

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于奇异值分解的灰色交互作用关联分析模型及其应用

吴鸿华, 胡阿芹, 韩雪, 李雅芳

引用本文:

吴鸿华, 胡阿芹, 韩雪, 等. 基于奇异值分解的灰色交互作用关联分析模型及其应用[J]. *控制与决策*, 2025, 40(8): 2450–2458.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.1345>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计

Design of Kalman filter for fractional-order systems with correlated fractional-order colored noises

*控制与决策*. 2021, 36(7): 1672–1678 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1418>

#### 嵌入重采样技术的C4.5决策树集成分类算法的临床医学预测

Clinical prediction of C4.5 decision tree classification algorithm with embedded resampling technique

*控制与决策*. 2021, 36(6): 1342–1350 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1247>

#### 基于波段影像统计信息量加权K-means聚类的高光谱影像分类

Algorithm based on band statistical information weighted K-means for hyperspectral image classification

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1119–1126 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1516>

#### 基于KRLS的非均匀采样非线性系统辨识

Identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on KRLS

*控制与决策*. 2021, 36(12): 3049–3055 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0962>

#### 基于协同聚类和权重注意力稀疏自编码网络的变化检测方法

Change detection approach based on cooperative clustering and weighted attention sparse autoencoder

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2442–2450 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1633>

# 基于奇异值分解的灰色交互作用关联分析模型及其应用

吴鸿华<sup>1†</sup>, 胡阿芹<sup>2</sup>, 韩雪<sup>1</sup>, 李雅芳<sup>1</sup>

(1. 济南大学 数学科学学院, 济南 250022; 2. 临沂大学 商学院, 山东 临沂 276000)

**摘要:** 针对传统灰色关联分析模型无法测度因素间交互作用且未考虑数据噪声的问题, 基于奇异值分解提出灰色交互作用关联分析模型. 首先, 通过引入交互作用矩阵, 利用奇异值分解方法, 结合贡献率准则来确定关键奇异值; 然后, 构建单一因素和交互作用的灰色关联系数, 并最终得到单一因素和考虑交互作用的灰色关联度, 所提出模型能够满足规范性、对称性、数乘变换不变性等性质, 并克服对象排列顺序对于关联度的影响; 最后, 将所提出模型应用于黄河流域碳排放单一因素和交互作用驱动因素分析, 识别出关键影响因子, 通过实例分析结果表明所提出模型的合理性和有效性. 稳定性和置换检验分析进一步验证了所提出模型的稳健性.

**关键词:** 灰色关联分析; 交互作用; 奇异值分解; 面板数据; 数据噪声

中图分类号: N941.5 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1345

引用格式: 吴鸿华, 胡阿芹, 韩雪, 等. 基于奇异值分解的灰色交互作用关联分析模型及其应用 [J]. 控制与决策, 2025, 40(8): 2450-2458.

## A grey interactional relational analysis model based on singular value decomposition and its applications

WU Hong-hua<sup>1†</sup>, HU A-qin<sup>2</sup>, HAN Xue<sup>1</sup>, LI Ya-fang<sup>1</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China; 2. School of Business, Linyi University, Linyi 276000, China)

**Abstract:** To address the limitations of traditional grey relational analysis models, which fail to measure interaction between factors and do not account for data noise, a grey interactional relational analysis model based on singular value decomposition (SVD) is proposed. By introducing an interactional matrix and using SVD, the key singular values can be determined using a contribution rate criterion. Subsequently, grey relational coefficients for both individual factors and interaction effects are constructed, leading to the grey relational degrees considering both individual and interaction effects. The proposed model satisfies the properties of normalization, symmetry, and invariance under scalar transformation, while also overcoming the impact of the object arrangement order on relational degree. Finally, the model is used to analyze single-factor and interaction-driven influences on carbon emissions in the Yellow River Basin, identifying key influencing factors. The results demonstrate the rationality and effectiveness of the proposed model. Stability and permutation tests are further conducted to validate the robustness of the model.

**Keywords:** grey relational analysis; interaction; singular value decomposition; panel data; data noise

## 0 引言

灰色关联分析为灰色系统理论的核心部分, 在不确定性系统分析中发挥了重要作用. 灰色系统理论由 Deng<sup>[1]</sup> 于 20 世纪 80 年代提出, 旨在处理信息不完全、样本不足或系统信息量较少的复杂系统问题. 与传统的统计分析方法相比, 灰色系统更适合小样本、贫信息的系统行为描述, 尤其是难以获取精确数据的系统和不确定性较高的领域. 灰色关联分析

的基本原理是利用不同指标序列间的“关联度”来刻画系统因素的相关性, 通过计算灰色关联度来分析变量间的关系, 揭示系统因素间的相对影响力. 由于灰色关联分析对于样本数量和数据分布要求较低, 已成功应用于众多领域, 包括经济与管理<sup>[2]</sup>、医学教育<sup>[3]</sup>、工程与技术<sup>[4]</sup>、地质与环境保护<sup>[5]</sup>、生物科学<sup>[6]</sup>以及水利水电<sup>[7]</sup>等. 此外, 灰色控制理论、灰色育种科学和气象灰色系统分析等新兴的跨学科领域已逐

收稿日期: 2024-11-19; 录用日期: 2025-03-14.

基金项目: 山东省社科规划项目 (23CGLJ03).

责任编委: 刘宝碇.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: ss\_wuhh@ujn.edu.cn.

步发展起来<sup>[8]</sup>,并在学术界得到了广泛关注.

自邓氏关联分析模型提出以来,众多学者投入理论研究并取得了一系列有价值的成果.一些重要的扩展模型陆续涌现,包括改进的灰色斜率关联分析模型<sup>[9]</sup>、相似性和接近性灰色关联分析模型<sup>[10]</sup>、灰色凸关联分析模型<sup>[11]</sup>、负向灰色关联模型<sup>[12]</sup>以及交叉序列灰色关联分析模型<sup>[13]</sup>等.

近年来,随着面板数据分析和多属性决策研究逐步向矩阵样本拓展,灰色关联分析模型进一步延伸至面板数据.张可等<sup>[14]</sup>率先引入了面板数据的空间投影方法,通过表面簇类来描述其结构,并提出了灰色扩展绝对关联分析模型,然而,由于表面簇类的构建缺乏唯一性,关联度存在不稳定性问题<sup>[15]</sup>;为此,刘振等<sup>[16]</sup>用空间网格取代曲面簇类,通过测度曲线线段的变化趋势,提出了灰色网格关联度;此外,吴鸿华等<sup>[17]</sup>将面板数据投影到空间四面体网格,提出了灰色四面体网格关联分析模型;吴利丰等<sup>[18]</sup>基于黑塞矩阵和凸度提出了灰色凸关联分析模型;钱吴永等<sup>[19]</sup>通过构建“水平”“增量”和“变化”3种距离,加强了灰色关联分析框架;为进一步提升模型的可靠性和稳定性,Sun等<sup>[20]</sup>开发了一种新的灰色时空关联分析模型;Yin等<sup>[21]</sup>提出了一种基于向量投影的灰色投影关联分析模型,但是该模型不满足对称性;为应对面板数据关联分析模型的检验难题,党耀国等<sup>[22]</sup>构建了灰色关联聚类检验模型;此外,Zhang等<sup>[23]</sup>基于指标维度和时间维度的梯度特征,提出了用于面板数据的灰色梯度关联分析模型;为了分析心血管疾病与空气污染物间的关系,Feng等<sup>[5]</sup>结合几何投影和高斯函数提出了灰色投影关联分析模型;为处理不同尺度数据,Zhang等<sup>[24]</sup>基于空间金字塔池化方法提出了多变量灰色关联分析模型;翟艳丽等<sup>[25]</sup>通过二元指标子矩阵分解,定义点集内绝对偏差的平均值和标准差,提出了灰色点集关联分析模型;最近,安艺萌等<sup>[26]</sup>构建了灰色面角关联分析模型,很好地刻画了面板数据整体性特征;Hu等<sup>[27]</sup>提出了一种新型灰色关联分析模型,融合了因子间的耦合关系;刘宁等<sup>[28]</sup>设计了函数型灰色关联分析模型,解决了非等间隔含噪序列数据精度低或不适用等问题;孙婧等<sup>[29]</sup>构建了灰色差值关联分析模型,改进了秩序一致性和稳定性,同时有效地处理了正负关系.

上述研究在丰富灰色关联分析模型理论方面取得了显著进展,提出了多种扩展模型来适应复杂的面板数据结构,但是,现有灰色关联分析模型仍然存在一些不足之处.

1) 现有的关联分析模型多适用于单一因素的影响性分析,因素间交互作用影响性分析存在困难.事实上,系统特征行为多存在指标间的交互作用影响.如煤炭消费与第二产业存在交互影响,共同对碳排放产生影响,因此,对该类问题的关联分析建模需要考虑指标间的交互作用对于特征行为因素的影响.

2) 传统关联分析建模未考虑数据噪声的影响.事实上,由于人为因素、设备精度以及采集方法的限制,所获得的数据不可避免地存在噪声.因此,去除噪声后的数据再进行关联分析建模更能揭示因素间的真实关联关系.

鉴于此,本文基于奇异值分解提出灰色关联分析模型.所提出模型不仅能够分析单一因素的影响性分析,且能够分析因素交互作用的影响.利用矩阵的奇异值测度样本间的关联关系,能够很好地反映数据的整体性特征.选取满足特定信息贡献度的奇异值,去掉噪声影响较大的奇异值,使其具有较强的抗噪声能力,可增强模型的稳定性.所提出模型能够测度指标间的交互作用对于特征行为因素的影响,可进一步拓展关联分析模型的应用范围.所提出模型已成功应用于黄河流域碳排放的单一因素和交互作用影响分析,实例分析结果能够表明所提出模型的合理性和有效性.通过稳定性和置换检验分析,进一步验证了所提出模型的稳健性.

## 1 基于奇异值分解的灰色关联分析模型

### 1.1 模型的构建

面板数据包括指标截面数据和时间信息,同时具有时间维度和指标维度.对于面板数据,可从时间、指标、对象等3个维度进行建模.它们的建模机理相同,本文仅给出指标视角建模方法.

**定义1** 设指标 $s$ 关于对象 $i$ 在时间 $t$ 的数值为 $x_s(i, t)$ ,则称

$$X_s = \begin{bmatrix} x_s(1, 1) & x_s(1, 2) & \dots & x_s(1, n) \\ x_s(2, 1) & x_s(2, 2) & \dots & x_s(2, n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_s(N, 1) & x_s(N, 2) & \dots & x_s(N, n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

为指标 $s$ 的行为矩阵,简记为 $X_s = (x_s(i, t))_{N \times n}$ ,面板数据序列 $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ 称为指标行为序列.

**定义2** 设指标 $s$ 的行为矩阵为 $X_s (s = 1, 2, \dots, m)$ ,矩阵 $X_s$ 可分解为

$$X_s = U_s \Lambda_s V_s^T. \quad (2)$$

其中: $U$ 为 $N \times N$ 的正交矩阵; $V^T$ 为 $n \times n$ 的正交矩阵; $\Lambda_s$ 为对角阵,其主对角线的元素 $\sigma_{s_1} \geq \sigma_{s_2} \geq$

... ≥ σ<sub>s<sub>r<sub>s</sub></sub> > 0, r<sub>s</sub>为矩阵 X<sub>s</sub>的秩, 其他元素为 0, 则称 σ<sub>s<sub>1</sub></sub>, σ<sub>s<sub>2</sub></sub>, ..., σ<sub>s<sub>r<sub>s</sub></sub> 为矩阵 X<sub>s</sub>的奇异值.</sub></sub>

矩阵奇异值的大小反映了矩阵的“重要性”, 较大的奇异值表示矩阵的主要成分, 而较小的奇异值表示次要成分或噪声. 为了消除数据噪声的影响, 选择贡献率超过一定阈值 δ 的奇异值进行建模, 如 0.9, 0.95, 0.98. 为此, 需要计算奇异值的贡献率, 即

$$\eta_s(k) = \frac{\sum_{j=1}^k \sigma_{s_j}^2}{r_s}, \quad (3)$$

其中 σ<sub>s<sub>1</sub></sub> ≥ σ<sub>s<sub>2</sub></sub> ≥ ... ≥ σ<sub>s<sub>r<sub>s</sub></sub>. 选择最小的 k 使得累计贡献率达到或超过 δ, 记为 k<sub>sδ</sub>, 即满足</sub>

$$\frac{\sum_{j=1}^{k_{s\delta}} \sigma_{s_j}^2}{r_s} \geq \delta. \quad (4)$$

实际应用时, 所有系统行为矩阵奇异值的贡献率均大于 δ, 记为 k<sub>sδ</sub>. 此时满足

$$k_\delta = \max_{0 \leq s \leq m} \{k_{s\delta}\}.$$

**定义 3** 设系统两指标行为矩阵分别为 X<sub>s<sub>1</sub></sub> = (x<sub>s<sub>1</sub></sub>(i, t))<sub>N×n</sub>, X<sub>s<sub>2</sub></sub> = (x<sub>s<sub>2</sub></sub>(i, t))<sub>N×n</sub>. 记

$$X_{(s_1 s_2)} = (x_{(s_1 s_2)}(i, t))_{N \times n}, \quad (5)$$

其中 x<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub></sub>)(i, t) = √x<sub>s<sub>1</sub></sub>(i, t)x<sub>s<sub>2</sub></sub>(i, t), 则称 X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub></sub>) 为指标 s<sub>1</sub> 和 s<sub>2</sub> 的交互作用矩阵.</sub></sub>

关联分析通过计算关联度来衡量两因素序列的关联关系. 为了更准确地揭示序列间的联系, 需要尽可能真实地刻画其实际特征. 对于矩阵型样本, 奇异值能够整体反映矩阵的特性. 从接近性角度来看, 若样本矩阵的奇异值分布越接近, 则它们的相关性越强; 反之, 则越弱. 因此, 奇异值可用于测度样本矩阵的相关程度, 并能够有效体现其整体特征.

**定义 4** 设系统特征指标行为矩阵为 X<sub>0</sub>, 系统相关指标行为矩阵为 X<sub>s</sub> (s = 1, 2, ..., m), X<sub>0</sub> 和 X<sub>s</sub> 奇异值分别为 σ<sub>0<sub>1</sub></sub>, σ<sub>0<sub>2</sub></sub>, ..., σ<sub>0<sub>r<sub>0</sub></sub></sub> 和 σ<sub>s<sub>1</sub></sub>, σ<sub>s<sub>2</sub></sub>, ..., σ<sub>s<sub>r<sub>s</sub></sub></sub>, 且 σ<sub>0<sub>1</sub></sub> ≥ σ<sub>0<sub>2</sub></sub> ≥ ... ≥ σ<sub>0<sub>r<sub>0</sub></sub></sub>, σ<sub>s<sub>1</sub></sub> ≥ σ<sub>s<sub>2</sub></sub> ≥ ... ≥ σ<sub>s<sub>r<sub>s</sub></sub></sub>, δ 为系统要求的奇异值贡献率, k<sub>δ</sub> 为满足所有指标矩阵的奇异值贡献率的 k 值. 记

$$\varepsilon_{0s}(j) = \frac{1}{1 + |\sigma_{0_j} - \sigma_{s_j}|}, \quad j \leq k_\delta, \quad (6)$$

则称 ε<sub>0s</sub>(j) 为指标 X<sub>0</sub> 和 X<sub>s</sub> 关于第 j 个奇异值的灰色关联系数. 记

$$\varepsilon_{0s} = \frac{1}{k_\delta} \sum_{j=1}^{k_\delta} \varepsilon_{0s}(j), \quad (7)$$

则称 ε<sub>0s</sub> 为指标 X<sub>0</sub> 和 X<sub>s</sub> 的基于奇异值分解的灰色关联度.

**定义 5** 设系统特征指标行为矩阵为 X<sub>0</sub>, X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 为指标 s<sub>1</sub> 与 s<sub>2</sub> 的交互作用矩阵, X<sub>0</sub>、X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 奇异值分别为 σ<sub>0<sub>1</sub></sub>, σ<sub>0<sub>2</sub></sub>, ..., σ<sub>0<sub>r<sub>0</sub></sub></sub> 和 σ<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)<sub>1</sub></sub>, σ<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)<sub>2</sub></sub>, ..., σ<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)<sub>r<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub></sub></sub>, 且 σ<sub>0<sub>1</sub></sub> ≥ σ<sub>0<sub>2</sub></sub> ≥ ... ≥ σ<sub>0<sub>r<sub>0</sub></sub></sub>, σ<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)<sub>1</sub></sub> ≥ σ<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)<sub>2</sub></sub> ≥ ... ≥ σ<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)<sub>r<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub></sub></sub>, δ 为系统要求的奇异值贡献率, k<sub>δ</sub> 为满足所有指标行为矩阵的奇异值贡献率的 k 值. 记</sub></sub></sub></sub></sub></sub></sub></sub></sub></sub>

$$\varepsilon_{0(s_1 s_2)}(j) = \frac{1}{1 + |\sigma_{0_j} - \sigma_{(s_1 s_2)_j}|}, \quad j \leq k_\delta, \quad (8)$$

则称 ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub>(j) 为指标 s<sub>1</sub> 与 s<sub>2</sub> 对指标 s<sub>0</sub> 关于第 j 个奇异值的灰色交互作用关联系数. 记</sub>

$$\varepsilon_{0(s_1 s_2)} = \frac{1}{k_\delta} \sum_{j=1}^{k_\delta} \varepsilon_{0(s_1 s_2)}(j), \quad (9)$$

则称 ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 为指标 s<sub>1</sub> 和 s<sub>2</sub> 对指标 s<sub>0</sub> 的灰色交互作用关联度.</sub>

### 1.2 模型的性质

基于奇异值分解的灰色关联度 ε<sub>0s</sub> 与灰色交互作用关联度 ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 具有相同的性质, 下面仅讨论基于奇异值分解的灰色交互作用关联度 ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 的性质.</sub></sub>

**性质 1** 设 X<sub>0</sub> 与 X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 为同型矩阵, 则基于奇异值分解的灰色交互作用关联度 ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 满足 0 < ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> ≤ 1.</sub></sub></sub>

**证明** 对于 X<sub>0</sub> 和 X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub>, ∀ 1 ≤ j ≤ k<sub>δ</sub>, 显然有</sub>

$$|\sigma_{0_j} - \sigma_{(s_1 s_2)_j}| \geq 0,$$

则

$$0 < \frac{1}{1 + |\sigma_{0_j} - \sigma_{(s_1 s_2)_j}|} \leq 1,$$

即 0 < ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub>(j) ≤ 1, 因此, 0 < ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> ≤ 1. □</sub></sub>

**性质 2** 设 X<sub>0</sub> 与 X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 为同型矩阵, 则基于奇异值分解的灰色交互作用关联度 ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> 满足 ε<sub>0(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub> = ε<sub>0(s<sub>2 s<sub>1</sub>)</sub> = ε<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)0</sub>.</sub></sub></sub></sub></sub>

**证明** 对于 X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub>, 有</sub>

$$\begin{aligned} x_{(s_1 s_2)}(i, t) &= \sqrt{x_{s_1}(i, t)x_{s_2}(i, t)} = \\ &= \sqrt{x_{s_2}(i, t)x_{s_1}(i, t)} = \\ &= x_{(s_2 s_1)}(i, t), \end{aligned}$$

则 σ<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)<sub>j</sub></sub> = σ<sub>(s<sub>2 s<sub>1</sub>)<sub>j</sub></sub>, 1 ≤ j ≤ k<sub>δ</sub>. 对于 X<sub>0</sub>、X<sub>(s<sub>1 s<sub>2</sub>)</sub>、X<sub>(s<sub>2 s<sub>1</sub>)</sub>, ∀ 1 ≤ j ≤ k<sub>δ</sub>, 显然有</sub></sub></sub></sub>

$$|\sigma_{0_j} - \sigma_{(s_1 s_2)_j}| = |\sigma_{0_j} - \sigma_{(s_2 s_1)_j}| = |\sigma_{(s_1 s_2)_j} - \sigma_{0_j}|,$$

故  $\varepsilon_{0(s_1s_2)}(j) = \varepsilon_{0(s_2s_1)}(j) = \varepsilon_{(s_1s_2)0}(j)$ ,  $\varepsilon_{0(s_1s_2)} = \varepsilon_{0(s_2s_1)} = \varepsilon_{(s_1s_2)0}$ .  $\square$

**性质 3** 设  $X_0$  与  $X_s$  为同型矩阵, 若  $X_0 = X_s$ , 则  $\varepsilon_{0(ss)} = 1$ .

**证明** 由于  $X_0 = X_s$ , 则  $X_{(ss)} = X_s = X_0$ ,  $\sigma_{0j} - \sigma_{(ss)j} = 0$ ,  $1 \leq j \leq k_\delta$ , 即  $\varepsilon_{0(ss)}(j) = 1$ ,  $\varepsilon_{0(ss)} = 1$ .  $\square$

**性质 4** 设  $X_0, X'_0, X_{s_1}, X'_{s_1}, X_{s_2}, X'_{s_2}, X_{s_3}, X'_{s_3}, X_{s_4}, X'_{s_4}$  为同型矩阵, 满足  $X'_0 = aX_0, X'_{s_1} = aX_{s_1}, X'_{s_2} = aX_{s_2}, X'_{s_3} = aX_{s_3}, X'_{s_4} = aX_{s_4}$ , 其中  $a$  为非 0 常数. 若  $\varepsilon_{0(s_1s_2)}(j) > \varepsilon_{0(s_3s_4)}(j)$ , 则  $\varepsilon'_{0(s_1s_2)}(j) > \varepsilon'_{0(s_3s_4)}(j)$ .

**证明** 对于  $\forall a \neq 0$  和  $X_0, X'_0$ , 设  $X_0$  的奇异值为  $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \dots, \sigma_{0r_0}$ , 则行为矩阵  $X'_0$  的奇异值为  $|a|\sigma_{01}, |a|\sigma_{02}, \dots, |a|\sigma_{0r_0}$ . 同理, 有

$$\begin{aligned} \sigma'_{s_1j} &= |a|\sigma_{s_1j}, \quad \sigma'_{s_2j} = |a|\sigma_{s_2j}, \\ \sigma'_{s_3j} &= |a|\sigma_{s_3j}, \quad \sigma'_{s_4j} = |a|\sigma_{s_4j}. \end{aligned}$$

又由于

$$\varepsilon_{0(s_1s_2)}(j) > \varepsilon_{0(s_3s_4)}(j),$$

有

$$\frac{1}{1 + |\sigma_{0j} - \sigma_{(s_1s_2)j}|} > \frac{1}{1 + |\sigma_{0j} - \sigma_{(s_3s_4)j}|}.$$

可得到

$$|\sigma_{0j} - \sigma_{(s_1s_2)j}| < |\sigma_{0j} - \sigma_{(s_3s_4)j}|,$$

则

$$|a||\sigma_{0j} - \sigma_{(s_1s_2)j}| < |a||\sigma_{0j} - \sigma_{(s_3s_4)j}|,$$

即

$$|\sigma'_{0j} - \sigma'_{(s_1s_2)j}| < |\sigma'_{0j} - \sigma'_{(s_3s_4)j}|,$$

则

$$\frac{1}{1 + |\sigma'_{0j} - \sigma'_{(s_1s_2)j}|} > \frac{1}{1 + |\sigma'_{0j} - \sigma'_{(s_3s_4)j}|},$$

即  $\varepsilon'_{0(s_1s_2)}(j) > \varepsilon'_{0(s_3s_4)}(j)$ .  $\square$

综合以上性质以及矩阵奇异值的性质可得到下述定理.

**定理 1** 基于奇异值分解的灰色交互作用关联度  $\varepsilon_{0(s_1s_2)}$  满足以下性质: 1) 规范性:  $0 < \varepsilon_{0(s_1s_2)} \leq 1$ ; 2) 对称性:  $\varepsilon_{0(s_1s_2)} = \varepsilon_{0(s_2s_1)} = \varepsilon_{(s_1s_2)0}$ ; 3)  $\varepsilon_{s(ss)} = \varepsilon_{(ss)s} = 1$ ; 4) 数乘变换关联序不变性; 5) 关联度不受对象排列顺序的影响.

**证明** 由性质 1 ~ 性质 4, 易证得定理 1 的 1) ~ 定理 1 的 4) 成立.

定理 1 的 5) 奇异值是矩阵的特征尺度, 为矩阵

与矩阵转置乘积特征值的平方根. 奇异值与矩阵的行具体顺序无关, 取决于矩阵的行空间的几何特性. 换言之, 交换两行会改变矩阵的行顺序, 但是不会改变矩阵的行空间结构, 奇异值不变. 因此, 交换行不改变基于奇异值分解的灰色交互作用关联度的大小, 即关联度不受对象排列顺序的影响.  $\square$

### 1.3 数据的规范化处理

能源消费结构和产业结构等数据为成分数据, 其所在空间为单形空间. 由于成分数据受固定和影响, 直接建模易出现偏差, 需要通过数据变换将其投射到欧氏空间, 其中心对数比变换<sup>[30]</sup>能够有效处理成分数据.

**定义 6** 设面板数据指标行为序列为  $X'' = (X''_1, X''_2, \dots, X''_m)$ , 其中  $X''_s = (x''_s(i, t))_{N \times n}$ . 若

$$\sum_{s=1}^m x''_s(i, t) = 1,$$

则称  $(x''_1(i, t), x''_2(i, t), \dots, x''_m(i, t))$  为成分数据. 记  $X''_s \text{CLR} = (x''_s(i, t) \text{clr})_{N \times n}$ , 有

$$\begin{aligned} x''_s(i, t) \text{clr} &= \ln \left( \frac{x''_s(i, t)}{\bar{x}''(i, t)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ t &= 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

这里  $\bar{x}''(i, t) = \left( \prod_{s=1}^m x''_s(i, t) \right)^{\frac{1}{m}}$ . CLR 称为中心对称比变换算子,  $X''_s \text{CLR}$  为  $X''_s$  的中心对称比变换像.

为了消除转换后数据量级的差异性, 需要对 CLR 变换后的数据再进行标准化处理.

**定义 7** 设面板数据指标行为序列为  $X' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_m)$ , 其中  $X'_s = (x'_s(i, t))_{N \times n}$ . 记  $M_s = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq t \leq n} \{x'_s(i, t)\}$ ,  $m_s = \min_{1 \leq i \leq N} \min_{1 \leq t \leq n} \{x'_s(i, t)\}$ , 记  $X'_s D = (x'_s(i, t) d)_{N \times n}$ , 有:

1) 若数据为成本型, 则

$$x'_s(i, t) d = \frac{M_s - x'_s(i, t)}{M_s - m_s}; \quad (11)$$

2) 若数据为效益型, 则

$$x'_s(i, t) d = \frac{x'_s(i, t) - m_s}{M_s - m_s}. \quad (12)$$

这里:  $D$  称为极差变换算子,  $X'_s D$  为  $X'_s$  的极差变换像.

## 2 实例分析

黄河流域是中国重要的生态屏障和能源资源集中地, 其产业结构重工业占比高, 能源消费以煤炭为主, 导致了较高的碳排放量. 随着国家提出“双碳”目标以及黄河流域生态保护和高质量发展战略, 分析黄河流域的碳排放驱动因素, 对其可持续发展、低

碳转型以及实现“双碳”目标至关重要. 黄河流域的能源消费高度依赖传统化石能源, 这不仅对生态环境产生巨大压力, 也对区域的经济的发展形成制约. 通过研究驱动碳排放的产业结构和能源消费主要影响因素, 可以识别出高碳排放的关键产业和能源消费种类, 进而为优化能源消费结构、推广清洁能源使用提供科学依据, 以实现绿色低碳的能源转型. 需要注意的是, 由于国家“双碳”目标的提出和相关政策的出台, 所得的碳排放、能源消费以及产业结构等数据具有“贫信息”特征. 与此同时, 需要考虑能源消费与产业结构交互作用对于碳排放的影响分析, 可以更好地刻画能源消费与产业结构的关联性, 也利于分析它们互动效应的动态变化. 因此, 通过交互作用分析深入了解能源消费结构和产业结构如何共同作用于碳排放. 基于此, 能够给出针对性的政策建议. 下面利用所提出灰色关联分析模型对黄河流域进行单一因素和交互作用的影响性分析.

## 2.1 数据来源与处理

黄河流经青海省、四川省、甘肃省、宁夏回族自治区、内蒙古自治区、陕西省、山西省、河南省、山东省等 9 个省份或自治区. 黄河流域上游包括青海省、四川省、甘肃省、宁夏回族自治区以及内蒙古自治区等 5 个省份或自治区, 中游包括山西和陕西两个省份, 下游包括河南和山东两个省份.

考虑政策出台以及数据的可获得性, 黄河流域 9 个省份相关数据的时间区间为 2016 年 ~ 2021 年, 原始数据分别来源于 MEIC 数据库和各省份的统计年鉴, 其中黄河流域 9 个省份的碳排放数据来源于 MEIC 碳排放数据库<sup>[31]</sup>(<http://meicmodel.org.cn>), 如表 1 所示. 黄河流域 9 个省份的产业结构和能源消费结构数据可从各省统计年鉴获得. 考虑了一次性电力净调出和当量值计算, 部分省份数据需要重新进行归一化处理.

表1 2016年~2021年黄河流域9个省份碳排放量统计  
百万吨二氧化碳

省份	2016	2017	2018	2019	2020	2021
甘肃省	151.348	150.016	159.389	158.821	167.727	173.829
四川省	302.887	301.91	271.044	282.858	273.631	282.319
青海省	54.229	50.57	47.811	47.354	44.226	45.56
宁夏回族自治区	135.05	179.829	178.571	198.15	210.308	221.862
内蒙古自治区	585.892	624.184	691.476	756.467	789.647	831.906
陕西省	258.331	255.273	252.303	271.837	280.958	294.513
山西省	446.802	469.793	497.397	507.628	521.534	544.085
山东省	875.972	837.529	905.004	922.88	900.535	936.355
河南省	514.942	497.269	462.878	436.771	440.518	457.157

为了计算方便, 黄河流域上中下游的碳排放数据分别记为  $Z_{ol}''$ ,  $l = 1, 2, 3$ . 能源消费结构数据序列记为  $X_{sl}''$ ,  $s = 1, 2, 3, 4, l = 1, 2, 3$ , 其中  $s = 1, 2, 3, 4$  分别表示煤炭、石油、天然气、一次电力以及其他能源. 产业结构分别记为  $Y_{s'l}''$ ,  $s' = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3$ . 这里:  $s' = 1, 2, 3$  分别表示第一产业、第二产业、第三产业,  $l = 1, 2, 3$  分别表示黄河流域上游、中游和下游.

能源消费结构和产业结构数据为成分数据, 首先通过 CLR 变换对  $X_{sl}''$  和  $Y_{s'l}''$  进行处理, 变换后的数据记为  $X_{sl}'$  和  $Y_{s'l}'$ . 然后, 对于第一产业、第二产业、煤炭、石油、碳排放等数据利用成本型极差变换公式 (11) 进行处理, 第三产业、天然气、一次电力以及其他能源等数据利用效益型极差变换公式 (12) 进行处理. 经 CLR 变换和极差变换后的规范化数据记为  $Z_{ol}$ 、 $X_{sl}$ 、 $Y_{s'l}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4, s' = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3$ .

## 2.2 单一因素的驱动因素分析

对于黄河流域上中下游, 利用灰色关联度公式 (7) 分别计算  $Z_{ol}$  与  $X_{sl}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ),  $Y_{s'l}$  ( $s' = 1, 2, 3$ ),  $l = 1, 2, 3$  的关联度, 得到黄河流域上中下游碳排放关于能源消费结构和产业结构的关联关系, 结果如表 2 和图 1 所示.

表2 黄河流域上中下游能源消费和产业结构的单一因素关联度结果

	能源消费结构				产业结构		
	碳	石油	天然气	一次性电力和其他能源	第一产业	第二产业	第三产业
上游	0.8155	0.7612	0.7606	0.8067	0.9355	0.8301	0.6581
中游	0.9390	0.8093	0.7627	0.8951	0.6935	0.6535	0.9037
下游	0.9074	0.7176	0.9127	0.9012	0.7740	0.9067	0.7318

由表 2 和图 1 可知, 黄河流域上中下游碳排放的主要影响因素如下: 对于能源消费结构, 黄河流域中上游的驱动因素为碳消费, 关联度分别达到 0.9390 和 0.8155; 黄河下游碳排放的主要影响因素为天然气消费, 关联度达到 0.9127; 对于黄河流域中上游,

碳消费作为能源消费的驱动因素, 表明这些地区仍然存在较为依赖碳能源的消费模式. 黄河中上游地区畜牧业发展、工业化进程中的高碳能源使用较为普遍. 而对于黄河下游, 天然气消费成为驱动因素. 这可能与黄河下游地区的能源结构变化有关. 近年

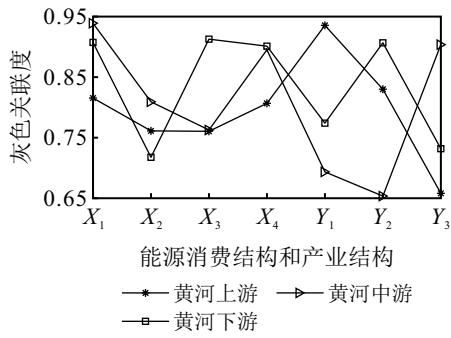


图1 黄河流域上中下游碳排放单一因素折线图

来,多地实行新旧动能转换,天然气取代煤炭成为主要能源,这有助于减少碳排放,因此,天然气消费成为该地区碳排放的主要驱动因素。

对于产业结构,黄河流域上中下游的主要影响因素存在较大差异,第一产业、第三产业、第二产业与碳排放的最大关联度均超过了0.9,分别达到0.9335、0.9037、0.9067。因此,第一产业、第三产业、第二产业分别为黄河上中下游的主要影响因素。对于黄河流域上游,第一产业为主要驱动因素,表明黄河上游的碳排放与农业活动、资源开采等密切相关;

对于黄河流域中游,随着经济发展,第三产业比重逐渐上升,服务业、交通、信息技术等部门的碳排放逐步增多,相关服务活动带来的能源需求增加;随着下游地区工业化和城市化的加速,第二产业的能源需求和碳排放显著增加,尤其是在钢铁、化工、水泥等高耗能产业中,碳排放量较高。

### 2.3 考虑交互作用的驱动因素分析

产业结构调整往往是实现能源消费结构优化的关键途径,而能源消费结构优化反过来也能为产业结构的绿色发展提供支撑。在低碳化转型的过程中,产业结构和能源消费结构的协调发展显得尤为重要。因此,为了更全面地分析碳排放的主要影响因素,需要考虑能源消费结构和产业结构共同作用对碳排放的影响。下面利用基于奇异值分解的灰色交互作用关联度公式(9)分别计算 $Z_{0l}$ 和 $X_{(ss')l}$ 的关联度。其中: $x_{(ss')l}(i,t) = \sqrt{x_{sl}(i,t)y_{s'l}(i,t)}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4, s' = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3$ ,得到黄河流域上中下游碳排放关于能源消费结构与产业结构交互作用的关联关系,结果如表3和图2所示。

表3 黄河流域上中下游能源消费与产业结构交互作用的关联度结果

	$X_1 \cdot Y_1$	$X_1 \cdot Y_2$	$X_1 \cdot Y_3$	$X_2 \cdot Y_1$	$X_2 \cdot Y_2$	$X_2 \cdot Y_3$	$X_3 \cdot Y_1$	$X_3 \cdot Y_2$	$X_3 \cdot Y_3$	$X_4 \cdot Y_1$	$X_4 \cdot Y_2$	$X_4 \cdot Y_3$
上游	0.7723	0.7405	0.7015	0.7156	0.6930	0.6848	0.7212	0.7216	0.6994	0.7662	0.7338	0.6999
中游	0.6381	0.6562	0.8377	0.6507	0.6391	0.8063	0.6625	0.6518	0.8596	0.6378	0.6493	0.8295
下游	0.8221	0.7844	0.8034	0.7184	0.7195	0.7270	0.7910	0.7640	0.7637	0.7620	0.7551	0.7945

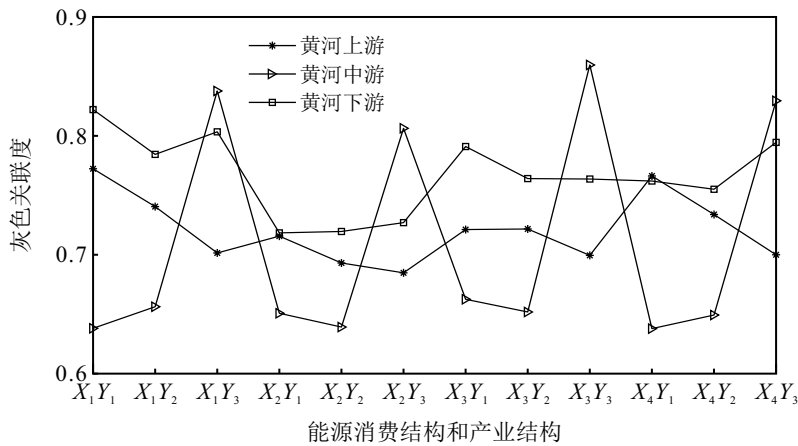


图2 黄河流域上中下游碳排放交互作用折线图

由表3和图2可知,黄河流域上游和下游的交互作用主要影响因素均为碳消费和第一产业,中游为天然气和第三产业,它们与碳排放的关联度分别达到0.7723、0.8596、0.8221。由于资源丰富、经济发展较为落后,黄河上游地区仍然依赖于高碳能源和第一产业的传统发展模式。这种模式导致了碳消费和第一产业在碳排放驱动因素中发挥主导作用。黄河中游地区的经济结构向服务型经济过渡,带动

了天然气的使用,天然气在减少直接碳排放方面比煤炭更具优势;第三产业的快速发展带来了能源需求的变化,使得天然气和第三产业成为该地区碳排放的重要驱动因素。尽管下游地区具备较高的经济水平,但是农业和传统高碳行业仍然占一定比例,导致碳消费和第一产业在碳排放驱动因素中表现突出。这反映了区域内能源结构转型的挑战,以及经济结构中第一产业对碳排放的持续影响。

## 2.4 模型的检验分析与对比分析

为了验证所提出模型的有效性,对模型进行稳定性检验和置换检验,并与传统关联分析模型进行对比分析.这里选择经典的灰色拓展绝对关联分析模型<sup>[14]</sup>、灰色网格关联分析模型<sup>[16]</sup>与灰色梯度关联分析模型<sup>[23]</sup>进行对比分析.

对相应数据增加一定的扰动信息,计算关联分析模型相对误差,确定灰色关联分析模型稳定性.相对误差的定义如下所示:

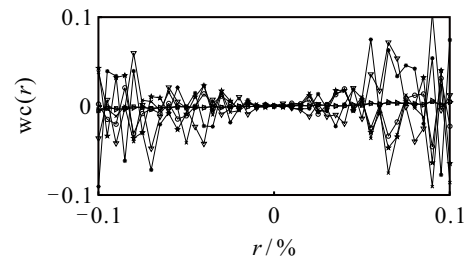
$$wc(r) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon}. \quad (13)$$

其中: $\varepsilon$ 为原关联度; $\varepsilon_r$ 为指标行为矩阵增加 $\pm r\%$ 扰动后的关联度, $\varepsilon_r = \varepsilon(Z_1^r, X_{s_1}^r)$ , $z_1(i, t)(1 - r\%) \leq z_1^r(i, t) \leq z_1(i, t)(1 + r\%)$ , $x_{s_1}(i, t)(1 - r\%) \leq x_{s_1}^r(i, t) \leq x_{s_1}(i, t)(1 + r\%)$ , $r \leq r \leq \bar{r}$ .

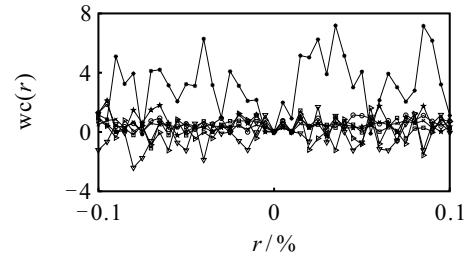
为了方便,选择黄河上游各指标行为矩阵进行模型稳定性检验,对碳排放、能源消费结构和产业结构行为矩阵增加 $(-10\%, 10\%)$ 的扰动信息,计算其相对误差,结果如图3所示.需要注意的是,在随机生成扰动矩阵时,引入固定的随机种子,以保证每次运行的随机矩阵一致.

图3为4个模型的 $wc(r)$ 随 $r$ 的变化特征,可得到各模型的稳定性特征.由图3可知,所提出模型表现出较高的稳定性.对于灰色拓展绝对关联分析模型和灰色梯度关联分析模型, $wc(r)$ 值在图中分布集中且变化幅度相对较小,表明其对于输入扰动敏感性相对较低,也具有较好的稳定性.但是,灰色拓展关联分析模型在较大扰动下的误差变化有所增加,灰色梯度关联分析模型整体波动性较大.可见,它们的稳定性比所提出模型要弱.相比之下,灰色网格关联分析模型的 $wc(r)$ 明显偏离中心范围或变化更大,最大相对误差超过了6,表明其对于输入变化敏感性较高.可见,灰色网格关联分析模型对于该问题的稳定性较差,且不适合在稳定性要求高的场景中使用.

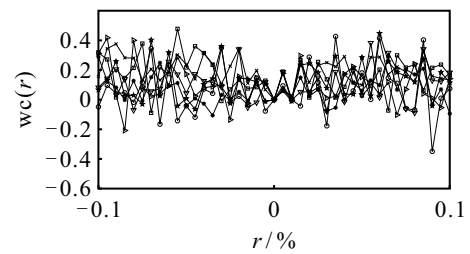
灰色关联分析基于行为矩阵进行建模,其结果易受矩阵构建的影响.换言之,矩阵行(列)的顺序发生了改变,关联度的结果很可能会发生改变.事实上,在因素分析中,其结果不应受对象排列顺序的影响.因此,需要对模型进行置换检验分析,分析模型关于对象排列顺序的影响.为此,给出行为矩阵的所有行置换,分别计算关联度.以所有置换后的关联度均值为柱状图的柱高,关联度的最大值和最小值标记在柱子的中间,并将两点连线得到模型的置换检验图.若最大值与最小值间的连线越长,则表明置换对于结果影响越大;反之,则越小.当最大值点与最小值



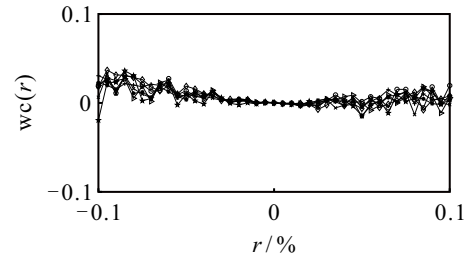
(a) 灰色拓展绝对关联分析模型误差



(b) 灰色网格关联分析模型误差



(c) 灰色梯度关联分析模型误差



(d) 本文模型误差

→ 煤炭    ← 石油    + 天然气  
 → 一次电力以及其他能源  
 → 第一产业    ← 第二产业    → 第三产业

图3 4种模型的相对误差

点重合时,模型不受置换的影响,即灰色关联分析模型具有抗置换能力.在此,以黄河上游的碳排放和碳消费为例进行置换检验,结果如图4所示.

由图4可得到各模型的置换检验结果.不难得到,灰色拓展绝对关联分析模型、灰色网格关联分析模型和灰色梯度关联分析模型的最大值点与最小值点差异较大,表明这3种模型关于对象排列顺序的影响较大,它们适用于固定顺序的行为矩阵.在非固定顺序行为矩阵下应用这些模型可能会导致较大的偏差.对于所提出模型,最大值点与最小值点重合,表明其不受对象排列顺序的影响,既适用于固定顺序的行为矩阵,又适用于非固定顺序的行为矩阵,比

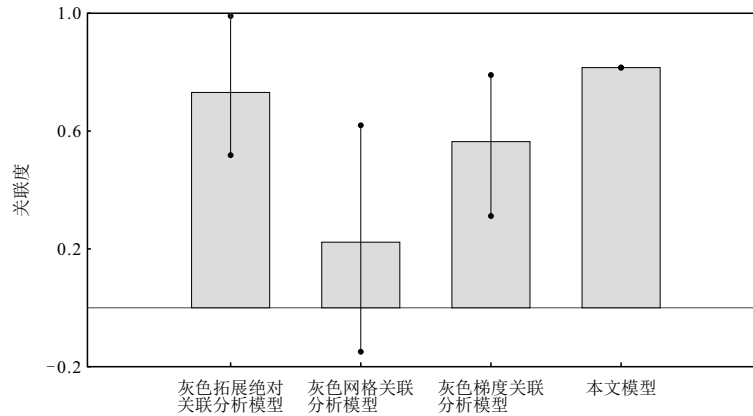


图4 4种模型的置换检验分析

上述3种模型的应用范围更广。

通过对比分析不难得到, 所提出模型不仅能够分析单一因素的影响, 还能分析因素间交互作用的影响。此外, 所提出模型的稳定性较好, 具有较强的抗数据干扰能力, 模型的结果不受对象排列顺序的影响。

### 3 结论

本文基于奇异值分解提出了灰色交互作用关联分析模型, 以解决传统关联分析模型无法评估因素间交互影响的问题。此外, 该模型还克服了关联度受对象排列顺序影响的问题, 并提高了模型的稳定性。

所提出模型利用矩阵奇异值测度面板数据的差异性, 与距离、斜率等几何量相比更能刻画面板数据的整体性。本文还给出了模型稳定性和置换检验分析方法, 通过稳定性检验和置换检验, 展示了所提出模型的优势。所提出模型有效识别了黄河流域上中下游碳排放的单因素和交互作用影响的关键因素, 为黄河流域碳减排提供了指导。

尽管所提出模型克服了现有灰色关联分析模型的一些不足, 也取得了有效的应用, 但是, 仍然需要在不同类型数据集上开展普适性验证。与此同时, 本文仅考虑了两指标构建的交互作用, 多指标间交互作用影响性分析和模型的机理还需进一步研究。

### 参考文献 (References)

- [1] Deng J L. Control problems of grey systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1982, 1(5): 288-294.
- [2] Candan G, Toklu M C. Sustainable industrialization performance evaluation of European Union countries: An integrated spherical fuzzy analytic hierarchy process and grey relational analysis approach[J]. *International Journal of Sustainable Development & World Ecology*, 2022, 29(5): 387-400.
- [3] Yan J Y, Zhu J X, Lu N, et al. Superior grey relational analysis on blood lipids and hematological parameters[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2019, 9(2): 207-212.
- [4] Chen S M, Wang D F. Optimization of vehicle ride comfort and controllability using grey relational analysis[J]. *The Journal of Grey System*, 2011, 23(4): 369-380.
- [5] Feng Y, Dang Y G, Wang J J, et al. A novel grey projection incidence model for assessing the relationships between cardiovascular diseases and air pollutants[J]. *ISA Transactions*, 2023, 135: 398-409.
- [6] An Y M, Dang Y G, Wang J J, et al. Identification of heavily polluted areas based on a novel grey integrated incidence model: A case study of the Yangtze River Delta, China[J]. *Sustainable Cities and Society*, 2023, 92: 104466.
- [7] Yan F, Liu L, Qiao D Y, et al. Functional grey relational model in water quality assessment[J]. *Journal of Grey System*, 2016, 28(3): 89-96.
- [8] Dong W J, Liu S F, Fang Z G. On modeling mechanisms and applicable ranges of grey incidence analysis models[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2018, 8(4): 448-461.
- [9] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 灰色斜率关联度的改进[J]. *中国工程科学*, 2004, 6(3): 41-44.  
(Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. Improvement on degree of grey slope incidence[J]. *Engineering Science*, 2004, 6(3): 41-44.)
- [10] 刘思峰, 谢乃明, Forrest Jeffery. 基于相似性和接近性视角的新型灰色关联分析模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(5): 881-887.  
(Liu S F, Xie N M, Jeffery F. On new models of grey incidence analysis based on visual angle of similarity and nearness[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, 30(5): 881-887.)
- [11] 吴利丰, 王义闹, 刘思峰. 灰色凸关联及其性质[J]. *系统工程理论与实践*, 2012, 32(7): 1501-1505.  
(Wu L F, Wang Y N, Liu S F. Grey convex relation and its properties[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2012, 32(7): 1501-1505.)
- [12] Liu S F. Negative grey relational model and measurement of the reverse incentive effect of fields medal[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2023, 13(1): 1-13.

- [13] Liu S F, Lu N N, Shang Z J, et al. A new grey relational analysis model of cross-sequences[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2024, 14(2): 299-317.
- [14] 张可, 刘思峰. 灰色关联聚类在面板数据中的扩展及应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(7): 1253-1259. (Zhang K, Liu S F. Extended clusters of grey incidences for panel data and its application[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, 30(7): 1253-1259.)
- [15] Yin K D, Zhang Y, Li X M. Research on storm-tide disaster losses in China using a new grey relational analysis model with the dispersion of panel data[J]. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 2017, 14(11): 1330.
- [16] 刘震, 党耀国, 钱吴永, 等. 基于面板数据的灰色网格关联度模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(4): 991-996. (Liu Z, Dang Y G, Qian W Y, et al. Grey grid incidence model based on panel data[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(4): 991-996.)
- [17] 吴鸿华, 刘思峰, 方志耕. 基于面板数据的灰色四面体网格关联分析模型及应用[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 3033-3041. (Wu H H, Liu S F, Fang Z G. Grey tetrahedral grid incidence analysis model based on panel data and its application[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(11): 3033-3041.)
- [18] 吴利丰, 刘思峰. 基于灰色凸关联度的面板数据聚类方法及应用[J]. *控制与决策*, 2013, 28(7): 1033-1036. (Wu L F, Liu S F. Panel data clustering method based on grey convex relation and its application[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(7): 1033-1036.)
- [19] 钱吴永, 王育红, 党耀国, 等. 基于多指标面板数据的灰色矩阵关联模型及其应用[J]. *系统工程*, 2013, 31(10): 70-74. (Qian W Y, Wang Y H, Dang Y G, et al. Grey matrix relational modeling and its application based on multivariate panel data[J]. *Systems Engineering*, 2013, 31(10): 70-74.)
- [20] Sun J, Dang Y G, Zhu X Y, et al. A grey spatiotemporal incidence model with application to factors causing air pollution[J]. *Science of the Total Environment*, 2021, 759: 143576.
- [21] Yin K D, Xu T T, Li X M, et al. A study of the grey relational model of interval numbers for panel data[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2020, 11(1): 200-211.
- [22] 党耀国, 朱晓月, 丁松, 等. 基于灰关联度的面板数据聚类方法及在空气污染分析中的应用[J]. *控制与决策*, 2017, 32(12): 2227-2232. (Dang Y G, Zhu X Y, Ding S, et al. Panel data clustering method based on grey correlation degree and its application in air pollution analysis[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(12): 2227-2232.)
- [23] Zhang K, Zhong Q P, Zuo Y. Multivariate grey gradient incidence model and its application[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2017, 7(2): 236-246.
- [24] Zhang K, Cui L, Yin Y. A multivariate grey incidence model for different scale data based on spatial pyramid pooling[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2020, 31(4): 770-779.
- [25] 翟艳丽, 罗格格. 基于面板数据的灰色点集关联分析模型[J]. *控制与决策*, 2024, 39(8): 2801-2809. (Zhai Y L, Luo G G. Grey point set association analysis model based on panel data[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(8): 2801-2809.)
- [26] 安艺萌, 党耀国, 杨德岭, 等. 基于面板数据灰色面角关联模型的区域PM<sub>2.5</sub>健康风险相关因素识别[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3): 899-908. (An Y M, Dang Y G, Yang D L, et al. Identification of regional PM<sub>2.5</sub> health risk factors based on panel data grey dihedral angle incidence model[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(3): 899-908.)
- [27] Hu A Q, Xie N M. Construction and application of a novel grey relational analysis model considering factor coupling relationship[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2025, 15(1): 1-20.
- [28] 刘宁, 韦保磊. 函数型灰色关联分析及应用[J]. *控制与决策*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1278. (Liu N, Wei B L. Functional grey relational analysis with applications[J]. *Control and Decision*, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1278.)
- [29] 孙婧, 党耀国, 杨圣祥, 等. 基于面板数据的灰色差值关联模型构建及其应用[J]. *控制与决策*, 2024, 39(11): 3839-3847. (Sun J, Dang Y G, Yang S X, et al. Grey difference incidence model of panel data and its application[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(11): 3839-3847.)
- [30] Mert M C, Filzmoser P, Hron K. Error propagation in isometric log-ratio coordinates for compositional data: Theoretical and practical considerations[J]. *Mathematical Geosciences*, 2016, 48(8): 941-961.
- [31] Geng G N, Liu Y X, Liu Y, et al. Efficacy of China's clean air actions to tackle PM<sub>2.5</sub> pollution between 2013 and 2020[J]. *Nature Geoscience*, 2024, 17(10): 987-994.

## 作者简介

吴鸿华 (1978–), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向灰色系统理论及其应用、不确定性评价与决策, E-mail: [ss\\_wuhh@ujn.edu.cn](mailto:ss_wuhh@ujn.edu.cn);

胡阿芹 (1979–), 女, 副教授, 博士生, 主要研究方向为不确定性评价、预测与决策, E-mail: [huaqin@lyu.edu.cn](mailto:huaqin@lyu.edu.cn);

韩雪 (2001–), 女, 硕士生, 主要研究方向为灰色系统理论及应用, E-mail: [2077197588@qq.com](mailto:2077197588@qq.com);

李雅芳 (2001–), 女, 硕士生, 主要研究方向为灰色系统理论及应用, E-mail: [2949691578@qq.com](mailto:2949691578@qq.com).