

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于博弈的二阶多智能体系统分组编队

李基贺, 纪志坚

引用本文:

李基贺, 纪志坚. 基于博弈的二阶多智能体系统分组编队[J]. *控制与决策*, 2025, 40(9): 2781–2789.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2024.1415>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于观测器的网络化多智能体预测控制

Observer-based networked multi-agent predictive control

控制与决策. 2021, 36(9): 2290–2296 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1801>

#### 基于零和博弈的多智能体网络鲁棒包容控制

Robust containment control of multi-agent networks based on zero-sum game

控制与决策. 2021, 36(8): 1841–1848 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1348>

#### 一种具有非线性动力学模型的智能电网快速分布式控制

A fast distributed control of smart grids with nonlinear dynamic model

控制与决策. 2021, 36(8): 1849–1854 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1696>

#### 基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

#### 基于知识粒度特征的多目标粗糙集属性约简算法

Multi objective rough set attribute reduction algorithm based on characteristics of knowledge granularity

控制与决策. 2021, 36(1): 196–205 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0490>

# 基于博弈的二阶多智能体系统分组编队

李基贺, 纪志坚<sup>†</sup>

(青岛大学自动化学院, 山东 青岛 266071)

**摘要:** 从聚合博弈的角度研究二阶多智能体系统的分组编队控制问题, 每个分组选定一个领导者, 为实现期望编队设计博弈成本函数, 研究发现二次聚合博弈的纳什均衡可以构成领导者的期望编队. 此外, 设计一种分布式算法, 使这些领导者通过寻求纳什均衡来形成期望的编队, 每个领导者对博弈的聚合函数进行估计. 进一步, 利用李雅普诺夫稳定性理论分析算法的收敛性. 与现有的编队协议相比, 采用该算法的二阶智能体在不依赖邻居位置和速度信息的情况下收敛到期望的编队. 同时, 跟随者采用不同于领导者的控制协议, 通过调整相对于邻居和领导者的位置和速度, 最终形成期望的编队. 最后, 通过一个仿真案例验证上述理论结果的有效性和可行性.

**关键词:** 多智能体系统; 分组编队; 聚合博弈; 纳什均衡; 分布式算法; 二阶系统

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2024.1415

引用格式: 李基贺, 纪志坚. 基于博弈的二阶多智能体系统分组编队 [J]. 控制与决策, 2025, 40(9): 2781-2789.

## Game-based group formation control of second-order multi-agent systems

LI Ji-he, JI Zhi-jian<sup>†</sup>

(School of Automation, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

**Abstract:** This paper investigates the group formation control problem of second-order multi-agent systems from the viewpoint of aggregative game. One leader is selected from each group, and the game cost function is designed to realize the desired formation. An interesting discovery is that the Nash equilibrium of a quadratic aggregative game constitutes the desired formation of leaders. Moreover, a distributed algorithm is designed for these leaders to form the desired formation by seeking the Nash equilibrium, where every leader estimates the aggregate of the game. Furthermore, the convergence of the algorithm is analyzed via the Lyapunov stability theory. Compared with existing formation protocols, second-order agents using this algorithm converge to the desired formation without using neighbors positions and velocities information. The followers use a control protocol different from that of leaders, and by adjusting the positions and velocities relative to neighbors and leaders, the desired formation is formed. Finally, the above theoretical results are verified by numerical simulations.

**Keywords:** multi-agent systems; group formation; aggregative games; Nash equilibrium; distributed algorithm; second-order systems

## 0 引言

随着大规模网络和系统的广泛应用, 多智能体系统的分布式控制备受关注, 如一致<sup>[1]</sup>、编队<sup>[2-3]</sup>和优化<sup>[4-5]</sup>. 其中, 所有智能体与其邻居交换信息以便协同完成分布式任务. 编队控制是多智能体系统协同控制研究的重要问题之一, 在空间探索<sup>[6]</sup>、侦察任务<sup>[7]</sup>、智能交通系统<sup>[8]</sup>等领域都有应用. 为了实现期望编队, 设计了很多分布式算法. 例如, 文献 [9] 提出了一阶系统基于相对位置的算法, 需要使用局部邻居的

相对位置来计算控制输入. 文献 [10] 考虑速度和输入受约束的二阶多智能体系统分布式编队问题, 提出了一种二阶系统基于相对位置信息的编队算法, 实现多个控制目标. 文献 [11] 在使用邻居位置和速度信息的基础上, 设计了分布式控制协议, 给出了二阶多智能体系统实现环形编队的条件. 文献 [12] 针对多智能体系统, 提出了一种求解具有大量智能体编队问题的有限时间分布式算法, 所有智能体在有限时间内都能保持期望编队. 此外, 文献 [13] 研究了具

收稿日期: 2024-12-05; 录用日期: 2025-03-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62373205, 62033007); 山东省泰山学者特聘教授人才支持计划项目 (tstp20230624, ts20190930); 山东省泰山学者攀登计划和青岛大学系统科学+联合攻关项目 (XT2024101).

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: jizhijian@pku.org.cn.

有多领导者的线性多智能体系统的时变编队问题,给出了实现时变编队跟踪的充要条件,提出了一种设计编队控制协议的方法,处理具有领导者的线性多智能体系统的编队问题.文献[14]研究了多智能体系统的有限时间时变编队跟踪问题,证明了在存在不匹配干扰和未知情况输入的情况下,在有限时间内实现期望的编队跟踪.文献[15]研究了非线性系统的跟踪一致问题,提出了一种自适应分布式协议,在不依赖于全局信息的前提下实现有限时间二分跟踪一致性.文献[16]针对MIMO多智能体设计了一种事件触发的数据驱动双向编队控制算法,缓解了被控系统的通信负担.文献[17]建立了编队距离-角度运动学模型,设计了动态反馈自适应控制器,可以有效地抑制干扰.文献[18]研究了当系统受到环境干扰时的非线性多智能体系统,给出了完全分布式协议,实现了系统的编队控制.

文献[9-18]都是假设智能体能够获得邻居的位置或相对位置信息,并且需要智能体之间交换位置和速度信息来解决编队控制问题.然而,在一些实际应用场景中,如战场等,出于隐私保护或安全考虑,智能体并不总是能够获取邻居的位置和速度信息.此外,当仪器或者环境受到限制时,同样不能得到相对位置和速度.因此,本文从博弈论的角度出发,研究领导者在无需直接获取邻居位置和速度的情况下如何实现编队控制,更好地保护智能体的隐私信息.

博弈论是一种研究智能体之间冲突与合作的理论,可以用于研究多智能体系统的分布式编队控制问题.例如,文献[19]利用微分博弈的方法研究了移动机器人的编队控制问题,指出编队控制可以建模为非合作博弈.文献[20]使用博弈论的方法,研究了混合多智能体系统的一致性问题,证明了成本函数纳什均衡解存在的唯一性.

聚合博弈是非合作博弈,广泛出现在通信网络<sup>[21]</sup>和智能电网<sup>[22]</sup>等众多领域.在聚合博弈中,每个参与者的成本函数依赖于所有参与者和自己的决策总和,每个参与者都希望最小化自己的成本函数.近年来,人们为聚合博弈提供了许多求解纳什均衡的分布式策略.例如,对于不受约束的聚合博弈,文献[23]研究了一类非线性动力学的聚合博弈分布式纳什均衡求解问题,提出了一种分布式梯度博弈算法,寻找纳什均衡.文献[24]设计了基于多智能体一致性的分布式算法,给出了具有唯一纳什均衡点的条件.对于有约束的聚合博弈,文献[25]提出了基于投影和非光滑跟踪的分布式算法,通过局部信息交互寻求广

义纳什均衡.文献[23-25]主要集中在提出求解纳什均衡的方法,但尚未将聚合博弈理论应用于编队控制问题.

本文的目标是通过聚合博弈研究二阶系统的分组编队控制问题,并设计了分布式算法使得二阶多智能体系统形成目标编队.本文的主要工作如下:

1) 与文献[9-18]使用邻居位置和速度解决编队问题的研究不同,本文从聚合博弈的角度研究二阶系统领导者的组间编队控制问题,组间不需要获得邻居的位置和速度信息.通过设计二次聚合博弈函数,证明其纳什均衡可以形成期望的组间编队.此外,提出一种领导者寻求二次聚合博弈函数的纳什均衡来实现期望组间编队的分布式算法,其中每个领导者都保持对聚合博弈的估计,并对该算法进行收敛性分析.

2) 现有的算法大多是在已知邻居的位置和速度的假设下设计的,然而在一些实际应用中,例如战场,出于隐私保护或者安全考虑,智能体并不能总是知道邻居的位置和速度.此外,受测量仪器或环境条件的限制,不能得到相对位置和速度.在本文算法中,组间的领导者之间既不与邻居交换位置和速度信息,也不测量邻居的相对位置和速度,只需要组内的智能体传递位置和速度信息,具有更高的隐私性和适用性.

3) 分组编队具有广泛的应用前景,例如在多方森林灭火中可以灵活分组协作,或在军事行动中实现高效协同作战.当每组只包含一个智能体时,即可以在不需要测量位置和速度信息的场景下实现全局编队.同时,本文提出的方法也适用于二阶多智能体系统的一致性问题.

## 1 基础知识

### 1.1 图论知识

考虑由  $N$  组智能体组成的多智能体系统,假设每个组内包含有向生成树  $G_s = \{V_s, \varepsilon_s, A_s\}$ ,  $V_s = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$  表示组内跟随者集合,  $\varepsilon_s = \{(i, j) : i, j \in V_s, i \neq j\}$  表示边集合,  $A_s = [a_{ij}] \in R^{q \times q}$  表示  $G_s$  的邻接矩阵.当  $(i, j) \in \varepsilon_s$  时,  $a_{ij} > 0$ , 否则,  $a_{ij} = 0$ .  $\deg_i = \sum_{j=1}^q a_{ij}$  是顶点  $i$  的度,  $D_s = \text{diag}\{\deg_1, \dots, \deg_q\}$ , 拉普拉斯矩阵  $L_s = D_s - A_s$ , 各生成树根节点之间无向连通,选取每个组的一个根节点作为领导者.图  $G_N = \{V_N, \varepsilon_N, A_N\}$  是由领导者顶点集合  $V_N = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  和边集合  $\varepsilon_N = \{(i, j) : i, j \in$

$V_N, i \neq j$ 组成的无向连通图,  $A_N = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$ 表示 $G_N$ 的邻接矩阵. 当 $(i, j) \in \varepsilon_N$ 时,  $a_{ij} > 0$ , 否则,  $a_{ij} = 0$ .  $D_N = \text{diag}\{\text{deg}_1, \dots, \text{deg}_N\}$ , 拉普拉斯矩阵定义为 $L_N = D_N - A_N$ .  $R^n$ 是 $n$ 维空间,  $\|W\|$ 是矩阵 $W \in R^{n \times n}$ 的谱范数,  $\|\omega\|$ 是 $\omega \in R^n$ 的欧几里得范数,  $x_i^T$ 是向量 $x_i$ 的转置,  $\text{col}(\omega_1, \dots, \omega_N) = [\omega_1^T, \dots, \omega_N^T]^T$ ,  $\otimes$ 是克罗内克乘积,  $0_n$ 是 $n$ 个0的列向量,  $1_n$ 是 $n$ 个1的列向量,  $I_n$ 是 $n \times n$ 的单位矩阵.

1.2 基础概念

由文献 [26] 可得出如下概念.

如果映射  $f: R^n \rightarrow R^n$ , 满足  $(v_1 - v_2)^T (f(v_1) - f(v_2)) \geq \omega \|v_1 - v_2\|^2, \forall v_1, v_2 \in R^n, \omega > 0$ , 则称它是 $\omega$ -强单调的.

一个可微映射  $f: R^n \rightarrow R^n$ 的雅可比矩阵定义为

$$Jf(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial v_n} \end{bmatrix},$$

$$v = \text{col}(v_1, \dots, v_n) \in R^n.$$

可微映射  $f: R^n \rightarrow R^n$ , 如果满足  $v_2^T Jf(v_1)v_2 \geq \omega \|v_2\|^2, \forall v_1, v_2 \in R^n, \omega > 0$ , 则称它是 $\omega$ -强单调的.

映射  $f: R^n \rightarrow R^n$ , 如果满足  $\|f(v_1) - f(v_2)\| \leq \theta \|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in R^n$ , 则称映射为 $\theta$ -利普西斯连续.

变分不等式  $VI(R^n, F), F: R^n \rightarrow R^n$ 的解  $x \in R^n$ , 满足如下条件:

$$(y - x)^T F(x) \geq 0, \forall y \in R^n.$$

此外, 当解 $x$ 是可行域内部点时,  $F(x) = 0_n$ .

2 问题描述

2.1 领导者动态模型

考虑由  $N$  个领导者组成的无向连通图. 智能体  $i \in V_N$  有以下二阶动力学系统:

$$\dot{x}_i = x_i^{(1)}, \tag{1a}$$

$$\dot{x}_i^{(1)} = u_i. \tag{1b}$$

其中:  $x_i \in R^m$ 是智能体 $i$ 的输出,  $u_i \in R^m$ 是智能体 $i$ 的控制输入.

**定义 1** 如果智能体之间的相对位置为期望值, 则二阶多智能体系统 (1) 形成期望的编队. 也就是说  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = d_{ij}, \forall i, j \in V_N, d_{ij} \in R^m$ 是一

个常数向量, 代表智能体 $i$ 与 $j$ 之间的期望相对位置.

**注 1** 由定义 1 可知, 在期望编队中, 智能体之间的相对位置是一个恒定值; 另一方面, 在聚合博弈达到纳什均衡时, 玩家的决策也是一个恒定值. 因此, 可以借助聚合博弈来研究编队控制问题.

考虑如下二阶系统 (1) 的聚合博弈:

$$\min_{x_i \in R^m} J_i(x_i, x_{-i}), \tag{2}$$

其中  $x_{-i} = \text{col}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$ .

**定义 2** 如果  $x^* = \text{col}(x_1^*, \dots, x_N^*) \in R^{Nm}$  满足如下条件:

$$J_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq J_i(x_i, x_{-i}^*), \forall x_i \in R^m, i \in V_N,$$

则它是聚合博弈 (2) 的纳什均衡解.

**注 2** 由定义 2 可知, 纳什均衡是一个策略组合, 智能体 $i$ 不能通过仅仅改变 $x_i$ 来降低成本函数.

当聚合博弈达到纳什均衡时, 没有一个玩家可以通过单方面改变自己的策略使得成本函数最小. 同时, 为了使博弈纳什均衡解存在且唯一, 并且在达到纳什均衡时能够在期望的几何中心实现编队, 其中几何中心是所有智能体的算术平均位置, 将智能体 $i$ 的成本函数设计为如下二次函数:

$$J_i(x_i, x_{-i}) = \frac{1}{5} \left\| x_i - \left( 1 + \frac{5ah_i}{2} \right) d_i \right\|^2 + aN x_i^T a(x). \tag{3}$$

聚合博弈 (2) 的聚合函数为

$$a(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i), \phi(x_i) = h_i x_i. \tag{4}$$

其中: 决策 $x_i$ 为智能体 $i$ 的位置信息;  $d_i \in R^m, d_j \in R^m$ 为智能体 $i, j$ 的期望位置,  $d_i - d_j = d_{ij}$ , 通过设定不同的期望位置可以实现不同的队形;  $\frac{1}{5} \left\| x_i - \left( 1 + \frac{5ah_i}{2} \right) d_i \right\|^2$ 表示智能体位置和期望位置的差值对成本函数的影响, 1/5 为权重, 促使智能体向期望位置移动;  $aN x_i^T a(x)$ 表示 $x_i$ 和 $a(x)$ 的内积对成本函数的影响,  $aN$ 为权重,  $N$ 为智能体数量, 调节参数  $a, h_i > 0, h_i = h_j, \forall i, j \in V_N$ , 促使智能体靠近几何中心. 每个智能体根据其位置与期望位置的差值, 以及与几何中心的内积对成本函数的影响, 调整自身的位置, 以实现成本函数最小化. 如果博弈达到纳什均衡时满足  $x_i^* - x_j^* = d_{ij}$ , 并且几何中心为期望值, 则期望的编队可以通过寻求纳什均衡来实现.

**引理 1**<sup>[26]</sup>  $x^* = \text{col}(x_1^*, \dots, x_N^*)$ 是聚合博弈函数 (2) 的纳什均衡当且仅当

$$\nabla_{x_i} J_i(x_i^*, x_{-i}^*) = 0_m, \forall i \in V_N. \tag{5}$$

**引理2**<sup>[26]</sup> 如果 $F(x) = \text{col}(\nabla_{x_1} J_1(x_1, x_{-1}), \dots, \nabla_{x_N} J_N(x_N, x_{-N}))$ 是关于 $x$ 的强单调函数, 则聚合博弈(2)有唯一纳什均衡.

**定理1** 聚合博弈(2)的纳什均衡可以形成定义1中的目标编队, 其几何中心为

$$\frac{2 + 5ah_i}{N(2 + 5ah_i + 5ah_iN)} \sum_{i=1}^N d_i.$$

**证明** 由引理1可知, 聚合博弈(2)的纳什均衡满足如下等式:

$$\left(\frac{2}{5} + ah_1\right)(x_1^* - d_1) + aNa(x^*) = 0_m, \quad (6a)$$

$$\left(\frac{2}{5} + ah_2\right)(x_2^* - d_2) + aNa(x^*) = 0_m, \quad (6b)$$

⋮

$$\left(\frac{2}{5} + ah_N\right)(x_N^* - d_N) + aNa(x^*) = 0_m. \quad (6c)$$

解方程得到

$$x_i^* - x_j^* = d_{ij}, \quad \forall i, j \in V_N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^* = \frac{2 + 5ah_i}{2 + 5ah_i + 5ah_iN} \sum_{i=1}^N d_i. \quad \square$$

**注3** 由定理1可知, 聚合博弈(2)的纳什均衡和定义1的目标编队一致. 因此, 如果智能体收敛到纳什均衡, 则目标编队便可以形成. 本文旨在开发一种二阶多智能体系统(1)的分布式算法, 在该算法下, 智能体通过寻求博弈(2)的纳什均衡来形成期望的队形. 大多数现有的研究结果没有通过博弈的理论研究分组编队控制问题, 本文从聚合博弈的角度研究分组编队问题.

### 2.2 分布式算法设计

首先定义如下映射:

$$F_i(x_i, a(x)) = \nabla_{x_i} J_i(x_i, x_{-i}) =$$

$$\left(\frac{2}{5} + ah_i\right)(x_i - d_i) + aNa(x),$$

$$g_i(x_i, y_i) = F_i(x_i, a(x))|_{a(x)=y_i} =$$

$$\left(\frac{2}{5} + ah_i\right)(x_i - d_i) + aNy_i. \quad (7)$$

显然, 当 $y_i = a(x)$ 时,  $g_i(x_i, y_i) = F_i(x_i, a(x))$ .

二阶系统(1)的分布式编队算法如下:

$$\dot{x}_i = -x_i^{(1)} - g_i(x_i, y_i), \quad (8a)$$

$$\dot{y}_i = -y_i + h_i x_i + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(z_j - z_i), \quad (8b)$$

$$\dot{z}_i = -\sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_j - y_i). \quad (8c)$$

**注4** 由于智能体不能获得聚合函数 $a(x)$ 的具体值, 可用 $y_i$ 对聚合函数(4)进行估计,  $z_i$ 为辅助变

量, 智能体 $i$ 与其邻居交换 $y_i, z_i$ 信息来调整自身 $y_i, z_i$ 的值.

**定义3** 二次博弈函数的伪梯度写为 $g(x, y) = \text{col}[g_1(x_1, y_1), \dots, g_N(x_N, y_N)]$ ,  $y_i \in R^m$ 表示对聚合项 $a(x)$ 的估计值,  $y = \text{col}(y_1, \dots, y_N)$ .

**假设1** 映射 $x \rightarrow g(x, y)$ 是 $r$ -强单调的, 即存在一个 $r$ 对任意的 $x$ 都有

$$(x - \hat{x})^T [g(x, y) - g(\hat{x}, y)] \geq r \|x - \hat{x}\|^2.$$

**假设2**  $g(x, y)$ 是关于 $x$ 的利普西斯连续, 利普西斯系数为 $\omega > 0$ , 关于 $y$ 的利普西斯连续, 利普西斯系数为 $l > 0$ , 即对于任意的 $x, \hat{x}, y, \hat{y}$ 都有

$$\|g(x, y) - g(\hat{x}, y)\| \leq \omega \|x - \hat{x}\|,$$

$$\|g(x, y) - g(x, \hat{y})\| \leq l \|y - \hat{y}\|.$$

并且, 映射 $x \rightarrow \phi(x)$ 是利普西斯连续(利普西斯系数为 $\varepsilon > 0$ ), 即对于任意的 $x, \hat{x}$ 都有

$$\|\phi(x) - \phi(\hat{x})\| \leq \varepsilon \|x - \hat{x}\|.$$

**引理3**<sup>[27]</sup> 定义映射

$$g_\phi(x, y) = \begin{bmatrix} g(x, y) \\ y - \phi(x) \end{bmatrix},$$

在假设1和假设2以及 $r > (\varepsilon + l)^2/4$ 成立的情况下,  $g_\phi(x, y)$ 是 $\mu$ -强单调的,  $\mu > 0$ .

**证明** 如果映射 $g_\phi(x, y)$ 是 $\mu$ -强单调的, 则

$$\text{col}(x - \hat{x}, y - \hat{y})^T [g_\phi(x, y) - g_\phi(\hat{x}, \hat{y})] \geq$$

$$\mu \|x - \hat{x}\|^2 + \mu \|y - \hat{y}\|^2,$$

$$\text{col}(x - \hat{x}, y - \hat{y})^T [g_\phi(x, y) - g_\phi(\hat{x}, \hat{y})] =$$

$$(x - \hat{x})^T [g(x, y) - g(\hat{x}, y) + g(\hat{x}, y) - g(\hat{x}, \hat{y})] +$$

$$(y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) - (y - \hat{y})^T [\phi(x) - \phi(\hat{x})] \geq$$

$$r \|x - \hat{x}\|^2 + \|y - \hat{y}\|^2 -$$

$$(\varepsilon + l) \|x - \hat{x}\| \|y - \hat{y}\| =$$

$$\begin{bmatrix} \|x - \hat{x}\| \\ \|y - \hat{y}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r & -\frac{\varepsilon + l}{2} \\ -\frac{\varepsilon + l}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|x - \hat{x}\| \\ \|y - \hat{y}\| \end{bmatrix}.$$

当且仅当 $r > (\varepsilon - l)^2/4$ 时, 映射 $g_\phi(x, y)$ 是 $\mu$ -强单调的.  $\square$

**注5** 由 $g(x, y)$ 雅可比矩阵正定可知假设1成立,  $g(x, y)$ 是 $(2/5 + ah_i)$ -强单调的; 由 $g(x, y), \phi(x)$ 定义可知假设2成立,  $g(x, y)$ 关于 $x$ 的利普西斯系数为 $(2/5 + ah_i)$ , 关于 $y$ 的利普西斯系数为 $aN$ ,  $\phi(x)$ 关于 $x$ 的利普西斯系数为 $h_i$ .

为了便于分析, 定义

$$\begin{aligned} x &= \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ z &= \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_N), \\ x^{(1)} &= \text{col}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}), \\ x &= \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ H &= \text{col}(h_1, h_2, \dots, h_N), \\ \tilde{L} &= L_N \otimes I_m. \end{aligned}$$

可将算法 (8) 写成如下紧凑形式:

$$\dot{x} = x^{(1)}, \tag{9a}$$

$$\dot{x}^{(1)} = -x^{(1)} - g(x, y), \tag{9b}$$

$$\dot{y} = -y + Hx - \tilde{L}z, \tag{9c}$$

$$\dot{z} = \tilde{L}y. \tag{9d}$$

**定理 2** 若系统 (9) 的平衡点是  $(x^*, x^{*(1)}, y^*, z^*)$ , 则聚合博弈 (2) 的纳什均衡点是  $x^*$ . 反之, 若  $x^*$  是聚合博弈 (2) 的纳什均衡点, 则存在  $x^{*(1)} \in R^{Nm}, x^* \in R^{Nm}, y^* \in R^{Nm}, z^* \in R^{Nm}$ , 即

$$x^{*(1)} = 0,$$

$$y^* = 1_N \otimes \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i^*,$$

$$z^* \in \{z^* \in R^{Nm} \mid \tilde{L}z^* = Hx^* - y^*\},$$

使得  $(x^*, x^{*(1)}, y^*, z^*)$  是系统 (9) 的平衡点.

**证明** 如果  $(x^*, x^{*(1)}, y^*, z^*)$  是系统 (9) 的平衡点, 则

$$0_{Nm} = x^{*(1)}, \tag{10a}$$

$$0_{Nm} = -x^{*(1)} - g(x^*, y^*), \tag{10b}$$

$$0_{Nm} = -y^* + Hx^* - \tilde{L}z^*, \tag{10c}$$

$$0_{Nm} = \tilde{L}y^*. \tag{10d}$$

由式 (10d) 可知  $y^* = 1_N \otimes e$ , 其中  $e \in R^m$  是常数向量. 将该结果代入式 (10c), 在等式左右两边同时左乘  $1_N^T/N$ , 得到  $e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i^*$ , 由此可计算出  $y^* = 1_N \otimes \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i^*$ . 由此可知  $g(x^*, y^*) = 0$ ,  $x^*$  是聚合博弈 (2) 的纳什均衡点. 反之, 如果  $x^*$  是聚合博弈 (2) 的纳什均衡点, 则使  $x^{*(1)} = 0, y^* = 1_N \otimes \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i^*$ , 以及  $z^*$  是任意向量, 满足  $\tilde{L}z^* = Hx^* - y^*$ . 可以得到  $(x^*, x^{*(1)}, y^*, z^*)$  也是系统 (9) 的平衡点.  $\square$

定理 2 表明,  $(x^*, 0, 1_N \otimes \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i^*, z^*)$  是系统 (9) 的平衡点,  $x^*$  是聚合博弈 (2) 的纳什均衡点,

$z^*$  是满足  $\tilde{L}z^* = Hx^* - y^*$  的任意向量. 因此, 分布式聚合博弈算法 (8) 的纳什均衡点等价于系统 (9) 渐近收敛到  $(x^*, 0, 1_N \otimes \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i^*, z^*)$ .

### 2.3 收敛性分析

**定理 3** 对于定理 2 确定的系统 (9) 的平衡点, 在任意初始条件下  $(x(0), x^{(1)}(0), y(0), z(0))$ , 如果  $\mu > \max\{2\omega^2, 2l^2\}$ , 则动力系统 (9) 是渐近稳定的. 也就是说  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ .

**证明** 在任意初始条件下, 设计一个二次型 Lyapunov 方程来证明设计算法 (8) 的收敛性, 即

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(x - x^* + x^{(1)})^T(x - x^* + x^{(1)}) + \\ &\quad \frac{1}{2}(z - z^*)^T(z - z^*) + \frac{1}{2}(y - y^*)^T(y - y^*) + \\ &\quad \frac{1}{2}x^{(1)T}x^{(1)}, \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \\ &\quad - (x - x^* + x^{(1)})^T g(x, y) - x^{(1)T}[x^{(1)} + g(x, y)] + \\ &\quad (y - y^*)^T[-y + Hx - \tilde{L}z] + (z - z^*)^T \tilde{L}y. \end{aligned} \tag{11b}$$

进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \\ &\quad - (x - x^*)^T g(x, y) - 2x^{(1)T} g(x, y) - x^{(1)T} x^{(1)} + \\ &\quad (y - y^*)^T[y - y^* - Hx + Hx^*] - \\ &\quad (y - y^*)^T[-y^* + Hx^* - \tilde{L}z] + (z - z^*)^T \tilde{L}y. \end{aligned} \tag{11c}$$

根据引理 3 可知

$$\begin{aligned} \text{col}(x - x^*, y - y^*)^T [g_\phi(x, y) - g_\phi(x^*, y^*)] &\geq \\ \mu \|x - x^*\|^2 + \mu \|y - y^*\|^2. \end{aligned}$$

再根据无向图拉普拉斯矩阵  $\tilde{L}$  行和为 0 的性质, 以及式 (10c) ~ (10d) 可以确定

$$(y - y^*)^T[-y^* + Hx^* - \tilde{L}z] + (z - z^*)^T \tilde{L}y = 0.$$

并将其代入式 (10b), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &\quad - \mu \|x - x^*\|^2 - \mu \|y - y^*\|^2 - \\ &\quad 2x^{(1)T} g(x, y) - x^{(1)T} x^{(1)} \leq \\ &\quad - \mu \|x - x^*\|^2 - \mu \|y - y^*\|^2 - \\ &\quad \|x^{(1)}\|^2 + t \|x^{(1)}\|^2 + \frac{1}{t} \|g(x, y)\|^2, \end{aligned}$$

其中  $t > 0$  是一个正参数. 因为  $g(x^*, y^*) = 0$ , 再由假设 1 和假设 2 以及应用柯西不等式  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , 有

$$\begin{aligned} & \|g(x, y)\|^2 \leq \\ & \|g(x, y) - g(x^*, y^*)\|^2 \leq \\ & 2\|g(x, y) - g(x^*, y)\|^2 + 2\|g(x^*, y) - g(x^*, y^*)\|^2 \leq \\ & 2\omega^2\|x - x^*\|^2 + 2l^2\|y - y^*\|^2. \end{aligned}$$

由此, Lyapunov 函数  $V$  的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\left(\mu - \frac{2\omega^2}{t}\right)\|x - x^*\|^2 - \\ & \left(\mu - \frac{2l^2}{t}\right)\|y - y^*\|^2 - \\ & (1-t)\|x^{(1)}\|^2. \end{aligned} \tag{11d}$$

因此

$$\begin{aligned} \mu & > \max\{2\omega^2, 2l^2\}, \\ \max\left\{\frac{2l^2}{\mu}, \frac{2\omega^2}{\mu}\right\} & < 1. \end{aligned}$$

选择一个合适的  $t$  使其满足

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{2l^2}{\mu}, \frac{2\omega^2}{\mu}\right\} & < t < 1, \\ \dot{V} & \leq -c_1\|x - x^*\|^2 - c_2\|y - y^*\|^2 - c_3\|x^{(1)}\|^2, \end{aligned}$$

其中  $c_1, c_2, c_3 > 0$ .

最后,应用 Lasalle 不变性原理证明平衡点是渐近稳定的. 令  $\dot{V} = 0$ , 可以计算出  $x = x^*, y = y^*, x^{(1)} = 0$ . 将得到的结果代入系统 (9), 可以得到与定理 2 结果完全一致的结果, 即

$$\begin{aligned} x^{*(1)} & = 0, \\ y^* & = 1_N \otimes \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i^*, \\ z^* & \in \{z^* \in R^{Nm} \mid \tilde{L}z^* = Hx^* - y^*\}. \end{aligned}$$

因此得出结论: 动力系统 (9) 是渐近稳定的, 且动力系统 (9) 的轨迹分量  $x$  渐近收敛到聚合博弈的纳什均衡点  $x^*$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = x^*$ .  $\square$

### 2.4 跟随者动态模型

考虑有  $N$  个领导者的多智能体系统, 将距离较近且具有有向生成树结构的智能体划分为一组, 并选取组内的根节点作为领导者, 同时跟随者之间包含有向生成树来确保每个组内的智能体都能获取到邻居的位置和速度信息. 一个组内的跟随者个数定义为  $q$  个,  $V_s = \{v_1, \dots, v_q\}$ , 用  $v_0$  表示领导者. 假设  $\hat{x}_i \in R^m$  是跟随者  $v_i \in V_s$  的状态,  $x_0 \in R^m$  为领导者状态,  $d_{ij}$  为跟随者之间的相对位置差值,  $d_{i0}$  为跟随者和领导者之间的相对位置差值,  $\hat{v}_i, \hat{v}_j$  为跟随者  $v_i, v_j$  的速度,  $\hat{v}_0$  为领导者的速度,  $u_0$  为领导者控制输入. 如果存在控制协议  $u_i$ , 使得组内多智能体的状态满足如下条件:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t) - d_{ij}| & = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_i(t) - x_0(t) - d_{i0}| & = 0, \\ \forall i, j \in V_s, \forall s = 1, 2, \dots, N; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{v}_j(t) - \hat{v}_i(t)| & = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{v}_i(t) - \hat{v}_0(t)| & = 0, \\ \forall i, j \in V_s, \forall s = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

则称多智能体系统能够实现组内编队.

**引理 4**<sup>[28]</sup> 有向图  $G_s$  中存在一个有向生成树, 则图  $G_s$  的拉普拉斯矩阵  $L_s$  有一个代数重数为 1 的零特征值, 且其他特征值的实部均为正数, 即  $0 = \lambda_1 < \text{Re}(\lambda_2) < \dots < \text{Re}(\lambda_q)$ .

领导者动态为

$$\dot{x}_0 = \hat{v}_0, \quad \dot{\hat{v}}_0 = u_0.$$

组内跟随者的动态可以描述为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i & = \hat{v}_i, \\ \dot{\hat{v}}_i & = -k(\hat{v}_i - \hat{v}_0) + \\ & \sum_{j=1}^q a_{ij} \{k(\hat{x}_j - \hat{x}_i - d_{ji}) + (\hat{v}_j - \hat{v}_i)\} - \\ & b_i \{k(\hat{x}_i - x_0 - d_{i0}) + (\hat{v}_i - \hat{v}_0)\}, \end{aligned}$$

其中参数  $k$  为大于 0 的常数. 当领导者为跟随者  $i$  的邻居时,  $b_i$  等于 1, 否则  $b_i$  为 0.

定义  $\bar{x}_i = \hat{x}_i - x_0 - d_{i0}, \bar{v}_i = \hat{v}_i - \hat{v}_0$ , 将原系统转化为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i & = \bar{v}_i, \\ \dot{\bar{v}}_i & = \sum_{j=1}^q a_{ij} (k\bar{x}_j - k\bar{x}_i + \bar{v}_j - \bar{v}_i) - \\ & b_i (k\bar{x}_i + \bar{v}_i) - k\bar{v}_i. \end{aligned}$$

对系统进行拉普拉斯变换, 系统的闭环极点满足

$$s^2 \bar{x} + ks \bar{x} + Lk \bar{x} + Ls \bar{x} + \bar{B}k \bar{x} + \bar{B}s \bar{x} = 0.$$

其中:  $\bar{x} = \text{col}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_q), \bar{v} = \text{col}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_q), B = (b_1, b_2, \dots, b_q), L = L_s \otimes I_m, \bar{B} = B \otimes I_m$ . 可以得出

$$(sI_{qm} + kI_{qm})(sI_{qm} + L_s \otimes I_m + B \otimes I_m) = 0.$$

进一步得到

$$(sI_q + kI_q)(sI_q + L_s + B) = 0.$$

显然, 由于参数  $k$  为大于 0 的常数, 故有一个负根  $-k$ . 由  $sI_q + L_s + B = 0$  可知  $s_i = -\lambda_i - b_i$ , 根据引理 4, 拉普拉斯矩阵的特征值实部均大于 0, 即所有的根都位于左半开平面, 系统是稳定的, 同时得出原系统在控制协议下可以实现组内编队.

### 3 仿真实例

为验证所提出算法的有效性, 考虑有 16 个二阶智能体的编队问题, 将 16 个智能体分为 5 组, 每组的智能体个数分别为 4, 3, 2, 3, 4. 单个智能体运动模型如图 1 所示, 定义  $x_i = [x_{ix}, x_{iy}]^T \in R^2$ ,  $u_i = [u_{ix}, u_{iy}]^T$ ,  $x_{ix} = r_i^x + D_i \cos \theta_i$ ,  $x_{iy} = r_i^y + D_i \sin \theta_i$ ,  $\dot{r}_i^x = v_i \cos \theta_i$ ,  $\dot{r}_i^y = v_i \sin \theta_i$ ,  $\dot{\theta}_i = \omega_i$ ,  $\dot{v}_i = F_i/m_i$ ,  $\dot{\omega}_i = \tau_i/M_i$ . 其中:  $r_i^x, r_i^y, \theta_i \in R$ ,  $r_i^x, r_i^y$  是位置,  $\theta_i$  是惯性中心的方向;  $v_i, \omega_i \in R$  分别是线速度和角速度;  $m_i, M_i$  分别为质量和转动惯量;  $F_i, \tau_i$  是力和扭矩;  $D_i$  是  $x_i$  与  $r_i$  之间的距离. 期望形成的编队如图 2 所示.

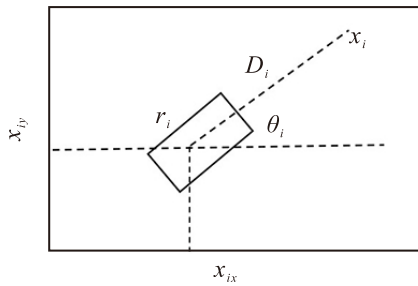


图1 单个智能体运动模型

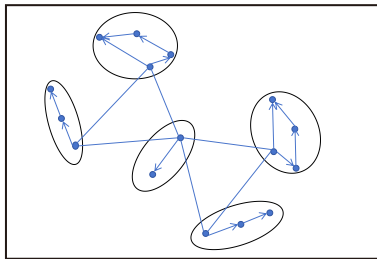


图2 16个智能体的期望队形

$\text{col}(m_1, \dots, m_{16}) = \text{col}(2, 3, 2.5, 4, 1, 1.5, 1.8, 2.2, 4.5, 6, 3.5, 2.5, 5, 2.8, 3, 2)$  为 16 个智能体的质量,  $\text{col}(M_1, \dots, M_{16}) = \text{col}(1.3, 2.2, 1.8, 3.2, 0.8, 1.1, 1.2, 1.75, 3, 4.2, 2.5, 2, 3.5, 1.5, 2.2, 1.5)$  分别为 16 个智能体的转动惯量,  $a = 0.04$ ,  $h = 0.2$ ,  $N = 5$ ,  $D_i = 0.2$ .

二阶多智能体系统模型可以写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{ix} \\ \dot{x}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \cos \theta_i - D_i \sin \theta_i \omega_i \\ v_i \sin \theta_i + D_i \cos \theta_i \omega_i \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{ix}^{(1)} \\ \dot{x}_{iy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_i \cos \theta_i - v_i \sin \theta_i \dot{\omega}_i \\ \dot{v}_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i \dot{\omega}_i \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} D_i \cos \theta_i \omega_i^2 + D_i \sin \theta_i \dot{\omega}_i \\ D_i \sin \theta_i \omega_i^2 - D_i \cos \theta_i \dot{\omega}_i \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_i} \cos \theta_i & -\frac{D_i}{M_i} \sin \theta_i \\ \frac{1}{m_i} \sin \theta_i & \frac{D_i}{M_i} \cos \theta_i \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\begin{bmatrix} u_{ix} + v_i \omega_i \sin \theta_i + D_i \omega_i^2 \cos \theta_i \\ u_{iy} + v_i \omega_i \cos \theta_i + D_i \omega_i^2 \sin \theta_i \end{bmatrix}.$$

图 3 和图 4 分别描述了 5 个领导者和 11 个跟随者的速度变化曲线, 初始速度为随机值, 最终速度变为 0. 图 5 展示了最终形成的 16 个智能体的编队, 其中 5 条绿线表示 5 个领导者的运动轨迹, 初始位置随机, 跟随者根据领导者和邻居的位置及速度信息形成编队, 将 5 个领导者的最终位置用蓝色虚线连接, 最终形成了 5 组编队, 仿真结果验证了本文算法的有效性, 形成了多分组编队.

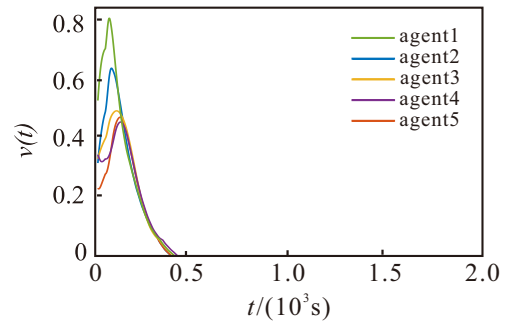


图3 5个领导者的速度变化曲线

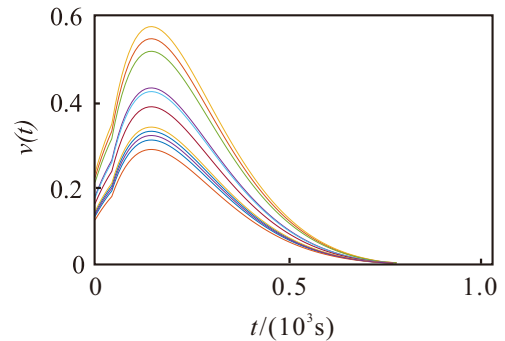


图4 11个跟随者的速度变化曲线

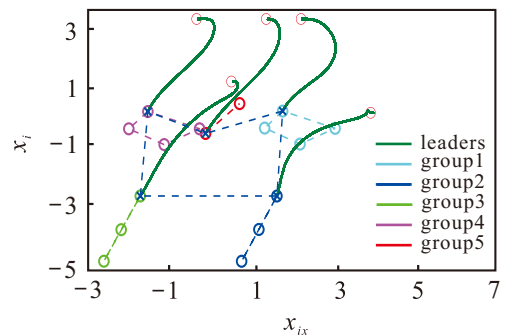


图5 16个智能体的最终仿真编队

### 4 结论

本文研究了二阶多智能体系统的分组编队问题, 并引入了聚合博弈来解决该问题. 通过寻找二次聚合函数的纳什均衡可以实现领导者的期望编队. 提出了一种分布式算法, 并对其收敛性进行了分析, 在该算法下, 二阶领导者收敛到期望的编队, 领导者之

间不需要传递位置和速度信息,保护了每个领导者的隐私和安全.在有向拓扑下提出了一种跟随者控制协议,跟随者根据领导者和其邻居的位置和速度可以实现组内的编队.此外,本文所提出的方法还可以应用于一致性问题.最后,通过一个仿真案例说明了算法的有效性.后续将继续围绕聚合博弈分组编队展开,重点解决编队实现过程中可能发生的碰撞问题,提高该算法的适用性和鲁棒性.

#### 参考文献 (References)

- [1] Qiu Z R, Xie L H, Hong Y G. Quantized leaderless and leader-following consensus of high-order multi-agent systems with limited data rate[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(9): 2432-2447.
- [2] Li Z, Tang Y, Huang T W, et al. Formation control with mismatched orientation in multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2019, 6(3): 314-325.
- [3] 宋逸哲, 刘妹琴, 董山玲, 等. 弱通信条件下多水下自主航行器分布式编队轨迹规划[J]. *控制与决策*, 2025, 40(1): 71-79.  
(Song Y Z, Liu M Q, Dong S L, et al. Distributed formation trajectory planning method for multiple autonomous underwater vehicles with limited communication[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(1): 71-79.)
- [4] Deng Z, Liang S, Hong Y. Distributed continuous-time algorithms for resource allocation problems over weight-balanced digraphs[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(11): 3116-3125.
- [5] 纪良浩, 翟盼盼, 李华青. 基于事件触发机制的分布式经济调度加速优化算法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(4): 1217-1227.  
(Ji L H, Zhai P P, Li H Q, et al. Distributed event-triggered accelerated optimization algorithm for solving smart grid economic dispatch problem on directed unbalanced communication topology[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(4): 1217-1227.)
- [6] Oh K K, Park M C, Ahn H S. A survey of multi-agent formation control[J]. *Automatica*, 2015, 53: 424-440.
- [7] Kuo C W, Tsai C C, Lee C-T. Intelligent leader-following consensus formation control using recurrent neural networks for small-size unmanned helicopters[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(2): 1288-1301.
- [8] Yue D D, Cao J D, Li Q, et al. Distributed neuro-adaptive formation control for uncertain multi-agent systems: Node- and edge-based designs[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2020, 7(4): 2656-2666.
- [9] Aranda M, Lopez-Nicolas G, Sagues C, et al. Distributed formation stabilization using relative position measurements in local coordinates[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12): 3925-3935.
- [10] Fu J J, Wen G H, Yu X H, et al. Distributed formation navigation of constrained second-order multiagent systems with collision avoidance and connectivity maintenance[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(4): 2149-2162.
- [11] 王强, 纪志坚, 刘开恩. 二阶多智能体系统的环形编队控制研究[J]. *青岛大学学报: 工程技术版*, 2015, 30(4): 37-42.  
(Wang Q, Ji Z J, Liu K E. Ring formation control of second-order multi-agent systems[J]. *Journal of Qingdao University: Engineering & Technology Edition*, 2015, 30(4): 37-42.)
- [12] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605-2611.
- [13] Dong X W, Hu G Q. Time-varying formation tracking for linear multiagent systems with multiple leaders[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3658-3664.
- [14] Hua Y Z, Dong X W, Han L, et al. Finite-time time-varying formation tracking for high-order multiagent systems with mismatched disturbances[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(10): 3795-3803.
- [15] 王志超, 刘开恩, 纪志坚, 等. 多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性[J]. *控制与决策*, 2024, 39(10): 3289-3296.  
(Wang Z C, Liu K E, Ji Z J, et al. Distributed fast finite-time bipartite tracking consensus for multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(10): 3289-3296.)
- [16] 赵华荣, 彭力, 吴治海, 等. 随机时延下多输入多输出多智能体系统事件触发双向编队[J]. *控制与决策*, 2024, 39(4): 1251-1259.  
(Zhao H R, Peng L, Wu Z H, et al. Event-triggered bipartite formation for multi-input multi-output multiagent systems with random delays[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(4): 1251-1259.)
- [17] 吴立尧, 韩维, 张勇, 等. 基于领航-跟随的有人/无人机编队队形保持控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(10): 2435-2441.  
(Wu L Y, Han W, Zhang Y, et al. Formation keeping control for manned/unmanned aerial vehicle formation based on leader-follower strategy[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(10): 2435-2441.)
- [18] 陈婷, 牛兴龙, 兰艳亭. 具有外部干扰的非线性多智能体系统的编队控制[J]. *系统科学与数学*, 2023, 43(5): 1106-1119.  
(Chen T, Niu X L, Lan Y T. Formation control for

- nonlinear multi-agent systems with external disturbances[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2023, 43(5): 1106-1119.)
- [19] Liang X N, Xiao Y. Studying bio-inspired coalition formation of robots for detecting intrusions using game theory[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2010, 40(3): 683-693.
- [20] Chen H, Li Y H, Louie R H Y, et al. Autonomous demand side management based on energy consumption scheduling and instantaneous load billing: An aggregative game approach[J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2014, 5(4): 1744-1754.
- [21] Barrera J, Garcia A. Dynamic incentives for congestion control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(2): 299-310.
- [22] Ma J Y, Ye M J, Zheng Y S, et al. Consensus analysis of hybrid multiagent systems: A game-theoretic approach[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(6): 1840-1853.
- [23] Zhang Y, Liang S, Wang X, et al. Distributed Nash equilibrium seeking for aggregative games with nonlinear dynamics under external disturbances[J]. *IEEE Trans Cybern*, 2020, 50(12): 4876-4885.
- [24] Gharesifard B, Basar T, Dominguez-Garcia A D. Price-based coordinated aggregation of networked distributed energy resources[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(10): 2936-2946.
- [25] Liang S, Yi P, Hong Y G. Distributed Nash equilibrium seeking for aggregative games with coupled constraints[J]. *Automatica*, 2017, 85: 179-185.
- [26] Deng Z H. Game-based formation control of high-order multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2023, 10(1): 140-151.
- [27] Shakarami M, De Persis C, Monshizadeh N. Privacy and robustness guarantees in distributed dynamics for aggregative games[J/OL]. 2019, arXiv: 1910.13928.
- [28] Li Z K, Liu X D, Ren W, et al. Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2): 518-523.

### 作者简介

李基贺 (2000-), 硕士生, 主要研究方向为多智能体系统控制与应用. E-mail: [13964954224@163.com](mailto:13964954224@163.com);

纪志坚 (1973-), 教授, 博士, 主要研究方向为多智能体网络系统、多机器人系统的分布式协调控制. E-mail: [jizhijian@pku.org.cn](mailto:jizhijian@pku.org.cn).