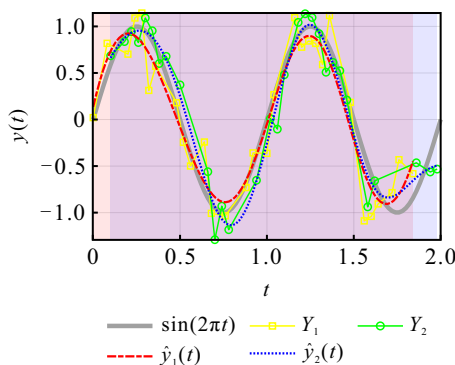


图1 离散序列的本征函数

图1表明,  $Y_1$ 和 $Y_2$ 为非等间隔、非对齐的离散序列,故已有关联度公式不再适用.为了从离散序列重构本征函数,分别使用经典的分段线性插值法和所提出惩罚样条光滑法.结果表明:分段线性插值函数折线与原始函数曲线偏离较大,而样条光滑函数

曲线能够高精度地逼近原始函数曲线.

### 1.3 关联度

对于序列 $X_i = \{x_i(t_{i,1}), x_i(t_{i,2}), \dots, x_i(t_{i,n_i})\}$ 和 $X_j = \{x_j(t_{j,1}), x_j(t_{j,2}), \dots, x_j(t_{j,n_j})\}$ ,设其关联算子序列为 $Y_i$ 和 $Y_j$ ,则本征函数以及高阶导函数分别为

$$\hat{y}_i^{(\tau)}(t), \quad t \in T_i = [t_{i,1}, t_{i,n_i}];$$

$$\hat{y}_j^{(\tau)}(t), \quad t \in T_j = [t_{j,1}, t_{j,n_j}].$$

欲定义 $\hat{y}_i^{(\tau)}(t)$ 与 $\hat{y}_j^{(\tau)}(t)$ 的关联度,首先确定二者定义域的交集为

$$T = T_i \cap T_j = [\max\{t_{i,1}, t_{j,1}\}, \min\{t_{i,n_i}, t_{j,n_j}\}]. \quad (7)$$

然后,本征函数间的距离( $\tau = 0$ )以及本征函数导函数间的距离( $1 \leq \tau \leq r$ )均可表示为

$$\|\hat{y}_i^{(\tau)}(t) - \hat{y}_j^{(\tau)}(t)\|_1 = \int_T |\hat{y}_i^{(\tau)}(t) - \hat{y}_j^{(\tau)}(t)| dt. \quad (8)$$

本征函数 $\hat{y}_i(t)$ 和 $\hat{y}_j(t)$ 仅提取了曲线几何形状的静态特征,而其导函数蕴含了本征函数曲线不同维度的几何形状动态特征,且一阶和二阶导函数分别揭示了动态“斜率”和“曲率”特征,故设计综合本征函数静态关联性与动态关联性的函数型关联度为

$$g_{i,j} = \sum_{\tau=0}^s w_\tau \mathcal{N}(\|\hat{y}_i^{(\tau)}(t) - \hat{y}_j^{(\tau)}(t)\|_1). \quad (9)$$

其中:  $0 \leq s \leq r$ 为关联度的最大阶数;  $w_\tau \in [0, 1]$ 为 $\tau$ 阶关联度的权重系数,且 $\sum_{\tau=0}^s w_\tau = 1$ ;  $\mathcal{N}(\cdot)$ 为 $[0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ 单调递减函数.

本质上,式(9)中的关联度是本征函数曲线在不同维度上几何形状关联度的组合.具体地,通过设置参数 $s$ 和权重系数 $w_\tau$ ,可得到函数型关联度的分解形式,具体如下:

1) 若 $s = 0, w_0 = 1$ ,则有

$$g_{i,j} = g_{i,j}^{(0)} = \mathcal{N}(\|\hat{y}_i^{(0)}(t) - \hat{y}_j^{(0)}(t)\|_1).$$

测度了本征函数曲线的静态关联性.

2) 若 $s = 1, w_1 = 1$ ,则有

$$g_{i,j} = g_{i,j}^{(1)} = \mathcal{N}(\|\hat{y}_i^{(1)}(t) - \hat{y}_j^{(1)}(t)\|_1).$$

测度了本征函数曲线的一阶动态关联性.

3) 若 $s = 2, w_2 = 1$ ,则有

$$g_{i,j} = g_{i,j}^{(2)} = \mathcal{N}(\|\hat{y}_i^{(2)}(t) - \hat{y}_j^{(2)}(t)\|_1).$$

测度了本征函数曲线的二阶动态关联性.

在函数型关联度式(9)中,归一化函数需要满足以下性质:单调递减、 $\mathcal{N}(0) = 1, \lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{N}(y) = 0$ ,这基本确定了该函数的几何特征.显然,初等的倒数函

数、指数函数均满足这些性质,如图2所示.

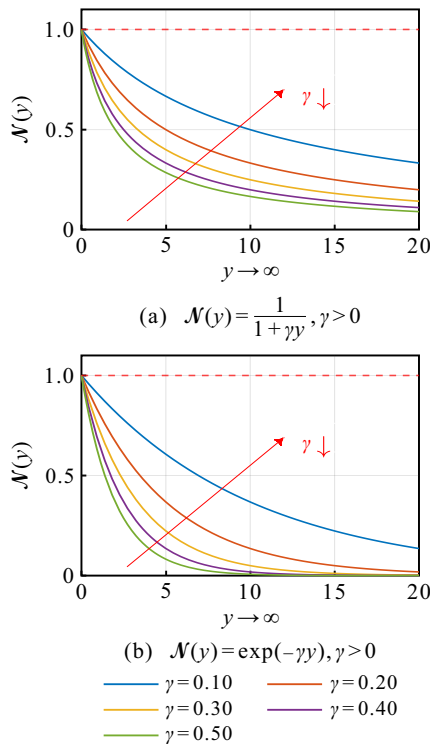


图2 不同分辨率系数下归一化函数曲线

经典的广义灰色关联度均采用倒数函数作为归一化函数,其中分辨率系数 $\gamma$ 的取值为1或其他值<sup>[12]</sup>.由图2可知,指数函数具有高分辨性,更适合作为归一化函数.事实上,也可利用非负随机变量的累积分布函数来设计归一化函数,如Fréchet分布的累积分布函数( $\Pr(Y \leq y) = \exp(-y^{-\gamma}), y \geq 0$ )的简单变形 $\mathcal{N}(y) = 1 - \exp(-y^{-\gamma})$ .

**定理1** 函数型关联度满足规范性和接近性.

**证明** 由 $\mathcal{N}(\cdot)$ 为 $[0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ 的单调递减函数可知, $\mathcal{N}(0) = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x) = 0$ .

规范性.由权重系数约束和 $\mathcal{N}(\cdot) \in (0, 1]$ 为单调递减函数可知, $0 < g_{i,j} \leq \sum_{\tau=0}^s w_{\tau} = 1$ .

若 $X_i = X_j$ ,则 $Y_i = Y_j$ .将 $Y_i$ 和 $Y_j$ 分别代入式(6),有 $\hat{y}_i^{(\tau)}(t) = \hat{y}_j^{(\tau)}(t)$ ,故

$$g_{i,j} = \sum_{\tau=0}^s w_{\tau} \mathcal{N}(\|\hat{y}_i^{(\tau)}(t) - \hat{y}_j^{(\tau)}(t)\|_1) = 1.$$

接近性.在 $n$ 维欧氏空间中,由 $X_i \rightarrow X_j$ 可知, $|x_i(k) - x_j(k)| \rightarrow 0 (\forall k = 1, 2, \dots, n)$ .

由关联算子定义可知, $Y_i = \mathcal{D}X_i$ 和 $Y_j = \mathcal{D}X_j$ 满足以下性质:

1) 若 $\mathcal{D}$ 为初值算子,则 $|y_i(k) - y_j(k)| = \left| \frac{x_i(k)}{x_i(1)} - \frac{x_j(k)}{x_j(1)} \right| \leq \left| \frac{x_j(k)}{x_i(1)x_j(1)} \right| |x_j(1) - x_i(1)| +$

$$\left| \frac{1}{x_i(1)} \right| |x_i(k) - x_j(k)| \rightarrow 0;$$

2) 若 $\mathcal{D}$ 为始点零化算子,则 $|y_i(k) - y_j(k)| = |x_i(k) - x_i(1) - x_j(k) + x_j(1)| \leq |x_i(k) - x_j(k)| + |x_j(1) - x_i(1)| \rightarrow 0;$

3) 若 $\mathcal{D}$ 为初值-始点零化算子,则 $|y_i(k) - y_j(k)| = \left| \frac{x_i(k)}{x_i(1)} - \frac{x_j(k)}{x_j(1)} \right| \rightarrow 0$ ,即

$$X_i \rightarrow X_j \Rightarrow Y_i \rightarrow Y_j.$$

结合本征函数以及导函数的性质,由 $\mathcal{N}(\cdot)$ 为单调递减函数可知,有

$$Y_i \rightarrow Y_j \Rightarrow \hat{y}_i^{(\tau)}(t) \rightarrow \hat{y}_j^{(\tau)}(t) \Rightarrow g_{i,j} \rightarrow 1. \quad \square$$

### 1.4 算法步骤与应用准则

函数型灰色关联分析的算法流程可归纳为以下步骤.

step 1: 选择合适的关联算子;

step 2: 由式(6)确定算子序列的本征函数及其导函数;

step 3: 由式(7)确定本征函数定义域间的交集,将交集代入式(8)确定函数间的距离;

step 4: 选择归一化函数 $\mathcal{N}(\cdot)$ 和分辨率系数 $\gamma$ ,设置权重系数 $w_{\tau}$ 和最大阶数 $s$ ,将这些参数代入式(9)确定函数型关联度.

在应用上述算法解决实际问题时,可参考以下经验准则.

1) 关联算子是具有物理意义的数据预处理方式(如表1所示).对于不同量纲(或物理单位)的变量,初值化算子可用于去量纲,使得不同量纲变量间的比较可行.此外,由于该算子的数学内涵是伸缩变换,具有一些良好的数学性质(参见第1.1节),是实践中推荐的去量纲方法.

2) 式(6)中本征函数的导函数具有清晰的物理意义,对于同量纲的变量,建议直接测度变量间的关联度(即不使用任何关联算子),以避免数据预处理可能会给结果分析带来的困扰<sup>[28]</sup>.

3) 归一化函数的单调递减性质保证了关联度与相异性度量的一致性,不存在关联度大且相异性高的情景.这为以关联度为准则的变量排序或选择提供了依据.需要重申的是,分辨率系数的取值不应影响变量排序,建议设为独立于变量的确定数值.

4) 式(9)中权重系数的取值直接决定不同维度关联度对于总体关联度的贡献,权重系数越大,贡献占比越高.通过控制权重系数可得到不同维度的关联度,如若令 $w_0 = 1$ ,则为静态特征的关联度;若令

$w_1 = 1$ , 则为一阶动态特征的关联度。

此外, 函数型关联分析不仅提供综合关联度, 且揭示了本征函数曲线在不同维度的关联性, 具有更宽的适用范围和更好的实用性。

## 2 应用实例

火炮是现代战场使用最为频繁的主力作战装备之一, 其以火力强、灵活可靠、经济性和通用性等优良特性, 已成为战斗行动的主要内容和左右战场形势的重要因素。身管作为火炮的关键核心部件, 其购置费用约占全炮价格的30%~40%, 可以说身管寿命就是火炮寿命<sup>[29]</sup>。目前, 我国高膛压火炮、中小口径直射炮的身管寿命与欧美等发达国家尚有不小的差距, 迫切需求进一步延长我国火炮身管的使用寿命, 加强火炮身管的健康管理, 提高火炮使用的经济效益<sup>[30]</sup>。

火炮身管寿命相关特征主要包括身管烧蚀磨损

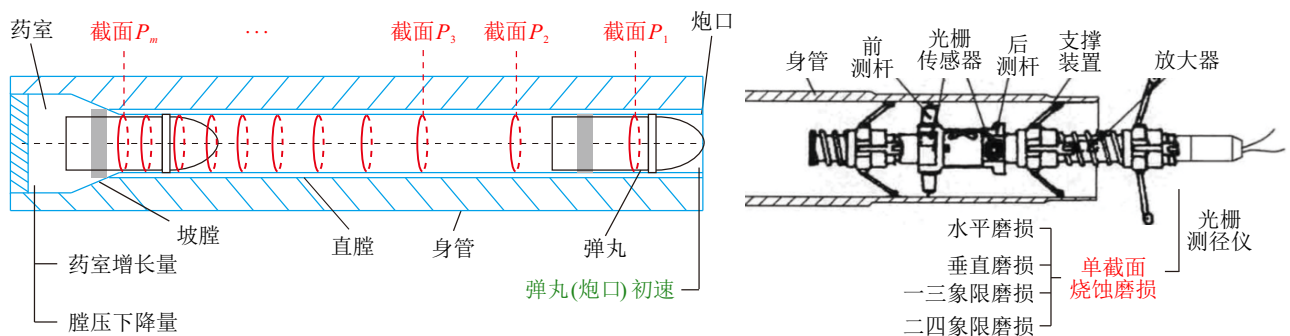


图3 火炮身管剖面(左)和多截面烧蚀磨损测量(右)

### 2.1 数据特征

在某型坦克炮的连续射击试验中, 记录了射弹发数为1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 (单位: 10发) 时, 距炮口300, 4800, 4950, 5050, 5150 (单位: mm) 截面处, 身管的烧蚀磨损状态 (单位: mm) 与弹丸的炮口初速 (单位: m/s)。以射弹发数为索引, 射弹发数间隔为10发和20发, 弹丸炮口初速呈现小样本、非等间隔分布特征, 身管内膛烧蚀磨损的测量呈现高维度、非等间隔分布特征。总体而言, 这些不完备的数据形成了非等间隔采样的多变量时间序列, 符号表示如下:  $t$ 为射弹发数,  $x_i(t)$ 为截面 $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) 处身管的烧蚀磨损状态,  $u(t)$ 为弹丸的炮口初速。经脱敏处理的数据<sup>[30]</sup>如图4所示。

### 2.2 计算结果

首先, 对5个截面处身管烧蚀磨损和1个弹丸初速序列使用惩罚样条光滑法来重构它们的本征函数以及一阶导函数, 如图4所示。由图4可见, 烧蚀磨损和弹丸初速的本征函数波动小, 但是, 其一阶导函数的波动大。然后, 由本征函数一阶导函数的物理

量、药室增长量、弹丸初速减退量、膛压下降量、射击密集度变化量、射程或射高减退量等。但是, 限于经济成本、传感技术、测量设备以及作战任务不可中断等因素, 药室容量、膛压、密集度、射程、射高等测量难度大, 数据采样少, 而弹丸炮口初速和内径测量次数相对较多。如在火炮定型试验中, 一般仅进行3次射程和射击密集度试验, 5次以上弹丸炮口初速和身管内径测量。以弹丸炮口初速减退量为寿命特征预测身管剩余寿命, 是实现火炮身管健康管理的有效途径<sup>[30]</sup>。鉴于此, 刘怡昕等<sup>[31]</sup>提出了由炮膛磨损规律来确定火炮弹丸初速减退量的思路, 其关键之一是从多个烧蚀磨损截面中选择典型截面特征。以射弹发数为索引, 这些测量数据呈现小样本、含观测误差、非等间隔分布特征。此外, 身管烧蚀磨损截面也是非等间隔分布的, 如图3所示。

意义可知, 它们分别对应烧蚀磨损量和初速减退量, 即“由炮膛磨损规律确定火炮弹丸初速减退量”中的两个物理量, 故需要测度各截面处身管烧蚀磨损一阶导函数与弹丸初速一阶导函数间的关联性。

由于烧蚀磨损与弹丸初速的物理量纲不同, 采用初值化算子做去量纲化处理, 即

$$\frac{d}{dt} \hat{g}_i(t) = \left[ \frac{d}{dt} \hat{x}_i(t) \right] / \left[ \frac{d}{dt} \hat{x}_i(t) \Big|_{t=t_1} \right]$$

和

$$\frac{d}{dt} \hat{v}(t) = \left[ \frac{d}{dt} \hat{u}(t) \right] / \left[ \frac{d}{dt} \hat{u}(t) \Big|_{t=t_1} \right],$$

如图5所示。最后, 设置式(9)中权重系数为 $w_1 = 1$ 、倒数归一化函数( $g_i^{rec}$ )和指数归一化函数( $g_i^{exp}$ )的分辨系数为 $\gamma = 1$ , 得到函数型关联度结果见图5。

由图5可知, 两种归一化函数下5个烧蚀磨损截面的关联序关系均为

$$P_5 \succ P_3 \succ P_4 \succ P_2 \succ P_1,$$

表明距炮口5150 mm处的烧蚀磨损对于弹丸初速减退的贡献最大, 然后依次为距炮口4950 mm、

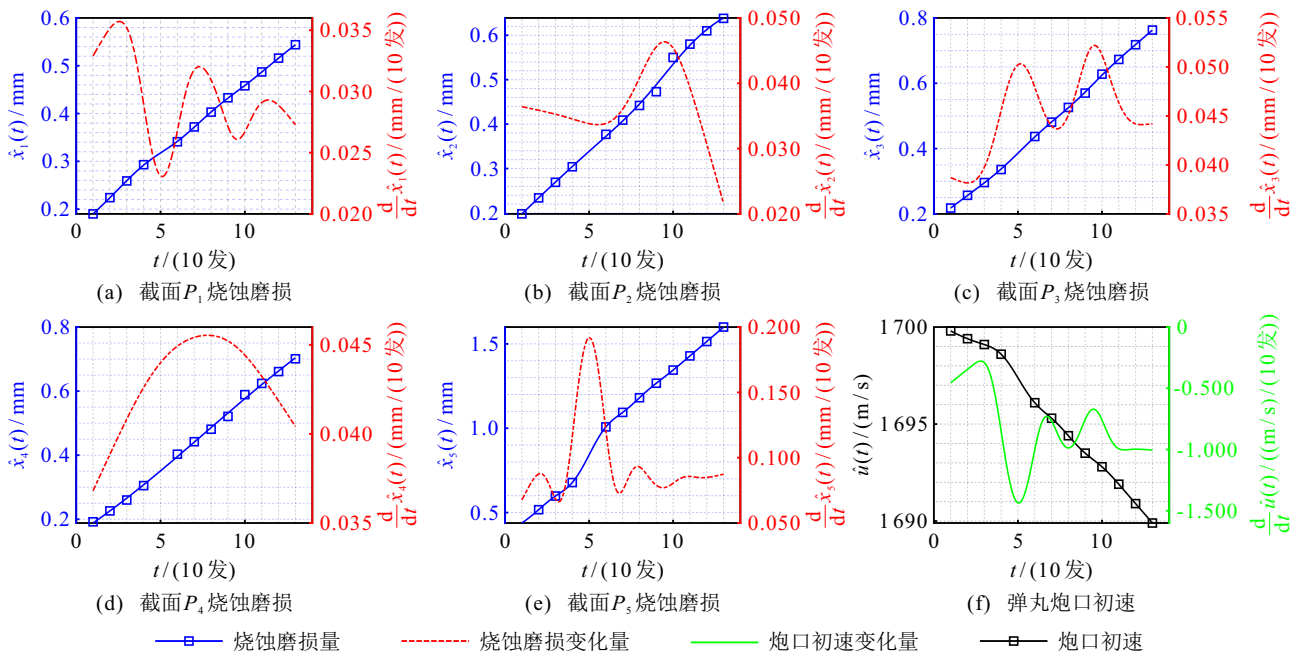


图4 烧蚀磨损和弹丸初速的本征函数以及导函数

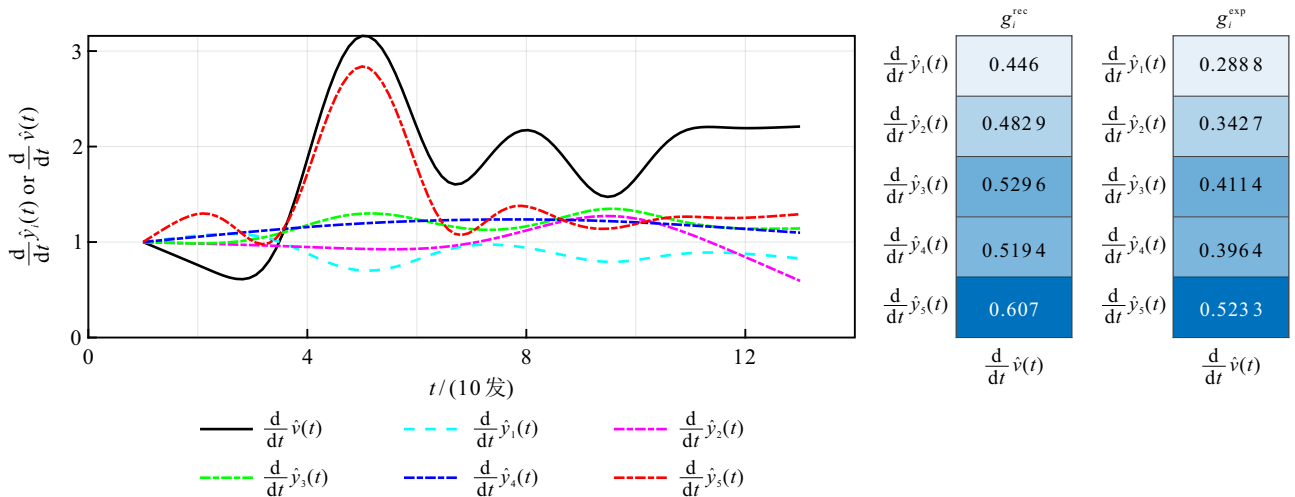


图5 烧蚀磨损与弹丸初速的函数型灰色关联度

5050 mm、4800 mm、300 mm 处,这与镀铬身管的烧蚀磨损经验规律(即直膛起始部 5600 mm ~ 5100 mm 区间烧蚀磨损严重,4950 mm 附近存在烧蚀磨损峰,5100 mm ~ 4000 mm 区间烧蚀磨损量呈减小趋势<sup>[30]</sup>)一致。

从火炮内弹道机理来看,烧蚀磨损的截面关联序关系成因如下:在直膛起始部(截面  $P_5$  附近),高温高压和弹丸挤进导致烧蚀磨损严重,对弹丸初速减退影响最大;火药燃烧产生的高速气流沿膛壁惯性运动,使得膛靠近膛壁处(截面  $P_3$  附近)形成烧蚀磨损峰,对弹丸初速减退作用显著;随着弹丸沿直膛向炮口移动,身管内压力逐渐降低,烧蚀磨损减轻,对弹丸初速减的影响也随之减弱。

### 2.3 对比分析

火炮身管烧蚀磨损截面特征分析的核心是测度

截面处烧蚀磨损变化量与弹丸初速变化量间的关系,故选择相关分析方法与灰色关联分析方法作为对比模型: Pearson 线性相关分析<sup>[32]</sup>(模型 I)、Spearman 秩相关分析<sup>[32]</sup>(模型 II)、灰色相对关联分析<sup>[17]</sup>(模型 III)及其改进<sup>[18]</sup>(模型 IV)。需要申明的是,模型 I 和模型 II 侧重于序列间的线性和非线性相关关系,模型 III 和模型 IV 侧重于序列间的几何形状相似关系。

此外,对比模型要求序列不含缺失值,故运用均值法填充缺失值。对生成的等间隔时间序列作差分

表2 对比模型的相关系数或关联度

模型	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
模型I	0.8373	0.1665	-0.5665	-0.2271	-0.7051
模型II	0.8063	0.1652	-0.6418	-0.4603	-0.7905
模型III	0.5179	0.5333	0.5959	0.6353	0.6266
模型IV	0.5101	0.5231	0.5869	0.6188	0.6162

运算,得到截面烧蚀磨损变化量序列和弹丸初速变化量序列.最后,针对变化量序列计算4个对比模型的结果,如表2所示.

由表2可知:以相关系数绝对值为准则,对比模型I与对比模型II生成的截面序关系为

$$P_1 \succ P_5 \succ P_3 \succ P_4 \succ P_2;$$

以关联度为准则,对比模型III与对比模型IV生成的截面序关系为

$$P_4 \succ P_5 \succ P_3 \succ P_2 \succ P_1.$$

这两种序关系与镀铬身管的烧蚀磨损经验规律差异大,结果不可靠.究其原因在于以下3个方面:1)模型I和模型II是统计相关方法,需要更多的样本数据来保证结果的可靠性;2)模型III和模型IV采用线性插值重构本征函数,精度低且对于观测误差敏感,造成结果不可靠;3)所有对比模型均以差分数据为基础,而用差分数据来表征变化量本身就是一种低精度的近似方法,难以保证后续模型生成可靠的计算结果.

综上,在函数型关联分析中,本征函数的一阶导函数表征了烧蚀磨损变化和弹丸初速减退两个物理量,避免了差分近似所带来的误差,且模型结果与经验规律一致,展示了所提出模型相较于对比模型的合理性和优越性.

### 3 结论

本文提出了适用于非等间隔含噪序列数据的函数型灰色关联分析方法,相比于现有灰色关联分析方法,该方法突破了要求“序列数据等间隔分布且不含观测误差”的限制,有效降低了观测误差的影响.函数型关联度的分解形式在静态和动态两个维度上测度了序列间的关联性且具有物理可解释性.实证案例表明,所提出方法能够准确识别身管截面烧蚀磨损量与弹丸初速减退量间的关联关系,结果可靠有效.

此外,所提出方法的核心之一是在函数空间设计相似性度量,这也是人工智能新兴领域——函数空间学习理论<sup>[33]</sup>的研究内容.因此,在函数空间探讨灰色关联分析的数理基础,建立度量学习方法是未来的研究内容之一.

### 参考文献 (References)

- [1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.  
(Deng J L. Basis of grey theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002.)
- [2] 赵敬华, 施佳, 张艳, 等. 异质信息环境下基于案例推

理和灰色关联分析的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3479-3487.

(Zhao J H, Shi J, Zhang Y, et al. A multi-attribute decision-making method based on case-based reasoning and grey correlation analysis in heterogeneous information environment[J]. Control and Decision, 2024, 39(10): 3479-3487.)

- [3] Zhu G Y, He L J, Ju X W, et al. A fitness assignment strategy based on the grey and entropy parallel analysis and its application to MOEA[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 265(3): 813-828.
- [4] Zhai C H, Wang J J, Tu Y P, et al. Robust optimization of 3D printing process parameters considering process stability and production efficiency[J]. *Additive Manufacturing*, 2023, 71: 103588.
- [5] 谢乃明, 刘思峰. 几类关联度模型的平行性和一致性[J]. *系统工程*, 2007, 25(8): 98-103.  
(Xie N M, Liu S F. The parallel and uniform properties of several relational models[J]. *Systems Engineering*, 2007, 25(8): 98-103.)
- [6] 唐五湘. T型关联度及其计算方法[J]. *数理统计与管理*, 1995, 14(1): 34-37.  
(Tang W X. T-type correlation degree and its calculation method[J]. *Journal of Applied Statistics and Management*, 1995, 14(1): 34-37.)
- [7] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 灰色斜率关联度的改进[J]. *中国工程科学*, 2004, 6(3): 41-44.  
(Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. Improvement on degree of grey slope incidence[J]. *Engineering Science*, 2004, 6(3): 41-44.)
- [8] 靳冰洋, 刘峥, 秦基凯. 基于灰色关联度的两级实时航迹关联算法[J]. *兵工学报*, 2020, 41(7): 1330-1338.  
(Jin B Y, Liu Z, Qin J K. Two-stage real-time track correlation algorithm based on gray correlation[J]. *Acta Armamentarii*, 2020, 41(7): 1330-1338.)
- [9] 王文平, 马政. 整体性分析和逆向邓氏灰色关联分析模型[J]. *东南大学学报: 英文版*, 2023, 39(3): 248-255.  
(Wang W P, Ma Z. Integrity analysis and inverse Deng's grey relational analysis model[J]. *Journal of Southeast University: English Edition*, 2023, 39(3): 248-255.)
- [10] Xie N M, Liu S F. A novel grey relational model based on grey number sequences[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2011, 1(2): 117-128.
- [11] 王德青, 朱建平, 刘晓葳, 等. 函数型数据聚类分析研究综述与展望[J]. *数理统计与管理*, 2018, 37(1): 51-63.  
(Wang D Q, Zhu J P, Liu X W, et al. Review and prospect of functional data clustering analysis[J]. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2018, 37(1): 51-63.)
- [12] 韦保磊, 谢乃明. 广义灰色关联分析模型的统一表述及性质[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(1): 226-235.  
(Wei B L, Xie N M. Unified representation and properties of generalized grey relational analysis models[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2019, 39(1): 226-235.)
- [13] Liu S F, Yang Y J, Forrest J Y L. Grey systems analysis:

- Methods, models and applications[M]. Singapore: Springer, 2022.
- [14] 陈勇明, 张明. 灰色样条绝对关联度模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(5): 1304-1310.  
(Chen Y M, Zhang M. Cubic spline based grey absolute relational grade model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2015, 35(5): 1304-1310.)
- [15] Wei B L, Li Y W. Grey relational analysis in the metric space of continuous functions: Foundations, extensions, and applications[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2025, 142: 115978.
- [16] 魏勇, 曾柯方. 关联度公理的简化与特殊关联度的公理化定义[J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(6): 1528-1534.  
(Wei Y, Zeng K F. The simplified relational axioms and the axiomatic definition of special incidence degrees[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2015, 35(6): 1528-1534.)
- [17] 刘震, 党耀国, 周伟杰, 等. 新型灰色接近关联模型及其拓展[J]. *控制与决策*, 2014, 29(6): 1071-1075.  
(Liu Z, Dang Y G, Zhou W J, et al. New grey nearness incidence model and its extension[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(6): 1071-1075.)
- [18] Luo D, Wei B L, Lin P Y. The optimization of several grey incidence analysis models[J]. *Journal of Grey System*, 2015, 27(4): 1-11.
- [19] 叶璟, 李艳. 双向灰色 A-S 型综合关联模型及应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2023, 43(11): 3336-3352.  
(Ye J, Li Y. Bidirectional grey A-S comprehensive relational model and its applications[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2023, 43(11): 3336-3352.)
- [20] 张可, 刘思峰. 灰色关联聚类在面板数据中的扩展及应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(7): 1253-1259.  
(Zhang K, Liu S F. Extended clusters of grey incidences for panel data and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, 30(7): 1253-1259.)
- [21] 刘震, 党耀国, 钱吴永, 等. 基于面板数据的灰色网格关联度模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(4): 991-996.  
(Liu Z, Dang Y G, Qian W Y, et al. Grey grid incidence model based on panel data[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(4): 991-996.)
- [22] 崔立志, 刘思峰. 面板数据的灰色矩阵相似关联模型及其应用[J]. *中国管理科学*, 2015, 23(11): 171-176.  
(Cui L Z, Liu S F. Grey matrix similar incidence model for panel data and its application[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2015, 23(11): 171-176.)
- [23] 吴鸿华, 穆勇, 屈忠锋, 等. 基于面板数据的接近性和相似性关联度模型[J]. *控制与决策*, 2016, 31(3): 555-558.  
(Wu H H, Mu Y, Qu Z F, et al. Similarity and nearness relational degree based on panel data[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(3): 555-558.)
- [24] 安艺萌, 党耀国, 杨德岭, 等. 基于面板数据灰色面角关联模型的区域PM<sub>2.5</sub>健康风险相关因素识别[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3): 899-908.  
(An Y M, Dang Y G, Yang D L, et al. Identification of regional PM<sub>2.5</sub> health risk factors based on panel data grey dihedral angle incidence model[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(3): 899-908.)
- [25] Sun D, Luo D, Zhang H. Modelling principles of grey matrix incidence analysis for panel data[J]. *Journal of Grey System*, 2021, 33(3): 16-30.
- [26] Cao J G, Cai J, Wang L L. Estimating curves and derivatives with parametric penalized spline smoothing[J]. *Statistics and Computing*, 2012, 22(5): 1059-1067.
- [27] Wahba G. Spline models for observational data[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.
- [28] 肖新平. 关于灰色关联度量化模型的理论研究和评论[J]. *系统工程理论与实践*, 1997, 17(8): 76-81.  
(Xiao X P. Theoretical study and reviews on the computation method of grey interconnect degree[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 1997, 17(8): 76-81.)
- [29] 金文奇, 冯三任, 徐达. 火炮身管寿命推断技术与工程实践[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.  
(Jin W Q, Feng S R, Xu D. Extrapolation technology and engineering practice for gun barrel life in the approval test[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2014.)
- [30] 毛保全, 赵其进, 白向华, 等. 火炮身管延寿技术研究现状与展望[J]. *兵工学报*, 2023, 44(3): 638-655.  
(Mao B Q, Zhao Q J, Bai X H, et al. Review and prospect of life extension technology for gun barrels[J]. *Acta Armamentarii*, 2023, 44(3): 638-655.)
- [31] 刘怡昕, 王桂玉. 由炮膛磨损规律确定火炮初速减退量[J]. *兵工学报*, 2007, 28(1): 7-9.  
(Liu Y X, Wang G Y. Determination of muzzle velocity loss by law of bore wear[J]. *Acta Armamentarii*, 2007, 28(1): 7-9.)
- [32] Makowski D, Ben-Shachar M S, Patil I, et al. Methods and algorithms for correlation analysis in R[J]. *The Journal of Open Source Software*, 2020, 5(51): 2306.
- [33] 徐宗本. 人工智能的 10 个重大数理基础问题[J]. *中国科学: 信息科学*, 2021, 51(12): 1967-1978.  
(Xu Z B. Ten fundamental problems for artificial intelligence: Mathematical and physical aspects[J]. *Scientia Sinica: Informationis*, 2021, 51(12): 1967-1978.)

### 作者简介

刘宁 (1980-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为火炮先进发射技术、身管寿命试验技术, E-mail: [ln101@163.com](mailto:ln101@163.com);

韦保磊 (1989-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为灰色系统理论、机器学习与动力系统, E-mail: [weiblei@yeah.net](mailto:weiblei@yeah.net).