

控制与决策

Control and Decision

衰减网络下Markov跳变系统的通信协议和控制器协同设计

余涛, 王锐豪, 任乘乘, 何舒平

引用本文:

余涛, 王锐豪, 任乘乘, 等. 衰减网络下Markov跳变系统的通信协议和控制器协同设计[J]. *控制与决策*, 2025, 40(9): 2701–2713.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.1376>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[混合柯西变异和均匀分布的蝗虫优化算法](#)

Hybrid Cauchy mutation and uniform distribution of grasshopper optimization algorithm
控制与决策. 2021, 36(7): 1558–1568 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1609>

[基于最佳相位匹配的减摇鳍低航速控制策略](#)

[Best phase matching based control strategy for ship stabilizer at low speed](#)
控制与决策. 2021, 36(4): 940–946 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1028>

[基于预防维护的单机调度问题](#)

[Single-machine scheduling problem with preventative maintenance activities](#)
控制与决策. 2021, 36(2): 395–402 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0626>

[基于混合差分遗传算法的Bouc–Wen迟滞模型辨识策略](#)

Bouc–Wen hysteresis model identification strategy based on hybrid differential genetic algorithm
控制与决策. 2021, 36(2): 371–378 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0663>

[一种基于MOEA/D的组合权重方法](#)

A combination weight method based on MOEA/D
控制与决策. 2021, 36(12): 3056–3062 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0592>

衰减网络下 Markov 跳变系统的 通信协议和控制器协同设计

余涛^{1†}, 王锐豪¹, 任乘乘², 何舒平²

(1. 安徽大学人工智能学院, 合肥 230000; 2. 安徽大学电气工程与自动化学院, 合肥 230000)

摘要: 探讨基于衰减网络的 Markov 跳变系统通信调度概率和控制器协同设计问题. 具体而言, 在每个传输时刻只能通过网络传输一个信道的衰减信号, 该信号由传感器的测量信号经过衰减网络传输到控制器. 引入随机通信协议对信道选择进行调度, 随机通信协议的信道选择和衰减网络中的衰减系数均建模为 Markov 模型. 通过 Lyapunov 方法, 推导出同时满足闭环系统指数均方稳定和预设 H_∞ 性能的充分性条件. 然而, 得出的系统稳定性和控制器设计条件存在非线性和非凸约束. 为了解决非线性约束并获得最佳的闭环系统 H_∞ 性能, 提出一种带有惩罚约束的遗传算法与线性矩阵不等式方法相结合的迭代算法, 并给出该迭代算法初始值的选择方案. 最后, 通过仿真算例验证了所提控制方法的有效性.

关键词: Markov 跳变系统; 协同设计; 惩罚约束; 遗传算法; 衰减通道

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1376

引用格式: 余涛, 王锐豪, 任乘乘, 等. 衰减网络下 Markov 跳变系统的通信协议和控制器协同设计 [J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2701-2713.

Co-design of communication protocol and controller for Markov jump systems under fading networks

YU Tao^{1†}, WANG Rui-hao¹, REN Cheng-cheng², HE Shu-ping²

(1. School of Artificial Intelligence, Anhui University, Hefei 230000, China; 2. School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei 230000, China)

Abstract: This paper investigates the problem of communication scheduling probability and controller co-design for Markov jump systems (MJSs) based on fading networks. Specifically, only one channel of the fading signal can be transmitted at each transmission moment. The signal from the sensors is transmitted to the controller via the fading network. In order to plan the channel selection, a stochastic communication protocol (SCP) is introduced. The channel selection for the SCP and the fading coefficients in the fading network are modeled as Markov models. Using the Lyapunov method, sufficient conditions that simultaneously satisfy the exponential mean-square stability of the closed-loop system and the preset H_∞ performance are derived. However, the developed stability and controller design conditions include nonlinear constraints. To handle nonlinear constraints and achieve optimal closed-loop system H_∞ performance, this paper proposes an iterative algorithm that combines a genetic algorithm with penalty constraints and a linear matrix inequality method. A selection scheme for the initial value of the iterative algorithm is also provided. Finally, the effectiveness of the proposed control method is demonstrated.

Keywords: Markov jump system; co-design; punitive constraints; genetic algorithm; fading channel

0 引言

随着通信技术的不断发展, 网络化控制系统 (NCSs) 吸引着越来越多研究者的关注^[1-2]. 原因在于 NCSs 具有成本低、系统布线少和操作简单等优点^[2]. 这些优势在定位系统^[3]、无人车控制^[4]等领域具有重

要价值. 许多实际系统经常因部件老化和内部故障而经历系统参数或结构的变化, 这种情况可能会引起机器工作状态的变化, 具有这些特点的系统可以用 Markov 跳变系统 (MJSs) 来建模^[5]. 因此, MJSs 的网络化控制问题也引起了研究人员的关注^[6].

收稿日期: 2024-11-25; 录用日期: 2025-03-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62203003); 云南省无人自主系统重点实验室开放课题 (202501ZD01).

[†]通信作者. E-mail: yutao16@mail.ustc.edu.cn.

本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

NCSs 也面临着各种挑战, 包括带宽限制、信号衰减等问题^[6]. 为了解决带宽限制问题, 本文在传感器与控制器之间的通信网络引入随机通信协议 (SCP). 依据 SCP 的特点, 同一时刻只有一个传感器节点允许通过网络传输其测量信息^[7]. 通过这种方法可以有效缓解数据冲突, 节约网络资源. 通信协议在网络化控制系统中的应用吸引了越来越多研究者的关注. 文献 [8] 为了提高数据传输的效率, 将 FlexRay 协议嵌入到高速率网络中, 以协调不同属性信号的传输规则, 从而进一步提高传输的灵活性; 文献 [9] 关注在 SCP 和随机虚假数据注入攻击下, 区间 2 型模糊网络系统的安全事件触发控制问题, SCP 用于降低通信负担; 文献 [10] 研究了一类状态饱和时变系统在传感器网络中的分布式滤波问题, 为了减少数据冲突和减轻通信负担, 在传感器到滤波器的通道上布置随机接入协议, 以协调多个传感器节点的传输序列; 文献 [11] 介绍了在 SCP 下对物理-信息系统的电子隐蔽攻击, SCP 用于避免数据冲突. NCSs 的另一个缺点是传输过程中的信号衰减^[12], 这通常由信号反射^[12] 和传输介质损耗^[13] 引起. 解决网络带宽有限和信号衰减问题对 NCSs 至关重要. 本文将 SCP 信道选择和信道衰落系数随时间变化的特性建模为 MJSs, 并将这两个变量集成在统一的 MJS 框架内进行分析和处理.

在探讨协同设计问题时, 一个关键的考量是通信协议与控制器变量之间的相互依赖性, 这种耦合效应为解决协同设计问题带来了新的挑战^[14-15]. 在解耦协同设计条件下的非线性项时, 可能会不可避免地引入一定程度的保守性^[16-17]. 因此, 探究在降低保守性的同时解决这一复杂的协同设计问题具有重要的研究价值. 近年来, 进化算法在求解非线性优化/非线性控制方面表现出良好的效果^[1], 其在控制领域的应用引起了更多研究者的关注和兴趣. 文献 [18] 研究了多自主水下航行器路径规划问题, 通过提出一个合作进化计算算法, 为决策者提供最优路径规划; 文献 [2] 为了解决四区域电力系统中滑模控制器设计问题, 提出了一种结合遗传算法 (GA) 与线性矩阵不等式方法的求解算法; 文献 [19] 研究了基于触觉感知的抓握稳定性识别, 通过基于 GA 的集成稀疏极限学习机, 提高抓握稳定性; 文献 [20] 通过使用二进制遗传算法构建了一个有效的滑模控制策略, 该策略可以通过识别理想的滑动增益来最小化滑动区域. 本文提出一种带有惩罚约束的 GA 来优化 SCP 通道选择的概率和控制器增益, 旨在实现闭环系统的最优 H_∞ 性能.

综上所述, 本文探讨基于衰减网络的 Markov 跳变系统通信调度概率和控制器协同设计问题. 具体而言, 在每个传输时刻只能通过网络传输一个信道的衰减信号, 该信号由传感器的测量信号经过衰减网络传输到控制器. 引入随机通信协议对信道选择进行调度, 随机通信协议的信道选择和衰减网络中的衰减系数均建模为 Markov 模型. 通过 Lyapunov 方法, 推导出同时满足闭环系统指数均方稳定和预设 H_∞ 性能的充分性条件. 然而, 得出的系统稳定性和控制器设计条件存在非线性和非凸约束. 为了解决非线性约束, 并获得最佳的闭环系统 H_∞ 性能, 本文提出一种带有惩罚约束的遗传算法与线性矩阵不等式方法相结合的迭代算法, 并给出此迭代算法初始值的选择方案. 最后, 本文算例部分验证了所提出控制方法的有效性.

本文符号说明: \mathbf{R}^n 为 n 维向量集, $\mathbf{R}^{m \times n}$ 为 $m \times n$ 维矩阵集, $\text{col}\{\cdot\}$ 为列向量, $\text{diag}\{\cdot\}$ 为对角矩阵, M^T 为矩阵转置, $\lambda_{\max/\min}\{\cdot\}$ 为矩阵最大/最小特征值, $\max\{\cdot\}$ 为集合中最大值, $\text{Pr}\{\cdot\}$ 为概率, $\mathcal{E}\{\cdot\}$ 为数学期望, mod 表示取余运算, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整.

1 问题描述

系统框图如图 1 所示. 考虑如下具有时变时延的离散时间 MJS 数学模型:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{s(k)}x(k) + A_{s(k)}^d x(k-\tau(k)) + B_{s(k)}u(k) + F_{s(k)}w(k), \\ y^l(k) = C_{s(k)}^l x(k), \\ z(k) = G_{s(k)}x(k), \\ x(r) = \bar{x}(r), r = -\tau_2, -\tau_2 + 1, \dots, -1, 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 是系统状态向量; $y^l(k) \in \mathbf{R}^{n_y}$ ($l \in \mathcal{Q} = \{1, 2, \dots, q\}$) 是第 l 个通道的输出; $u(k) \in \mathbf{R}^{n_u}$ 是控制输入; $z(k) \in \mathbf{R}^{n_z}$ 是被控输出; 向量 $w(k) \in \mathbf{R}^{n_w}$ 是外部扰动; $\bar{x}(r)$ 是初始值; $\tau(k)$ 是可变的时延, 且 $0 < \tau_1 \leq \tau(k) \leq \tau_2$.

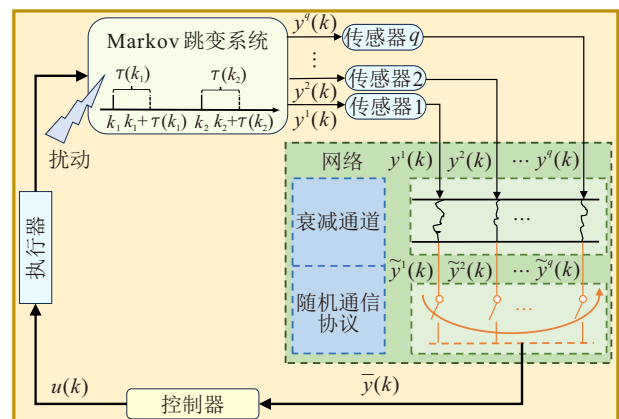


图1 网络化 MJS 控制框图

符号 $s(k)$ 表示 MJS 的模态跳变情况, 在有限集合 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, \mathcal{D}\}$ 内取值. 模态转移概率矩阵 $A = [\lambda_{p\chi}]_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ 由下式给出:

$$\lambda_{p\chi} = \Pr\{s(k+1) = \chi | s(k) = p\}, \forall p, \chi \in \mathcal{N}. \quad (2)$$

其中: $\lambda_{p\chi} \in [0, 1]$, $\sum_{\chi=1}^{\mathcal{D}} \lambda_{p\chi} = 1$. 当 $s(k) = \chi$ 时, 系统矩阵可表示为 $A_\chi, A_\chi^d, B_\chi, C_\chi^l, F_\chi, G_\chi$.

在实际场景中, 信号在传输过程中经常会受到随机因素的干扰, 导致信号在信道中衰减^[12]. 衰减系数随时间随机变化, 因此可以用 MJS 来模拟其变化过程^[21]. 用 $\mu_{\zeta^l(k)}$ ($\mu_{\zeta^l(k)} \in [0, 1]$) 表示在时刻 k 第 l 个信道的衰减系数; Markov 链 $\zeta^l(k)$ 在集合 $\mathcal{S}^l = \{1, 2, \dots, \mathcal{M}^l\}$ 中取值, 表示衰减系数变化情况; 转移概率矩阵为 $\Theta^l = [\vartheta_{mn}^l]_{\mathcal{M}^l \times \mathcal{M}^l}$. 其中

$$\begin{aligned} \vartheta_{mn}^l &= \Pr\{\zeta^l(k+1) = n | \zeta^l(k) = m\}, \forall m, n \in \mathcal{S}^l. \\ \vartheta_{mn}^l &\in [0, 1], \sum_{n=1}^{\mathcal{M}^l} \vartheta_{mn}^l = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

此时, 第 l 个衰减通道的输出可表示为 $\tilde{y}^l(k) = \mu_{\zeta^l(k)} y^l(k)$. 为便于使用, 将各信道的衰减信号和输出信号增广为

$$\begin{aligned} y(k) &\triangleq \text{col}\{y^1(k), \dots, y^q(k)\} = \\ &\text{col}\{C_{s(k)}^1(k), \dots, C_{s(k)}^q(k)\}x(k) = \\ &C_{s(k)}x(k), \\ \tilde{y}(k) &\triangleq \text{col}\{\tilde{y}^1(k), \dots, \tilde{y}^q(k)\} = \\ &\text{diag}\{\mu_{\zeta^1(k)}, \dots, \mu_{\zeta^q(k)}\}y(k) = \\ &\Lambda C_{s(k)}x(k), \end{aligned}$$

其中 $\Lambda \triangleq \text{diag}\{\mu_{\zeta^1(k)}, \mu_{\zeta^2(k)}, \dots, \mu_{\zeta^q(k)}\}$.

为了缓解通信拥塞, 本文在传感器和控制器之间的通信网络引入 SCP. 依据 SCP 特点, 将 $\sigma(k) \in \mathcal{Q}$ 表示为在时刻 k 允许信息传输的信道^[7]. SCP 信道选择可建模为 Markov 模型^[9], 其转移概率矩阵为 $\Xi = [\mu_{r\varsigma}]_{q \times q}$. 其中

$$\begin{aligned} \mu_{r\varsigma} &= \Pr\{\sigma(k+1) = \varsigma | \sigma(k) = r\}, \forall r, \varsigma \in \mathcal{Q}, \\ \mu_{r\varsigma} &\in [0, 1], \sum_{\varsigma=1}^q \mu_{r\varsigma} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

根据 SCP 规则, 通信网络在任何给定时刻都只允许一个传感器节点访问和传输数据, 这意味着控制器无法接收来自未选定传感器的信号. 为此, 在控制器输入端引入一个补偿元件, 使控制器能够接收以下形式的可用信号:

$$\bar{y}(k) = \Xi_{\sigma(k)} \tilde{y}(k) + (I - \Xi_{\sigma(k)}) \bar{y}(k-1). \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_{\sigma(k)} &\triangleq \\ &\text{diag}\{\delta(\sigma(k) - 1), \delta(\sigma(k) - 2), \dots, \delta(\sigma(k) - q)\}, \end{aligned}$$

函数 $\delta(c)$ 在 $c = 0$ 时等于 1, 其余情况为 0.

注 1 在工程实践中, Markov 链 $s(k)$ 、 $\zeta^l(k)$ 通常依据系统的实际状况进行确定, 而 Markov 链 $\sigma(k)$ 则通常由设计者预先设定. 本文协同设计通信协议概率参数 ($\sigma(k)$ 转移概率) 与控制器增益, 旨在实现闭环系统的最佳 H_∞ 性能.

注 2 在实际应用中, 信号衰减通常受到多种因素的影响, 例如信号反射和传输介质损耗^[13]. 这些因素会导致信号强度随时间发生随机变化, 而 MJS 能够很好地描述这种具有随机性和时变特性的现象^[21]. 通常情况下, 信号衰减系数越小, 表明信息损失越多. 因此, 基于损失信息设计的控制输入难以将系统控制稳定, 相应的控制效果也较差.

根据前文的讨论, 本文中存在的 $q+2$ 条 Markov 链 $\{s(k), k \geq 0\}$ 、 $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 和 $\{\zeta^l(k), k \geq 0\}$ ($l \in \mathcal{Q}$). 为了简化分析和后文的使用, 将它们映射到一条新的 Markov 链中.

引理 1^[22] Markov 链 $s(k)$ 、 $\sigma(k)$ 和 $\zeta^l(k)$ 可以根据合并关系 $\Omega(\cdot, \cdot, \cdot)$ 合并成一条新的 Markov 链 $\theta(k) \in \mathbb{D} \triangleq \{1, 2, \dots, \mathcal{A}\}$,

$$\begin{aligned} \theta(k) &= \Omega(s(k), \sigma(k), \zeta^l(k)) = \\ &s(k) + (\sigma(k) - 1)\mathcal{D} + (\zeta^1(k) - 1)q\mathcal{D} + \\ &(\zeta^2(k) - 1)q\mathcal{D}\mathcal{M}^1 + \dots + \\ &(\zeta^q(k) - 1)q\mathcal{D} \prod_{l=1}^{q-1} \mathcal{M}^l, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A} = q\mathcal{D}\mathcal{M}^1 \dots \mathcal{M}^q$.

另一方面, 若已知 $\theta(k)$, 通过 $\phi_1(\theta(k))$ 、 $\phi_2(\theta(k))$ 和 $\phi_l(\theta(k))$, 可分别确定 $s(k)$ 、 $\sigma(k)$ 和 $\zeta^l(k)$.

$$\begin{cases} s(k) = \phi_1(\theta(k)) = \text{mod}(\theta(k) - 1, \mathcal{D}) + 1, \\ \sigma(k) = \phi_2(\theta(k)) = \text{mod}\left(\left\lfloor \frac{\theta(k) - 1}{\mathcal{D}} \right\rfloor, q\right) + 1, \\ \vdots \\ \zeta^{q-1}(k) = \phi_{q+1}(\theta(k)) = \\ \text{mod}\left(\left\lfloor \frac{\theta(k) - 1}{q\mathcal{D} \prod_{l=1}^{q-2} \mathcal{M}^l} \right\rfloor, \mathcal{M}^{q-1}\right) + 1, \\ \zeta^q(k) = \phi_{q+2}(\theta(k)) = \left\lfloor \frac{\theta(k) - 1}{q\mathcal{D} \prod_{l=1}^{q-1} \mathcal{M}^l} \right\rfloor + 1. \end{cases}$$

综上, 马尔可夫链 $\theta(k)$ 的联合过渡概率矩阵 $\Pi = [\pi_{ij}]_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}}$ 定义为

$$\begin{aligned} \pi_{ij} = & \Pr\{\theta(k+1) = j | \theta(k) = i\} = \\ & \Pr\{s(k+1) = \phi_1(j) | s(k) = \phi_1(i)\} \times \\ & \Pr\{\sigma(k+1) = \phi_2(j) | \sigma(k) = \phi_2(i)\} \times \dots \times \\ & \Pr\{\zeta^q(k+1) = \phi_{q+2}(j) | \zeta^q(k) = \phi_{q+2}(i)\} = \\ & \lambda_{\phi_1(i)\phi_1(j)} \mu_{\phi_2(i)\phi_2(j)} \vartheta_{\phi_3(i)\phi_3(j)}^1 \dots \vartheta_{\phi_{q+2}(i)\phi_{q+2}(j)}^q. \end{aligned}$$

本文考虑设计如下动态输出反馈 (DOF) 控制器:

$$\begin{cases} v(k+1) = A_{\theta(k)}^c v(k) + B_{\theta(k)}^c \bar{y}(k), \\ u(k) = C_{\theta(k)}^c v(k) + D_{\theta(k)}^c \bar{y}(k). \end{cases} \quad (6)$$

其中: $v(k) \in \mathbf{R}^{n_v}$ 为控制器状态, 矩阵 $A_{\theta(k)}^c$ 、 $B_{\theta(k)}^c$ 、 $C_{\theta(k)}^c$ 、 $D_{\theta(k)}^c$ 和 $E_{\theta(k)}^c$ 为待设计的控制器增益.

令 $\eta(k) \triangleq [x^T(k), v^T(k), \bar{y}^T(k-1)]^T$. 此时闭环系统描述如下:

$$\begin{cases} \eta(k+1) = \\ \bar{A}_{\theta(k)} \eta(k) + \bar{A}_d x(k - \tau(k)) + \bar{B}_{\theta(k)} w(k), \\ z(k) = \bar{C}_{\theta(k)} \eta(k), \\ \eta(r) = \psi(r), r = -\tau_2, -\tau_2 + 1, \dots, -1, 0. \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\theta(k)} = & \begin{bmatrix} A_{\phi_1(\theta(k))} + B_{\phi_1(\theta(k))} D_{\theta(k)}^c \Xi_{\phi_2(\theta(k))} A C_{\phi_1(\theta(k))} \\ B_{\theta(k)}^c \Xi_{\phi_2(\theta(k))} A C_{\phi_1(\theta(k))} \\ \Xi_{\phi_2(\theta(k))} A C_{\phi_1(\theta(k))} \end{bmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow & \begin{bmatrix} B_{\phi_1(\theta(k))} C_{\theta(k)}^c & B_{\phi_1(\theta(k))} D_{\theta(k)}^c (I - \Xi_{\phi_2(\theta(k))}) \\ A_{\theta(k)}^c & B_{\theta(k)}^c (I - \Xi_{\phi_2(\theta(k))}) \\ 0 & I - \Xi_{\phi_2(\theta(k))} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_d &= [(A_{\phi_1(\theta(k))}^d)^T, 0, 0]^T, \\ \bar{B}_{\theta(k)} &= [(F_{\phi_1(\theta(k))})^T, 0, 0]^T, \\ \bar{C}_{\theta(k)} &= [G_{\phi_1(\theta(k))}, 0, 0], \\ \psi(r) &= [\bar{x}^T(r), 0, 0]^T. \end{aligned}$$

定义 1^[23] 如果存在标量 $0 < a_0, 0 < a_1 < 1$, 以及正整数 h , 使得

$$\mathcal{E}\{\|\eta(h)\|^2\} \leq a_0 a_1^h \max_{r \in [-\tau_2, 0]} \mathcal{E}\{\|\psi(r)\|^2\}$$

成立, 则闭环系统 (7) 在 $w(k) = 0$ 的情况下实现指数均方稳定.

本文的主要目标是通过 SCP 跳变概率 (4) 与 DOF 控制器 (6) 协同设计实现:

- 1) 当 $w(k) = 0$ 时, 闭环系统 (7) 指数均方稳定;
- 2) 当 $w(k) \neq 0$ 时, 闭环系统 (7) 满足 H_∞ 性能指标

标

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z^T(k)z(k)\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k),$$

其中 γ 是一个给定的正数.

引理 2^[24] 对于任意向量 $\xi(m) \in \mathbf{R}^n$ 和矩阵 $R > 0$ ($R \in \mathbf{R}^{n \times n}$), 下列不等式成立:

$$\sum_{m=0}^{\varphi-1} \xi^T(m) R \xi(m) \geq \frac{1}{\varphi} \left(\sum_{m=0}^{\varphi-1} \xi^T(m) \right) R \left(\sum_{m=0}^{\varphi-1} \xi(m) \right).$$

引理 3^[24] 令 $Z_1 \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}, \dots, Z_\varphi \in \mathbf{R}^{n_\varphi \times n_\varphi}$ 为正定矩阵. 如果对于所有的 $\xi_1(k) \in \mathbf{R}^{n_1}, \dots, \xi_\varphi(k) \in \mathbf{R}^{n_\varphi}, \kappa_m > 0, \sum_{m=1}^{\varphi} \kappa_m = 1, L_{mn} \in \mathbf{R}^{n_m \times n_n}$ ($m = 1, \dots, \varphi, n = 1, \dots, m-1$), 满足

$$\begin{bmatrix} Z_1 & \dots & L_{1\varphi} \\ * & \ddots & \vdots \\ * & \dots & Z_\varphi \end{bmatrix} \geq 0,$$

则下式成立:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\varphi} \frac{1}{\kappa_m} \xi_m^T(k) Z_m \xi_m(k) \geq \\ & \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \vdots \\ \xi_\varphi(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & \dots & L_{1\varphi} \\ * & \ddots & \vdots \\ * & \dots & Z_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \vdots \\ \xi_\varphi(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2 主要结果

本节建立充分性条件, 以确保闭环系统 (7) 指数均方稳定, 并满足预设的 H_∞ 性能.

定理 1 给定标量 $\tau_1, \tau_2, \gamma > 0, \lambda_{px} (p, \chi \in \mathcal{N}), \vartheta_{mn}^l (m, n \in \mathcal{S}^l)$. 如果存在矩阵 $T_{1i}, T_{2i}, L_i, P_i > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0, A_i^c, B_i^c, C_i^c, D_i^c (i, j \in \mathbb{D})$, 概率约束 $\sum_{\varsigma=1}^q \mu_{r\varsigma} = 1 (r, \varsigma \in \mathcal{Q})$, 满足不等式

$$\begin{bmatrix} Z_2 & L_i \\ L_i^T & Z_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & 0 & \Phi_{15} & \Phi_{16} & \bar{C}_i^T \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & L_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55} & \Phi_{56} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

其中

$$\mathbb{P}_i \triangleq \sum_{j=1}^{\mathcal{A}} \pi_{ij} P_j, \bar{I} = [I \ 0 \ 0], \hat{\tau} = \tau_2 - \tau_1,$$

$$\Phi_{11} = T_{1i}^T (\bar{A}_i - I) + (\bar{A}_i - I)^T T_{1i} + \mathbb{P}_i - P_i + \bar{I}^T (Q_1 + (1 + \hat{\tau}) Q_3 - Z_1) \bar{I},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \bar{I}^T Z_1, \Phi_{13} = T_{1i}^T \bar{A}_d, \Phi_{16} = T_{1i}^T \bar{B}_i, \\ \Phi_{15} &= -T_{1i}^T + \mathbb{P}_i + (\bar{A}_i - I)^T T_{2i}, \\ \Phi_{22} &= Q_2 - Q_1 - Z_1 - Z_2, \Phi_{23} = Z_2 - L_i, \\ \Phi_{33} &= -2Z_2 + L_i^T + L_i - Q_3, \Phi_{34} = Z_2 - L_i, \\ \Phi_{44} &= -Q_2 - Z_2, \Phi_{56} = T_{2i}^T \bar{B}_i, \Phi_{66} = -\gamma^2 I, \\ \Phi_{55} &= \bar{I}^T (\tau_1^2 Z_1 + \hat{\tau}^2 Z_2) \bar{I} + \mathbb{P}_i - T_{2i}^T - T_{2i}. \end{aligned}$$

则闭环系统 (7) 指数均方稳定, 且 H_∞ 性能指标小于 γ .

证明 构建 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k). \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(k) &= \eta^T(k) P_i \eta(k), \\ V_2(k) &= \sum_{m=k-\tau_1}^{k-1} x^T(m) Q_1 x(m) + \\ &\quad \sum_{m=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} x^T(m) Q_2 x(m), \\ V_3(k) &= \sum_{n=-\tau_2}^{-\tau_1} \sum_{m=k+n}^{k-1} x^T(m) Q_3 x(m), \\ V_4(k) &= \tau_1 \sum_{n=-\tau_1}^{-1} \sum_{m=k+n}^{k-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_1 \bar{I} \xi(m) + \\ &\quad \hat{\tau} \sum_{n=-\tau_2}^{-\tau_1-1} \sum_{m=k+n}^{k-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_2 \bar{I} \xi(m), \end{aligned}$$

$$\xi(m) = \eta(m+1) - \eta(m).$$

令 $\theta(k) = i, \theta(k+1) = j$. 对 Lyapunov-Krasovskii 函数进行差分运算

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{V(k+1)\} - V(k) + \\ \mathcal{E}\{z^T(k)z(k)\} - \gamma^2 w^T(k)w(k) = \\ \mathcal{E}\{\Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) + \Delta V_4(k)\} + \\ \mathcal{E}\{z^T(k)z(k)\} - \gamma^2 w^T(k)w(k). \quad (12) \end{aligned}$$

下面分别计算式 (12) 中 “=” 右侧的前 4 项, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_1(k)\} = \\ \eta^T(k+1) \mathbb{P}_i \eta(k+1) - \eta^T(k) P_i \eta(k) = \\ (\eta(k) + \xi(k))^T \mathbb{P}_i (\eta(k) + \xi(k)) - \eta^T(k) P_i \eta(k), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_2(k)\} = \\ x^T(k) Q_1 x(k) + x^T(k-\tau_1) (Q_2 - Q_1) x(k-\tau_1) - \\ x^T(k-\tau_2) Q_2 x(k-\tau_2), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_3(k)\} = \\ x^T(k) (1 + \hat{\tau}) Q_3 x(k) - \sum_{m=k-\tau_2}^{k-\tau_1} x^T(m) Q_3 x(m) \leq \\ x^T(k) (1 + \hat{\tau}) Q_3 x(k) - x^T(k-\tau(k)) Q_3 x(k-\tau(k)), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\Delta V_4(k)\} = \xi^T(k) \bar{I}^T (\tau_1^2 Z_1 + \hat{\tau}^2 Z_2) \bar{I} \xi(k) - \\ \tau_1 \sum_{m=k-\tau_1}^{k-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_1 \bar{I} \xi(m) - \\ \hat{\tau} \sum_{m=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_2 \bar{I} \xi(m). \quad (16) \end{aligned}$$

接下来, 处理式 (16) 中的求和项. 根据引理 2 和 $\xi(m) = \eta(m+1) - \eta(m)$, 可以得到

$$\begin{aligned} \tau_1 \sum_{m=k-\tau_1}^{k-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_1 \bar{I} \xi(m) \geq \\ \left(\sum_{m=k-\tau_1}^{k-1} \xi^T(m) \right) \bar{I}^T Z_1 \bar{I} \left(\sum_{m=k-\tau_1}^{k-1} \xi(m) \right) = \\ \xi_1^T(k) Z_1 \xi_1(k), \quad (17) \end{aligned}$$

其中 $\xi_1(k) = x(k) - x(k-\tau_1)$.

另一方面, 可以论证

$$\begin{aligned} \sum_{m=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_2 \bar{I} \xi(m) = \\ \sum_{m=k-\tau(k)}^{k-\tau_1-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_2 \bar{I} \xi(m) + \\ \sum_{m=k-\tau_2}^{k-\tau(k)-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_2 \bar{I} \xi(m). \end{aligned}$$

使用与式 (17) 相同的方法得到

$$\begin{aligned} \hat{\tau} \sum_{m=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_2 \bar{I} \xi(m) \geq \\ \frac{\hat{\tau}}{\tau(k) - \tau_1} \xi_2^T(k) Z_2 \xi_2(k) + \frac{\hat{\tau}}{\tau_2 - \tau(k)} \xi_3^T(k) Z_2 \xi_3(k). \quad (18) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_2(k) &= x(k-\tau_1) - x(k-\tau(k)), \\ \xi_3(k) &= x(k-\tau(k)) - x(k-\tau_2). \end{aligned}$$

此处, 可以看出 $\frac{\tau(k) - \tau_1}{\hat{\tau}} + \frac{\tau_2 - \tau(k)}{\hat{\tau}} = 1$. 根据引理 3, 当存在矩阵 L_i 满足式 (9) 时, 由式 (18) 可进一步得到

$$\begin{aligned} \hat{\tau} \sum_{m=k-\tau_2}^{k-\tau_1-1} \xi^T(m) \bar{I}^T Z_2 \bar{I} \xi(m) \geq \\ \begin{bmatrix} \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_2 & L_i \\ L_i^T & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} = \\ \xi_2^T(k) Z_2 \xi_2(k) + \xi_3^T(k) L_i^T \xi_2(k) + \\ \xi_2^T(k) L_i \xi_3(k) + \xi_3^T(k) Z_2 \xi_3(k). \quad (19) \end{aligned}$$

将式 (19) 中 “=” 右侧的 4 项分别记为 \mathfrak{A}_1 、 \mathfrak{A}_2 、 \mathfrak{A}_3 、 \mathfrak{A}_4 . 依据 $\xi_2(k)$ 和 $\xi_3(k)$, 这 4 项可等价

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= x^T(k - \tau_1)Z_2x(k - \tau_1) + \\ &\quad x^T(k - \tau(k))Z_2x(k - \tau(k)) - \\ &\quad x^T(k - \tau(k))Z_2x(k - \tau_1) - \\ &\quad x^T(k - \tau_1)Z_2x(k - \tau(k)), \\ \mathfrak{A}_2 &= x^T(k - \tau(k))L_i^T x(k - \tau_1) - \\ &\quad x^T(k - \tau(k))L_i^T x(k - \tau(k)) - \\ &\quad x^T(k - \tau_2)L_i^T x(k - \tau_1) + \\ &\quad x^T(k - \tau_2)L_i^T x(k - \tau(k)), \\ \mathfrak{A}_3 &= x^T(k - \tau_1)L_i x(k - \tau(k)) - \\ &\quad x^T(k - \tau(k))L_i x(k - \tau(k)) - \\ &\quad x^T(k - \tau_1)L_i x(k - \tau_2) + \\ &\quad x^T(k - \tau(k))L_i x(k - \tau_2), \\ \mathfrak{A}_4 &= x^T(k - \tau_2)Z_2x(k - \tau_2) + \\ &\quad x^T(k - \tau(k))Z_2x(k - \tau(k)) - \\ &\quad x^T(k - \tau(k))Z_2x(k - \tau_2) - \\ &\quad x^T(k - \tau_2)Z_2x(k - \tau(k)). \end{aligned}$$

根据闭环系统 (7), 对于任意矩阵 T_{1i} 和 T_{2i} , 下式均成立:

$$2[\eta^T(k)T_{1i}^T + \xi^T(k)T_{2i}^T][(\bar{A}_i - I)\eta(k) - \xi(k) + \bar{A}_d x(k - \tau(k)) + \bar{B}_i w(k)] \equiv 0. \quad (20)$$

通过式 (13) ~ (20), 根据式 (12) 进一步推出

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\{V(k+1)\} - V(k) + \\ &\mathcal{E}\{z^T(k)z(k)\} - \gamma^2 w^T(k)w(k) \leq \\ &\zeta^T(k)\Phi\zeta(k) < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

其中: $\zeta(k) = \text{col}\{\eta(k), x(k - \tau_1), x(k - \tau(k)), x(k - \tau_2), \xi(k), w(k)\}$, 矩阵 Φ 由式 (10) 给出.

当 $w(k) = 0$ 时, 通过式 (21) 可以认为存在标量 $\varkappa > 0$, 使得

$$\mathcal{E}\{V(k+1)\} - V(k) \leq -\varkappa \mathcal{E}\{\|\eta(k)\|^2\}. \quad (22)$$

根据 $V(k)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{V(k)\} \leq & \epsilon_1 \mathcal{E}\{\|\eta(k)\|^2\} + \epsilon_2 \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} + \\ & \epsilon_3 \sum_{n=-\tau_1}^{-1} \sum_{m=k+n}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\xi(m)\|^2\} + \\ & \epsilon_4 \sum_{n=-\tau_2}^{-\tau_1-1} \sum_{m=k+n}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\xi(m)\|^2\}. \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \max\{\lambda_{\max}(P_i)\}, \\ \epsilon_2 &= (\hat{\tau} + 3)\max\{\lambda_{\max}(\bar{I}^T Q_1 \bar{I}), \\ &\quad \lambda_{\max}(\bar{I}^T Q_2 \bar{I}), \lambda_{\max}(\bar{I}^T Q_3 \bar{I})\}, \\ \epsilon_3 &= \tau_1 \lambda_{\max}(\bar{I}^T Z_1 \bar{I}), \epsilon_4 = \hat{\tau} \lambda_{\max}(\bar{I}^T Z_2 \bar{I}). \end{aligned}$$

接下来, 对不等式 (23) 右边的最后两项进行处理. 注意到 $\xi(m) = \eta(m+1) - \eta(m)$, 则

$$\sum_{n=-\tau_1}^{-1} \sum_{m=k+n}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\xi(m)\|^2\} \leq \tau_1 \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\xi(m)\|^2\}. \quad (24)$$

对式 (24) 右边使用 Young 不等式^[1] 有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\tau_1}^{-1} \sum_{m=k+n}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\xi(m)\|^2\} \leq \\ &2\tau_1 \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} (\mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} + \mathcal{E}\{\|\eta(m+1)\|^2\}) \leq \\ &4\tau_1 \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} + 2\tau_1 \mathcal{E}\{\|\eta(k)\|^2\}. \end{aligned} \quad (25)$$

同理可得

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\tau_2}^{-\tau_1-1} \sum_{m=k+n}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\xi(m)\|^2\} \leq \\ &4\hat{\tau} \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} + 2\hat{\tau} \mathcal{E}\{\|\eta(k)\|^2\}. \end{aligned} \quad (26)$$

那么, 由式 (23) ~ (26) 可以推出

$$\mathcal{E}\{V(k)\} \leq \epsilon' \mathcal{E}\{\|\eta(k)\|^2\} + \epsilon'' \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\}. \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \epsilon_1 + 2\tau_1 \epsilon_3 + 2\hat{\tau} \epsilon_4, \\ \epsilon'' &= \epsilon_2 + 4\tau_1 \epsilon_3 + 4\hat{\tau} \epsilon_4. \end{aligned}$$

对于任意标量 $\varrho > 1$, 依据式 (22) 和 (27), 有

$$\begin{aligned} &\varrho^{k+1} \mathcal{E}\{V(k+1)\} - \varrho^k \mathcal{E}\{V(k)\} = \\ &\varrho^{k+1} \mathcal{E}\{\Delta V(k)\} + \varrho^k (\varrho - 1) \mathcal{E}\{V(k)\} \leq \\ &\varpi_1(\varrho) \varrho^k \mathcal{E}\{\|\eta(k)\|^2\} + \\ &\varpi_2(\varrho) \varrho^k \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\}. \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \varpi_1(\varrho) &= -\varrho \varkappa + (\varrho - 1) \epsilon', \\ \varpi_2(\varrho) &= (\varrho - 1) \epsilon''. \end{aligned}$$

接下来, 对于 $h > \tau_2 + 1$, 对式 (28) 两边从 0 到 $h - 1$ 进行求和, 得

$$\begin{aligned} &\varrho^h \mathcal{E}\{V(h)\} - \mathcal{E}\{V(0)\} \leq \\ &\varpi_1(\varrho) \sum_{k=0}^{h-1} \varrho^k \mathcal{E}\{\|\eta(k)\|^2\} + \\ &\varpi_2(\varrho) \sum_{k=0}^{h-1} \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \varrho^k \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\}. \end{aligned} \quad (29)$$

注意到 $\tau_2 > 1$, 对式 (29) 最后一项进行处理得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{h-1} \sum_{m=k-\tau_2}^{k-1} \varrho^k \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} \leq \\ & \left(\sum_{m=-\tau_2}^{-1} \sum_{k=0}^{m+\tau_2} + \sum_{m=0}^{h-\tau_2-1} \sum_{k=m+1}^{m+\tau_2} + \right. \\ & \left. \sum_{m=h-\tau_2}^{h-1} \sum_{k=m+1}^{m-1} \right) \varrho^k \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} \leq \\ & \tau_2 \left(\sum_{m=-\tau_2}^{-1} + \sum_{m=0}^{h-1-\tau_2} + \sum_{m=h-\tau_2}^{h-1} \right) \varrho^{m+\tau_2} \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} \leq \\ & \tau_2(\tau_2+1)\varrho^{\tau_2} \max_{r \in [-\tau_2, 0]} \mathbb{E}\{\|\psi(r)\|^2\} + \\ & \tau_2 \varrho^{\tau_2} \sum_{m=0}^{h-1} \varrho^m \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\}. \end{aligned} \quad (30)$$

下一步由式 (29) ~ (30) 有

$$\begin{aligned} \varrho^h \mathcal{E} \leq & \{V(h)\} \mathcal{E}\{V(0)\} + (\varpi_1(\varrho) + \\ & \tau_2 \varrho^{\tau_2} \varpi_2(\varrho)) \sum_{m=0}^{h-1} \varrho^m \mathcal{E}\{\|\eta(m)\|^2\} + \\ & \tau_2(\tau_2+1)\varrho^{\tau_2} \varpi_2(\varrho) \max_{r \in [-\tau_2, 0]} \mathbb{E}\{\|\psi(r)\|^2\}. \end{aligned} \quad (31)$$

令 $\epsilon_0 = \lambda_{\min}(P_i)$, $\epsilon = \max\{\epsilon', \epsilon''\}$. 由式 (11) 得出

$$\mathcal{E}\{V(h)\} \geq \epsilon_0 \mathcal{E}\{\|\eta(h)\|^2\}. \quad (32)$$

由式 (27) 可以得到

$$\mathcal{E}\{V(0)\} \leq \epsilon(\tau_2+1) \max_{r \in [-\tau_2, 0]} \mathcal{E}\{\|\psi(r)\|^2\}. \quad (33)$$

此外, 当 $\varrho = 1$ 时, $\varpi_1(\varrho) + \tau_2 \varrho^{\tau_2} \varpi_2(\varrho) < 0$; 当 $\varrho \rightarrow +\infty$ 时, 由于 ϱ^{τ_2} 远大于 ϱ , $\varpi_1(\varrho) + \tau_2 \varrho^{\tau_2} \varpi_2(\varrho) \rightarrow +\infty$. 则存在一个数 $\varrho_0 > 1$, 使得

$$\varpi_1(\varrho_0) + \tau_2 \varrho_0^{\tau_2} \varpi_2(\varrho_0) = 0. \quad (34)$$

将式 (32) ~ (34) 代入 (31) 推导出

$$\mathcal{E}\{\|\eta(h)\|^2\} \leq a_0 a_1^h \max_{r \in [-\tau_2, 0]} \mathcal{E}\{\|\psi(r)\|^2\}. \quad (35)$$

其中: $a_0 = \frac{1}{\epsilon_0}(\epsilon(\tau_2+1) + \tau_2(\tau_2+1)\varrho_0^{\tau_2} \varpi_2(\varrho_0))$, $a_1 = \frac{1}{\varrho_0}$. 根据定义 1, 闭环系统 (7) 是指数均方稳定的.

当 $w(k) \neq 0$ 时, 将式 (21) 从 $k = 0$ 到 ∞ 求和可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z^T(k)z(k)\} < \\ & \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) + V(0) - \mathcal{E}\{V(\infty)\}. \end{aligned} \quad (36)$$

注意到, 式 (36) 中 $V(0) = 0$ 以及 $V(\infty) = 0$ 分别由于零初始条件和闭环系统指数均方稳定, 可以得出如下不等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z^T(k)z(k)\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k). \quad (37)$$

故, 闭环系统 (7) 是指数均方稳定的, 其闭环系统 H_∞ 性能指标小于 γ . \square

注 3 上述定理 1 的证明基于 Lyapunov 第二法. 首先构建 Lyapunov 函数 (11), 对其差分得到式 (12). 进一步计算式 (12) 中 $\Delta V_1(k)$ 、 $\Delta V_2(k)$ 、 $\Delta V_3(k)$ 、 $\Delta V_4(k)$, 结果如式 (13) ~ (16) 所示. 根据引理 2 和引理 3 处理式 (16) 中的累加项, 然后通过式 (13) ~ (20), 根据式 (12) 推出 (21), 证明 Lyapunov 函数差分小于 0. 最后分别分析 $w(k)$ 是否为 0 时的系统性能指标.

在定理 1 中, 存在耦合项 $T_{1i}^T(\bar{A}_i - I)$ 、 $(\bar{A}_i - I)^T T_{1i}$ 、 $(\bar{A}_i - I)^T T_{2i}$, T_{1i} 、 T_{2i} 和在 \bar{A}_i 中的控制器矩阵均未知. 为了在后续的控制设计过程中将非线性约束转化为线性, 为此定义一些变量.

首先, 令 $T_{1i} \triangleq T$, $T_{2i} \triangleq \lambda T_{1i} = \lambda T$, 矩阵 T 为如下形式:

$$T = \begin{bmatrix} R^T & J_1 & 0 \\ N^T & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1}I \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} S^T & J_3 & 0 \\ M^T & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix}. \quad (38)$$

其中: R 、 N 、 S 、 M 、 J_1 、 J_2 、 J_3 、 J_4 为矩阵, μ 为标量. 由式 (38) 可得 $R^T S^T + J_1 M^T = I$, $N^T S^T + J_2 M^T = 0$. 接下来, 定义两个矩阵

$$X_1 \triangleq \begin{bmatrix} I & S^T & 0 \\ 0 & M^T & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix}, \quad X_2 \triangleq \begin{bmatrix} R^T & I & 0 \\ N^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (39)$$

根据计算可以得出 $TX_1 = X_2$.

然后, 做出如下定义:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbb{A}_i^c & \mathbb{B}_i^c \\ \mathbb{C}_i^c & \mathbb{D}_i^c \end{bmatrix} \triangleq \\ & \begin{bmatrix} N & RB_{\phi_1(i)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i^c - I & B_i^c \\ C_i^c & D_i^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ \Xi_{\phi_2(i)} AC_{\phi_1(i)} S^T & I \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} R(A_{\phi_1(i)} - I)S^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (40)$$

$A_1 \triangleq$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \mathbb{A}_i^c & \mu \mathbb{B}_i^c (I - \Xi_{\phi_2(i)}) \\ A_{12} & A_{13} & \mu B_{\phi_1(i)} \mathbb{D}_i^c (I - \Xi_{\phi_2(i)}) \\ A_{14} & \Xi_{\phi_2(i)} AC_{\phi_1(i)} S^T & -\mu \Xi_{\phi_2(i)} \end{bmatrix},$$

$$A_2 \triangleq \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ S & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 \triangleq \begin{bmatrix} R & Y^T & 0 \\ I & S^T & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix},$$

$$A_{11} \triangleq R(A_{\phi_1(i)} - I) + \mathbb{B}_i^c \Xi_{\phi_2(i)} AC_{\phi_1(i)},$$

$$S \triangleq [I \quad S^T \quad 0],$$

$$A_{14} \triangleq \Xi_{\phi_2(i)} AC_{\phi_1(i)}, \quad \bar{\mathbb{P}}_i = \sum_{j=1}^{\mathcal{A}} \pi_{ij} \bar{\mathbb{P}}_j,$$

$$\begin{aligned} A_{12} &\triangleq A_{\phi_1(i)} - I + B_{\phi_1(i)} \mathbb{D}_i^c \Xi_{\phi_2(i)} A C_{\phi_1(i)}, \\ A_{13} &\triangleq (A_{\phi_1(i)} - I) S^T + B_{\phi_1(i)} C_i^c, \quad \mathbb{I} \triangleq [I \quad I \quad 0], \\ Y &\triangleq S R^T + M N^T, \quad \bar{P}_i \triangleq X_1^T P_i X_1. \end{aligned} \quad (41)$$

定理 2 给定标量 $\lambda > 0, \gamma > 0, \mu, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_{px} (p, \chi \in \mathcal{N}), \vartheta_{mn}^l (m, n \in \mathcal{L})$. 如果存在矩阵 $R, S, Y, L_i, \bar{P}_i > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0, A_i^c, B_i^c, C_i^c, D_i^c (i, j \in \mathbb{D})$, 概率约束 $\sum_{\varsigma=1}^q \mu_{r\varsigma} = 1 (r, \varsigma \in \mathcal{Q})$ 满足不等式 (9) 以及

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \Theta^T \\ \Theta & \Gamma \end{bmatrix} < 0. \quad (42)$$

其中

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & 0 & \bar{\Phi}_{15} & \bar{\Phi}_{16} & G_i^T S^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & L_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & \bar{\Phi}_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55} & \bar{\Phi}_{56} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Phi}_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \alpha \mathbb{I} & -\alpha I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\hat{\tau} + 1} S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\tau} S & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \text{diag}\{-Z_1, \beta_1^2 Q_1 - 2\beta_1 I, \beta_2^2 Q_3 - 2\beta_2 I, \beta_3^2 Z_1 - 2\beta_3 I, \beta_4^2 Z_2 - 2\beta_4 I\},$$

$$\bar{\Phi}_{11} = \bar{P}_i - \bar{P}_i + \Lambda_1 + \Lambda_1^T - \alpha(\Lambda_2 + \Lambda_2^T),$$

$$\bar{\Phi}_{56} = \lambda \bar{\Phi}_{16},$$

$$\bar{\Phi}_{12} = \alpha[2I \quad I + S \quad 0]^T,$$

$$\bar{\Phi}_{13} = [R A_{\phi_1(i)}^d \quad A_{\phi_1(i)}^d \quad 0]^T,$$

$$\bar{\Phi}_{15} = -\Lambda_3 + \lambda \Lambda_1^T + \bar{P}_i,$$

$$\bar{\Phi}_{16} = [R F_{\phi_1(i)} \quad F_{\phi_1(i)} \quad 0]^T,$$

$$\bar{\Phi}_{22} = -Q_1 + Q_2 - Z_2 - 2\alpha I,$$

$$\bar{\Phi}_{55} = \bar{P}_i - \lambda(\Lambda_3 + \Lambda_3^T).$$

则闭环系统 (7) 均方指数稳定, 且闭环系统 H_∞ 性能指标小于 γ .

同时, 对式 (41) 中 $Y - SR^T$ 进行奇异值分解获得 M 和 N^T , 参数 $A_i^c, B_i^c, C_i^c, D_i^c$ 通过求解不等式 (42) 获得. 此时, 式 (40) 中只有控制器参数 $A_i^c, B_i^c, C_i^c, D_i^c$ 未知, 从而可得出控制器参数.

证明 由于 $Z_1 > 0$, 对于任意矩阵 \mathcal{B} 和 \mathcal{C} 满足

$$(\mathcal{B} - \alpha Z_1^{-1} \mathcal{C})^T Z_1 (\mathcal{B} - \alpha Z_1^{-1} \mathcal{C}) \geq 0. \quad (43)$$

此处, 令 $\mathcal{B} = [S \quad -I], \mathcal{C} = [\mathbb{I} \quad -I]$, 将式 (43) 展开可得

$$\begin{aligned} -\mathcal{B}^T Z_1 \mathcal{B} &\leq \\ -\alpha(\mathcal{B}^T \mathcal{C} + \mathcal{C}^T \mathcal{B}) + \alpha^2 \mathcal{C}^T Z_1^{-1} \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (44)$$

利用类似的方法, 可以得到下列不等式:

$$-Q_1^{-1} \leq \beta_1^2 Q_1 - 2\beta_1 I, \quad -Q_3^{-1} \leq \beta_2^2 Q_3 - 2\beta_2 I; \quad (45)$$

$$-Z_1^{-1} \leq \beta_3^2 Z_1 - 2\beta_3 I, \quad -Z_2^{-1} \leq \beta_4^2 Z_2 - 2\beta_4 I. \quad (46)$$

通过关系式 (45) 和 (46) 对 (42) 中分块矩阵 Γ 放缩得到

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \Theta^T \\ \Theta & \Gamma \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \Theta^T \\ \Theta & \Gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (47)$$

其中

$$\bar{\Gamma} = \text{diag}\{-Z_1, -Q_1^{-1}, -Q_3^{-1}, -Z_1^{-1}, -Z_2^{-1}\}.$$

根据舒尔补定理, 不等式 (47) 等价于 $\bar{\Phi} - \Theta^T \bar{\Gamma}^{-1} \Theta < 0$, 即

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{\Phi}}_{11} & \bar{\bar{\Phi}}_{12} & \bar{\bar{\Phi}}_{13} & 0 & \bar{\bar{\Phi}}_{15} & \bar{\bar{\Phi}}_{16} & G_i^T S^T \\ * & \bar{\bar{\Phi}}_{22} & \bar{\bar{\Phi}}_{23} & L_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\bar{\Phi}}_{33} & \bar{\bar{\Phi}}_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\bar{\Phi}}_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\bar{\Phi}}_{55} & \bar{\bar{\Phi}}_{56} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\bar{\Phi}}_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (48)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Phi}}_{11} &= S^T(Q_1 + (\hat{\tau} + 1)Q_3)S + \bar{P}_i - \bar{P}_i + \\ &\quad \Lambda_1 + \Lambda_1^T - \alpha(S^T \mathbb{I} + \mathbb{I}^T S) + \alpha^2 \mathbb{I}^T Z^{-1} \mathbb{I}, \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_{12} = \alpha(\mathbb{I}^T + S^T) - \alpha^2 \mathbb{I}^T Z^{-1},$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_{22} = -Q_1 + Q_2 - Z_2 - 2\alpha I + \alpha^2 Z^{-1},$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_{55} = \bar{P}_i - \lambda(\Lambda_3 + \Lambda_3^T) + S^T(\tau_1 Z_1 + \hat{\tau} Z_2)S.$$

注意到, 式 (48) 中分块矩阵可表述为

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{\Phi}}_{11} & \bar{\bar{\Phi}}_{12} \\ * & \bar{\bar{\Phi}}_{22} \end{bmatrix} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_2.$$

其中

$$\mathfrak{W}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} S^T(Q_1 + (\hat{\tau} + 1)Q_3)S + & 0 \\ \bar{P}_i - \bar{P}_i + \Lambda_1 + \Lambda_1^T & \\ * & -Q_1 + Q_2 - Z_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{W}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha(S^T \mathbb{I} + \mathbb{I}^T S) + \alpha^2 \mathbb{I}^T Z^{-1} \mathbb{I} & \alpha(\mathbb{I}^T + S^T) - \alpha^2 \mathbb{I}^T Z^{-1} \\ * & -2\alpha I + \alpha^2 Z^{-1} \end{bmatrix}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -S^T Z_1 S & S^T Z_1 \\ Z_1 S & -Z_1 \end{bmatrix} &= -\mathcal{B}^T Z_1 \mathcal{B} \leq \\ -\alpha(\mathcal{B}^T \mathcal{C} + \mathcal{C}^T \mathcal{B}) + \alpha^2 \mathcal{C}^T Z_1^{-1} \mathcal{C} &= \mathfrak{W}_2. \end{aligned} \quad (49)$$

在式 (49) 中, 两个“=”的成立由 $\mathcal{B} = [S \quad -I]$ 和 $\mathcal{C} = [\mathbb{I} \quad -I]$ 保证, “ \leq ”的成立由式 (44) 保证.

综上, 有

$$\mathfrak{M}_1 + \begin{bmatrix} -S^T Z_1 S & S^T Z_1 \\ Z_1 S & -Z_1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} \\ * & \bar{\Phi}_{22} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

根据式 (48) 和 (50) 可以推出

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & 0 & \bar{\Phi}_{15} & \bar{\Phi}_{16} & G_i^T S^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & L_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & \bar{\Phi}_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55} & \bar{\Phi}_{56} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Phi}_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (51)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= S^T [Q_1 + (\hat{\tau} + 1)Q_3 - Z_1]S + \bar{P}_i - \bar{P}_i + \Lambda_1 + \Lambda_1^T, \\ \bar{\Phi}_{12} &= S^T Z_1. \end{aligned}$$

对式 (51) 两边同时乘上 $\text{diag}\{X_1^{-1}, I, I, I, X_1^{-1}, I, I\}$ 的转置及其本身后, 可得到式 (10). 综上所述, 式 (42) 可以保证 (10) 成立. 此时, 闭环系统 (7) 指数均方稳定, 且实现了预设的 H_∞ 性能.

此时 Y 、 S 、 R 均已知, 对式 (41) 中 $Y - SR^T$ 进行奇异值分解获得 M 和 N^T , 参数 A_i^c 、 B_i^c 、 C_i^c 、 D_i^c 通过求解不等式 (42) 获得. 式 (40) 中只有控制器参数 A_i^c 、 B_i^c 、 C_i^c 、 D_i^c 未知, 从而可得出控制器参数. \square

注 4 定理 2 在满足系统预设性能基础上实现了控制器解耦. 通过关系式 (45) 和 (46) 对 (42) 中分块矩阵 Γ 放缩得到 (47). 再根据舒尔补定理, 式 (47) 等价于 (48). 此时对式 (48) 中分块矩阵放缩后, 式 (48) 可进一步改写为 (51). 通过合同变化 (51) 可得到 (10), 此时系统稳定性证明结束. 最后从式 (40) 中求解出控制器.

注 5 在许多实际应用中, 确定 γ 的最小值具有重要意义, 其值越小表明系统抗扰性能越好^[22]. 优化目标参数 γ_{\min} 的最小值可通过求解下列优化问题获得:

$$\begin{aligned} \min_{A_i^c, B_i^c, C_i^c, D_i^c} \gamma^2. \\ \text{s.t. } \sum_{\varsigma=1}^q \mu_{r\varsigma} = 1, \quad r, \varsigma \in \mathcal{Q}; \\ Z_1 > 0, \quad Z_2 > 0, \quad \bar{P}_i > 0; \\ Q_1 > 0, \quad Q_2 > 0, \quad Q_3 > 0; \\ \text{式(9)、(42)}. \end{aligned} \quad (52)$$

3 优化算法

由定理 2 可知式 (9) 和 (42) 是线性的, 可用 Matlab

工具箱求解出一组控制器参数. 然而, 由于在定理 2 的证明过程中, 采用了式 (44) ~ (46) 以及 (50) 中的缩放技术, 导致额外增加保守性. 因此, 所得的控制器参数在系统 H_∞ 性能方面仅构成了一个可行解, 而非最优解. 但本文设计的算法可直接求解非线性约束, 无需引入额外约束, 从而具有更小的保守性.

在深入探讨本文优化算法的细节之前, 有必要提到, 在大多数的网络化控制系统中, SCP 通道跳变概率是已知的^[25]. 然而, 本文考虑了跳变概率可变化的情况, 且具有 $\sum_{\varsigma=1}^q \mu_{r\varsigma} = 1 (r, \varsigma \in \mathcal{Q})$ 的等式约束.

注意到, 与传统遗传算法不同^[19], 优化问题 (52) 含有等式约束. 因此, 本文提出带有惩罚约束的遗传算法来协同设计控制器参数与 SCP 通道跳变概率, 以获得当前搜索范围内最优的 H_∞ 性能参数 γ_{\min} . 带有惩罚约束的遗传算法具体步骤如算法 1 所示.

考虑以下函数:

$$\text{eval}(\gamma, \mu_{r\varsigma}) = f(\gamma) + g(\mu_{r\varsigma}), \quad r, \varsigma \in \mathcal{Q}. \quad (53)$$

其中: $\text{eval}(\gamma, \mu_{r\varsigma})$ 表示评价函数; $f(\gamma)$ 表示式 (52) 中的目标函数; 符号 $g(\mu_{r\varsigma})$ 代表惩罚项, 具体设置为

$$g(\lambda_{r\varsigma}) = (cM_{it})^\alpha \sum_{r \in \mathcal{Q}} \left(\left| \sum_{\varsigma \in \mathcal{Q}} \mu_{r\varsigma} - 1 \right| \right)^\theta. \quad (54)$$

这里, 设置 $c = 0.5$, $\alpha = \theta = 2$, M_{it} 为当前迭代次数.

算法 1 基于改进遗传算法的控制器与通信概率协同设计.

step 1: 编码 SCP 通道选择跳变概率 $\mu_{r\varsigma} (r, \varsigma \in \mathcal{Q})$, 并设置最大迭代次数 M_{\max} . 考虑到概率特性, $\mu_{r\varsigma}$ 的搜索范围可以限制在 0 到 1 之间.

$$\mu_{r\varsigma} \rightarrow \bar{\omega} \triangleq [\omega_1, \dots, \omega_q], \quad \bar{\omega} \in \mathbf{R}^{q \times q},$$

其中 $\omega_1 = [\mu_{11}, \dots, \mu_{1q}], \dots, \omega_q = [\mu_{q1}, \dots, \mu_{qq}]$.

根据定理 2 可得到一组控制器参数, 将其作为算法 1 初始值. 令

$$K_{\text{gain}} \triangleq [A_1^c, \dots, A_i^c, B_1^c, \dots, B_i^c, C_1^c, \dots, C_i^c; D_1^c, \dots, D_i^c], \quad i \in \mathbb{D}.$$

step 2: 将初始染色体设置为 N_p , $\omega_i (i \in \mathcal{Q})$ 在 0 和 1 之间随机生成. 控制器参数在 $[\varepsilon_1 K_{\text{gain}}, \varepsilon_2 K_{\text{gain}}]$ 范围内搜索, 其中 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 为给定值.

step 3: 通过求解优化问题 (52), 可以计算适应度函数 $F(\gamma, \mu_{r\varsigma}) \triangleq \frac{1}{\text{eval}(\gamma, \mu_{r\varsigma})}$. 注意, 如果问题 (52) 不可行, 则让适应度函数 $F(\gamma, \mu_{r\varsigma}) \triangleq \frac{1}{\text{eval}(\gamma, \mu_{r\varsigma})}$ 是一个足够小的值, 以减少其在下一代中生存的机会. 保留当前迭代最优结果, 即 SCP 信道选择概率与

对应控制器增益.

step 4: 根据 step 3 中分配的适应度值, 通过执行遗传操作选择、交叉、突变、精英化获得下一代 SCP 信道选择概率与控制器增益 (更多细节可参考文献 [1]). 这里, 将交叉概率表示为 p_c , 变异概率表示为 p_m , 精英选择率表示为 p_e . 为了提高后代中高适应性个体的比例, 使用轮盘赌方法选择个体.

step 5: 在每一代中, 重复 step 3 和 step 4 的进化过程. 当达到最大迭代次数 M_{\max} 时, 算法终止, 解码最佳染色体, 获得 w_i 、 K_{gain} 并输出最终结果, 即模态跳变概率 μ_{rc} 与控制器参数以实现最大适应度 (最小值 γ).

注 6 在给定的 SCP 通道跳变概率的约束条件下, 尽管定理 2 能够求解出一组设计 DOF 控制器参数, 然而就闭环系统的 H_∞ 性能而言并非最优. 因此, 为了获得参数 γ 的最优值, 本文提出算法 1 以实现 DOF 控制器与 SCP 通道跳变概率的协同优化设计.

注 7 尽管定理 2 可求解出控制器参数, 由于其在证明过程中引入式 (44) ~ (46) 以及 (50) 中的缩放技术, 导致增加额外的保守性. 定理 2 得到的控制器参数在系统 H_∞ 方面仅为可行解, 因此在定理 2 的基础上提出算法 1, 一方面可以直接求解非线性降低保守性, 另一方面能够优化闭环系统 H_∞ 性能.

4 仿真算例

例 1 考虑具有两个跳变模态的 MJS, 参数如下.

模态 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.25 & -0.2 + 0.1a \\ 0.1 & -0.1 + a - b \end{bmatrix},$$

$$A_1^d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.2 - b \\ b \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.21 + 0.1b \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -2.4 & -0.9 \\ -1.8 & -0.2 + b \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

模态 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.15 & -0.1 \\ 0.1 + 0.1a & -0.1 + a - b \end{bmatrix},$$

$$A_2^d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.2 - b \\ b \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.11 + 0.1b \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -2.5 & -0.6 \\ -1.9 & -0.3 + b \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

给出 MJS 模态跳变、SCP 传输通道选择和两个通道衰减系数跳变的初始概率转移矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\Theta^1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \Theta^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}.$$

其余参数给定如下: $\mu = 10$, $\alpha = 0.1$, $\lambda = 5$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.5$, $\varepsilon_1 = 0.8$, $\varepsilon_2 = 1.2$, $\mu_{\zeta^1(k)} \in \{0.8, 0.9\}$, $\mu_{\zeta^2(k)} \in \{0.7, 0.8\}$, $w(k) = 1/k^2$. 参数 τ_1 、 τ_2 、 μ 、 α 、 λ 、 β_1 、 β_2 、 β_3 、 β_4 、 ε_1 、 ε_2 、 $\mu_{\zeta^1(k)}$ 、 $\mu_{\zeta^2(k)}$ 为控制器设计条件 (9) 和 (42) 以及算法设计中包含的参数, 由系统建模、算法设计或者稳定性理论证明过程中引入的参数.

关于上述参数选择的合理性, 在此做出说明.

1) 本文考虑对象是开环不稳定系统对应的参数, 通过本文所设计方法使其闭环系统达到稳定, 从而验证本文所提方法的有效性.

2) 衰减系数 $\mu_{\zeta^1(k)}$ 和 $\mu_{\zeta^2(k)}$ 表示信号衰减后为原信号幅值的倍数, 因此其取值范围为 $[0, 1]$. 类似的取值方式在文献 [21] 中也可查阅.

3) τ_1 和 τ_2 分别表示时延 $\tau(k)$ 的下界和上界, 其取值要求 $1 \leq \tau_1 < \tau_2$ 即可.

4) ε_1 、 ε_2 分别为算法 1 搜索范围的上下界系数, 该参数影响算法 1 的搜索范围. 在取值过程中为保证在此取值范围内算法 1 有解为依据. 为了清晰地阐述其对实验结果的影响及选择的合理性, 设置两组不同的搜索范围用于比较 H_∞ 性能参数 γ 以及算法运行时间. 此处, 范围 1: $\{\varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 1.2\}$, 范围 2: $\{\varepsilon_1 = 0.2, \varepsilon_2 = 2\}$. 算法结果如图 2 所示.

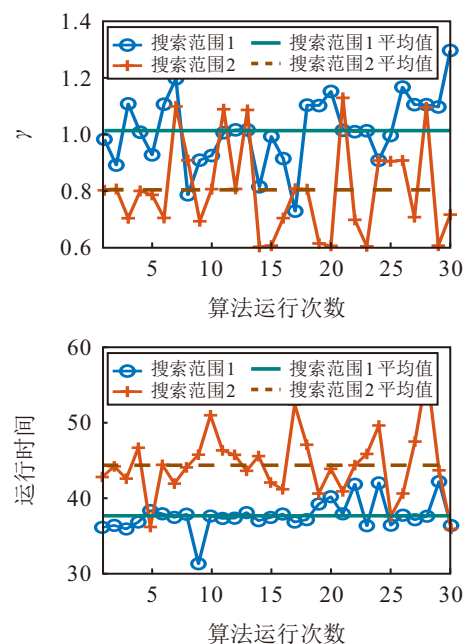


图2 不同范围内的最优 H_∞ 性能参数 γ 和运行时间

根据图 2 所示, 可以看出不同搜索范围的最优

H_∞ 性能参数 γ 和运行时间是不同的. 一般而言, 搜索范围 2 得到的最优 H_∞ 性能参数小于搜索范围 1. 但是, 搜索范围 2 的运行时间比搜索范围 1 长.

5) 其余参数为放缩过程或引入的结构约束而产生, 其参数选择依据是保证实现系统闭环稳定且实现 H_∞ 性能的充分性条件有解. 文献 [26] 中也存在类似的由放缩过程和引入结构约束而产生的参数.

情况 1 考虑 $a = b = 0$.

图 3 描述了开环系统和闭环系统的状态轨迹曲线. 图 3(a) 表明开环系统状态发散是不稳定的, 图 3(b) 表明闭环系统在所设计的 DOF 控制器作用下实现稳定. 从图 4 可以看出, 随着迭代次数增加, 闭环系统 H_∞ 性能指标逐渐优化. 大约迭代 20 次时, γ 值收敛到当前算法搜索范围内的最优值. 图 5 中散点图代表当概率随机变化 300 次时, 所获得的系统 H_∞ 性能指标 γ , 红色实线代表通过算法 1 获得的最优值. 图 5 表明定理 2 在 H_∞ 性能方面只能得到可行解, 而算法 1 可以获得当前搜索范围内最优解. 此时

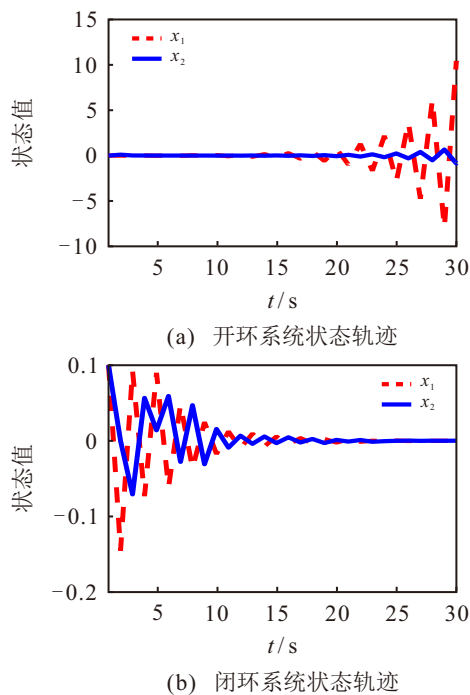


图3 系统状态轨迹

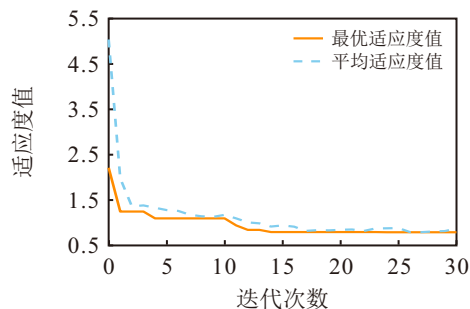


图4 GA 迭代结果

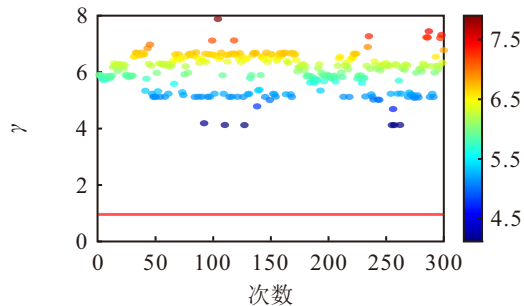


图5 随机概率与最优概率 γ 值

$\gamma_{\min} = 0.95$, $\mu_{11} = 0.5296$, $\mu_{12} = 0.4704$, $\mu_{21} = 0.7564$, $\mu_{22} = 0.2436$.

情况 2 考虑 a 、 b 取值范围为 $\{-0.3, -0.2, \dots, 0.3\}$.

符号“ a ”和“ b ”是参数化标量, 在集合 $\{-0.3, -0.2, \dots, 0.3\}$ 中取不同的值, 以比较不同方法获得的最小 H_∞ 性能参数 γ_{\min} . 在这里, 将本文定理 2 和算法 1 与文献 [27-28] 中方法所获得的 γ_{\min} 值进行比较.

图 6 给出了本文与参考文献方法在系统参数变化情况下得到 γ 值的情况. 可以看出本文通过算法 1 获得的 H_∞ 性能参数 γ 要优于文献 [27] 和文献 [28]. 由此, 可以表明本文控制算法在闭环系统 H_∞ 性能方面的优越性.

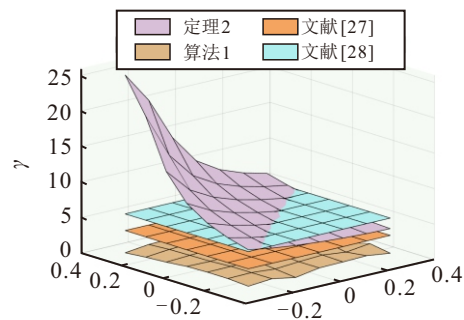


图6 a 、 b 不同取值下的 γ 值

例 2 考虑一个 RLC 电路, 系统模型如下所示:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_i R} & \frac{1}{C_i} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix} u(t) + D_i w(t),$$

$$i \in \{1, 2\}.$$

其中: $w(t)$ 为外部扰动, R 为电阻, L 为电感, C_1 、 C_2 为不同回路的电容, $U_c(t)$ 为电容器两端的电压, $i_L(t)$ 为电感 L 两端的电流, $i_R(t)$ 为电阻 R 两端的电流, $U(t)$ 为输入电压.

当开关转动时系统建模为 MJS. 系统参数设置均与文献 [29] 相同. 通过本文提出的算法 1 优化后得到的闭环系统 H_∞ 性能指标 γ 为 1.67, 而文献 [29]

的 H_∞ 性能指标 γ 为4.49. 上述实验结果不仅验证了本文所设计方法的有效性, 还说明了本文在优化闭环系统 H_∞ 性能方面的优越性.

5 结论

本文探讨了基于衰减网络的 Markov 跳变系统通信调度概率和控制器协同设计问题. 具体而言, 在每个传输时刻只能通过网络传输一个信道的衰减信号, 该信号由传感器的测量信号经过衰减网络传输到控制器. 引入随机通信协议对信道选择进行调度, 随机通信协议的信道选择和衰减网络中的衰减系数均建模为 Markov 模型. 通过 Lyapunov 方法, 推导出同时满足闭环系统指数均方稳定和预设 H_∞ 性能的充分性条件. 然而, 得出的系统稳定性和控制器设计条件存在非线性和非凸约束. 为了解决非线性约束并且获得最佳的闭环系统 H_∞ 性能, 本文提出一种带有惩罚约束的遗传算法与线性矩阵不等式方法相结合的迭代算法, 并给出该迭代算法初始值的选择方案. 最后, 本文例子部分验证了所提出的控制方法的有效性.

参考文献 (References)

- [1] Xu H, Yu T, Ren C C, et al. Finite-time decentralized sliding mode control for interconnected systems and its application to electrical power systems: A GA-assisted design method[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2024, 71(6): 2835-2847.
- [2] 李进, 姜顺, 潘丰. 隐蔽式攻击下网络化控制系统状态与故障的联合区间估计[J]. *控制与决策*, 2023, 38(12): 3418-3426.
(Li J, Jiang S, Pan F. Joint interval estimation of state and fault for networked control systems under stealthy attacks[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(12): 3418-3426.)
- [3] Liu R, Liang Z H, Wang Z Y, et al. Indoor visible light positioning based on improved whale optimization method with min-max algorithm[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 2504910.
- [4] 杨宇航, 王恒, 周欣, 等. 基于事件触发的网络化无人车自适应路径跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(9): 3069-3078.
(Yang Y H, Wang H, Zhou X, et al. Event-triggered finite-time adaptive path following control for connected automated vehicle[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(9): 3069-3078.)
- [5] Tao Y Y, Wu Z G. Asynchronous static output-feedback control of Markovian jump linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 69(4): 2453-2460.
- [6] 张晓红, 张欣, 石冠男, 等. 基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型[J]. *控制与决策*, 2021, 36(2): 418-428.
(Zhang X H, Zhang X, Shi G N, et al. Multi-component system state space partition model based on Markov process[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(2): 418-428.)
- [7] Liu W C, Quevedo D E, Vucetic B, et al. Stability conditions for remote state estimation of multiple systems over semi-Markov fading channels[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 6: 2954-2959.
- [8] Liu S, Wang Z D, Wang L C, et al. Finite-horizon H_∞ filtering via a high-rate network with the FlexRay protocol[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 68(6): 3596-3603.
- [9] Liu J, Ke J C, Liu J L, et al. Secure event-triggered control for IT-2 fuzzy networked systems with stochastic communication protocol and FDI attacks[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, 32(3): 1167-1180.
- [10] Geng H, Wang Z D, Hu J, et al. Distributed recursive filtering over sensor networks under random access protocol: When state saturation meets censored measurement[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(12): 7760-7772.
- [11] Ren X X, Yang G H, Zhang X G. Statistical-based optimal ϵ -stealthy attack under stochastic communication protocol: An application to networked permanent magnet synchronous machine systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023, 70(1): 1036-1046.
- [12] Lv X Y, Niu Y G, Song J. Sliding mode control for uncertain 2D systems under stochastic communication protocol: The Roesser model case[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 69(3): 1228-1232.
- [13] Pang Y S, Xiao Y, Lei X, et al. Performance analysis of space-time line code in correlated fading channels[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021, 70(6): 6244-6248.
- [14] 解相朋, 杨馥伊, 魏聪, 等. 混合攻击下直流微电网的 FDI 估计与模糊控制联合设计[J]. *控制与决策*, 2023, 38(8): 2335-2345.
(Xie X P, Yang F Y, Wei C, et al. Joint design of FDI estimation and fuzzy control for DC microgrid under hybrid attacks[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(8): 2335-2345.)
- [15] Lu Z B, Guo G. Control and communication scheduling co-design for networked control systems: A survey[J]. *International Journal of Systems Science*, 2023, 54(1): 189-203.
- [16] 王浩亮, 柴亚星, 王丹, 等. 基于事件触发机制的多自主水下航行器协同路径跟踪控制[J]. *自动化学报*, 2024, 50(5): 1024-1034.
(Wang H L, Chai Y X, Wang D, et al. Event-triggered cooperative path following of multiple autonomous underwater vehicles[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2024, 50(5): 1024-1034.)
- [17] 黄帅, 孙棣华, 赵敏. 多切入机制下基于信息物理系统

- 的混合车群协同控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(1): 17-25.
- (Huang S, Sun D H, Zhao M. CPS-based mixed vehicle group cooperative control with multiple cut-in maneuvers[J]. Control and Decision, 2024, 39(1): 17-25.)
- [18] Liu X F, Fang Y C, Zhan Z H, et al. A cooperative evolutionary computation algorithm for dynamic multiobjective multi-AUV path planning[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2024, 20(1): 669-680.
- [19] Yi Z K, Xu T T, Shang W F, et al. Genetic algorithm-based ensemble hybrid sparse ELM for grasp stability recognition with multimodal tactile signals[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023, 70(3): 2790-2799.
- [20] Qi W H, Zhang N, Ahn C K, et al. Genetic-algorithm-based sliding-mode stabilization for networked switched systems with unreliable channels[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2024, 11(4): 1778-1789.
- [21] Song J, Wang Z D, Niu Y G, et al. Genetic-algorithm-assisted sliding-mode control for networked state-saturated systems over hidden Markov fading channels[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(7): 3664-3675.
- [22] Cao Z R, Niu Y G, Reza Karimi H. Dynamic output feedback sliding mode control for Markovian jump systems under stochastic communication protocol and its application[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(17): 7307-7325.
- [23] Wang Z D, Ho D W C, Liu Y R, et al. Robust H_∞ control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements[J]. *Automatica*, 2009, 45(3): 684-691.
- [24] Fridman E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control[M]. Cham: Springer International Publishing, 2014.
- [25] Yao M, Wei G L, Ding D R, et al. Output-feedback control for stochastic impulsive systems under Round-Robin protocol[J]. *Automatica*, 2022, 143: 110394.
- [26] Chen Y G, Wang Z D, Alsaadi F E, et al. Dynamic output-feedback control for discrete time-delayed systems with actuator saturations under round-robin communication protocol[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(3): 1703-1720.
- [27] Liu X H, Ma G Q, Pagilla P R, et al. Dynamic output feedback asynchronous control of networked Markovian jump systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(7): 2705-2715.
- [28] 郑柏浩, 嵇小辅, 朱毅. 不确定离散半马尔可夫跳变系统的有限时间鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 836-844.
- (Zheng B H, Ji X F, Zhu Y. Robust finite-time H_∞ control for uncertain discrete-time semi-Markov jump systems[J]. Control and Decision, 2024, 39(3): 836-844.)
- [29] Yang D, Feng Q C, Zong G D. Asynchronous bumpless transfer finite-time H_∞ control for Markovian jump systems with application to circuit system[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(12): 4929-4933.

作者简介

余涛 (1993-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为复杂动态系统控制理论、人工智能与自主无人系统的交叉, E-mail: yutao16@mail.ustc.edu.cn;

王锐豪 (1999-), 男, 硕士生, 主要研究方向为马尔可夫跳变系统、网络化控制系统, E-mail: wa23301095@stu.ahu.edu.cn;

任乘乘 (1993-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为复杂跳变系统建模与智能控制、机器人智能感知与决策, E-mail: chengcheng_ren@ahu.edu.cn;

何舒平 (1983-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为控制工程与智能系统、强化学习算法与人工智能, E-mail: shuping.he@ahu.edu.cn.