

控制与决策

Control and Decision

分布式多智能体网络定位的线性理论与算法综述

林志赟, 吴金泽, 陈亮名

引用本文:

林志, 吴金泽, 陈亮名. 分布式多智能体网络定位的线性理论与算法综述[J]. *控制与决策*, 2024, 39(2): 353–370.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1401>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

基于零和博弈的多智能体网络鲁棒包容控制

Robust containment control of multi-agent networks based on zero-sum game

控制与决策. 2021, 36(8): 1841–1848 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1348>

脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

基于超级节点的分布式传感器节点定位算法

A distributed sensor nodes localization algorithm based on super nodes

控制与决策. 2020, 35(12): 2898–2906 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0219>

基于不变网络模型和故障注入的分布式信息系统故障溯源方法

Fault source location algorithm for distributed information system based on invariant network and fault injection

控制与决策. 2020, 35(11): 2723–2732 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0214>

分布式多智能体网络定位的线性理论与算法综述

林志贇^{1,2,3}, 吴金泽^{1,2}, 陈亮名^{1,2,3†}

(1. 南方科技大学 系统设计与智能制造学院, 广东 深圳 518055; 2. 南方科技大学
深圳市控制理论与智能系统重点实验室, 广东 深圳 518055; 3. 鹏城实验室, 广东 深圳 518000)

摘要: 多智能体网络定位在智慧物流、工厂监控、无人系统集群等领域具有广阔的应用,然而网络中节点测量相对于节点位置的非线性本质给定位问题带来了巨大的挑战. 鉴于此,对分布式多智能体网络定位问题进行综述. 首先通过比较分析非线性定位方法与线性定位方法以及集中式定位方法与分布式定位方法,凸显了分布式线性定位方法的明显优势;然后从可定位性的判定条件与线性定位算法两个方面对目前已有的相关成果进行梳理与综述,其中包括距离、方位角、相对位置以及内角等 4 种测量量下的相关结果;最后总结目前尚未解决的难题以及未来的研究方向.

关键词: 多智能体系统; 网络定位; 分布式算法; 线性定位理论; 局部测量

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1401

引用格式: 林志贇, 吴金泽, 陈亮名. 分布式多智能体网络定位的线性理论与算法综述[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 353-370.

Survey of distributed multi-agent network localization: Linear theory and algorithms

LIN Zhi-yun^{1,2,3}, WU Jin-ze^{1,2}, CHEN Liang-ming^{1,2,3†}

(1. School of System Design and Intelligent Manufacturing, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China; 2. Shenzhen Key Laboratory of Control Theory and Intelligent Systems, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China; 3. PengCheng Laboratory, Shenzhen 518000, China)

Abstract: Multi-agent network localization has broad applications in many fields, such as intelligent logistics, factory monitoring, and swarms of unmanned systems. However, the nonlinearity of sensor node measurements with respect to node positions poses great challenges for localization. This paper surveys existing results on multi-agent network localization. Firstly, we compare linear and nonlinear localization approaches, as well as centralized and distributed approaches, from which we can see many advantages of distributed linear localization. Then, we review recent progress on localizability conditions and distributed localization algorithms for multi-agent networks with common measurements such as distances, bearings, local relative positions, and interior angles. Multi-agent network localization remains an active area with many open problems that are discussed finally.

Keywords: multi-agent systems; network localization; distributed algorithm; linear localization theory; local measurements

0 引言

本文围绕分布式多智能体网络定位的线性理论与算法展开综述,主要从多智能体网络定位的问题描述、线性理论和可定位性研究、线性分布式算法、待解决的问题以及未来扩展研究方向 4 个方面进行详

细介绍.着重探讨基于距离测量、方位角测量、相对位置测量以及内角测量的多智能体网络可定位性和线性分布式定位算法,试图给出多智能体网络线性定位理论和方法的完整框架与最新进展.论文整体结构如图 1 所示.

收稿日期: 2023-10-07; 录用日期: 2023-12-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62173118); 深圳市科技计划项目(KQTD20221101093557010); 深圳市控制理论与智能系统重点实验室项目(ZDSYS20220330161800001).

†通讯作者. E-mail: chenlm6@sustech.edu.cn.

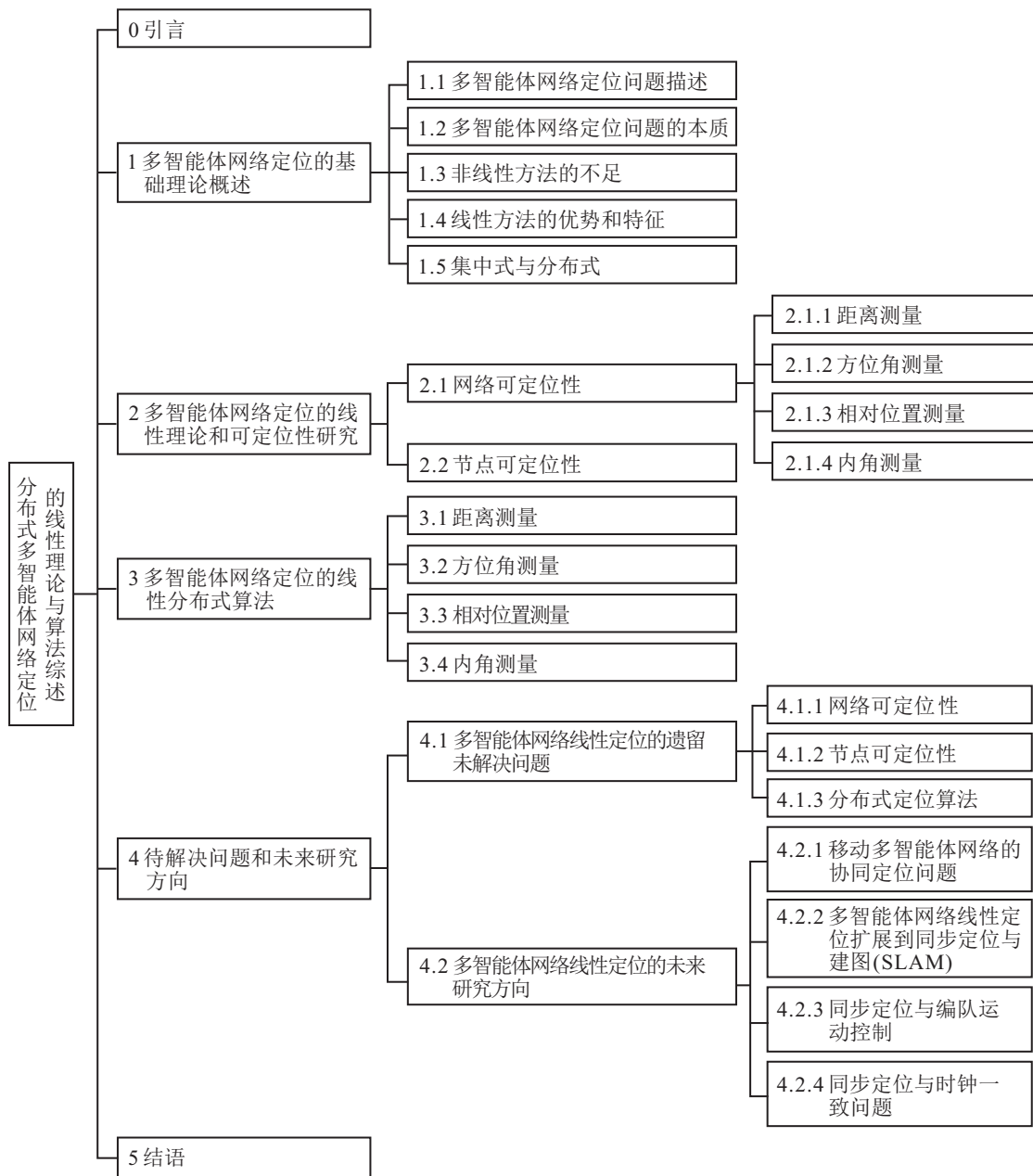


图1 论文整体结构框架

1 多智能体网络定位的基础理论概述

本节首先介绍多智能体网络定位问题的非线性本质特性及线性定位方法等相关理论基础,包括定位问题的基本数学描述、数学本质、非线性方法的不足及线性方法的优势、集中式与分布式方法的优缺点等.

1.1 多智能体网络定位问题描述

多智能体网络定位是实现目标监测与跟踪、导航定位、智能家居系统等应用的基础和前提,在国防军事、环境监测、医疗保健、智能交通、物流管理等众多军事及民用领域中有着广阔的应用前景. 尽管可以通过在智能体上安装全球定位系统(global positioning system, GPS)^[1]模块获取智能体位置信息,

但实际中GPS对使用环境存在限制,其在室内、地下室、隧道、丛林、高山、水下等环境下信号微弱,无法准确定位. 此时,多智能体网络中的个体无法全部应用GPS进行定位. 因此,通过测量局部信息进行协同位置估计的多智能体网络定位技术亟待研究.

多智能体网络定位系统由小部分位置已知的智能体和大部分位置未知的智能体构成. 具有已知位置信息的智能体称为锚节点,其绝对位置信息可以通过使用GPS或者进行标定预先获得. 其他位置信息未知的智能体称为自由节点,其位置坐标需要通过定位算法估计获得. 多智能体网络定位旨在通过锚节点的位置坐标信息与智能体之间的局部测量求解网络中自由节点的位置. 因此,多智能体网络定位过程

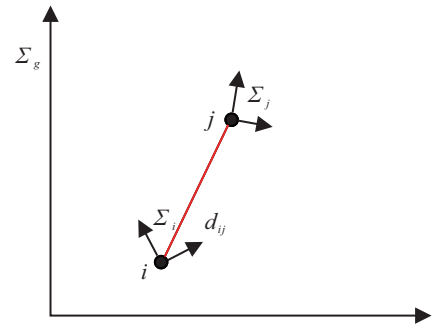
一般包含测量和位置估计两个阶段^[2]. 在测量阶段, 网络中智能体通过测量获取相邻智能体间距离、方位、角度等信息. 在位置估计阶段, 大多数多智能体网络定位算法依靠相邻智能体之间的测量信息以及与邻居的估计信息交互进行迭代. 简单来说, 多智能体网络定位是由所获取的局部测量信息和具备交互的估计信息估算各个智能体在一个统一参考坐标系下位置坐标的过程.

由于智能体间的测量和通信往往限于邻近的邻居节点, 使用图来刻画多智能体间局部测量与通信所定义的邻居关系. 用集合 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_a \cup \mathcal{V}_f$ 表示多智能体网络的节点集, 节点 $i \in \mathcal{V}$ 为网络中的智能体, 其中 $\mathcal{V}_a = \{1, 2, \dots, n_a\}$ 为 n_a 个锚节点的集合, $\mathcal{V}_f = \{n_a + 1, \dots, n\}$ 为 $n_f = n - n_a$ 个自由节点的集合. 用图 $\mathcal{G}_s = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_s)$ 表示多智能体网络的感知图, 其中集合 $\mathcal{E}_s \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为感知图的边集. 当 \mathcal{G}_s 为无向图时, 边 $(i, j) \in \mathcal{E}_s$ 代表节点 i 与 j 能够互相获得其关于邻居的局部测量信息. 当其有向图时, 边 $(i, j) \in \mathcal{E}_s$ 表示只有节点 j 可以获得节点 i 的局部测量信息, 而节点 j 无法获得节点 i 的局部测量信息. 用图 $\mathcal{G}_c = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_c)$ 表示多智能体网络的通信图, 其中集合 $\mathcal{E}_c \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为通信图的边集. 同理, 当 \mathcal{G}_c 为无向图时, 边 $(i, j) \in \mathcal{E}_c$ 表示节点 i 与 j 之间能够进行双向通信并交互信息. 当其有向图时, 边 $(i, j) \in \mathcal{E}_c$ 表示只有节点 j 可以接受节点 i 传递的信息, 而节点 i 不能接受节点 j 传递的信息. 多智能体网络的感知图和通信图都可以是一个无向图或者有向图, 同时, 对于一个多智能体网络而言, 其感知图和通信图可以是相同的也可以是不同的. 本文为了方便阐述其本质问题, 仅考虑感知图和通信图是相同的, 因此后文不区分两者, 且使用统一的符号 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, 即 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_s = \mathcal{E}_c$.

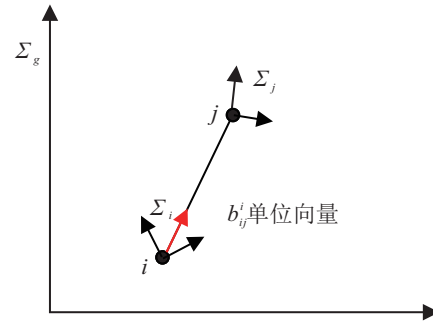
下面定义坐标和坐标系. 令 Σ_g 为全局坐标系, $p_i \in \mathbb{R}^d (d = 2 \text{ 或 } 3)$ 为智能体 i 在全局坐标系 Σ_g 中的坐标. 相应地, Σ_j 为智能体 j 的局部坐标系, $p_i^j \in \mathbb{R}^d$ 为智能体 i 在局部坐标系 Σ_j 中的坐标. 令 $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^{dn_a}$ 和 $\mathbf{p}_f \in \mathbb{R}^{dn_f}$ 分别为所有锚节点和自由节点在全局坐标系 Σ_g 下的坐标所构成的向量, 锚节点在全局坐标系 Σ_g 下的坐标 \mathbf{p}_a 是已知的, 而自由节点在全局坐标系 Σ_g 中的坐标 \mathbf{p}_f 需要通过定位算法计算获得.

在整个多智能体网络中, 可以根据测量类型将多智能体网络定位问题分成如下4类:

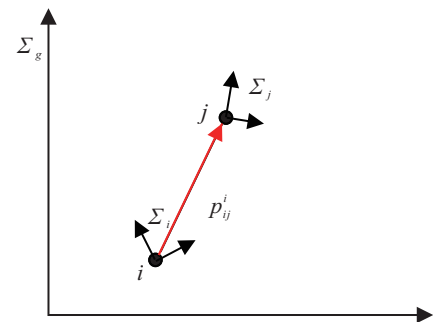
- 1) 基于距离的定位问题: 智能体 i 测量与邻居 j 之间的距离 $d_{ij} = \|p_j - p_i\|$ (见图2(a)).
- 2) 基于方位角的定位问题: 智能体 i 在局部坐标



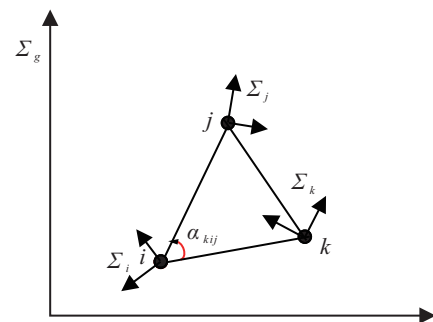
(a) 距离



(b) 方位角



(c) 相对位置



(d) 内角

图2 4种不同类型的测量

系 Σ_i 下测量获得关于邻居 j 的方位角信息 b_{ij}^i (见图2(b)).

3) 基于相对位置的定位问题: 智能体 i 在局部坐标系 Σ_i 下测量获得关于邻居 j 的相对位置信息 p_{ij}^i (见图2(c)).

4) 基于内角的定位问题: 智能体 i 测量与邻居 j 和 k 之间的内角信息 α_{kij} (如图2(d)).

多智能体网络定位对应的数学问题:通过一组基于测量信息获得的约束方程组求解所有自由节点的坐标,这些方程组是由所有节点坐标和以上各种局部测量信息构成的约束方程。

后文用到的定义和符号如下.定义 n 个节点的构型(configuration)是在 d 维空间中所有节点坐标构成的有限集,可以表示为 $\mathbf{p} = [p_1^T, p_2^T, \dots, p_n^T] \in \mathbb{R}^{dn}$.定义框架(trajectory)由图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 和节点构型 \mathbf{p} 共同组成,可以表示为 $F_{\mathbf{p}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{p})$.如果框架 $F_{\mathbf{p}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{p})$ 和 $F_{\mathbf{q}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{q})$ 满足 $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$, $\forall i, j \in \mathcal{V}$,则称 $F_{\mathbf{p}}$ 与 $F_{\mathbf{q}}$ 是全等(congruent)的.如果存在常数 $\gamma > 0$ 使框架 $F_{\mathbf{p}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{p})$ 和 $F_{\mathbf{q}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{q})$ 满足 $\|p_i - p_j\| = \gamma \|q_i - q_j\|$, $\forall i, j \in \mathcal{V}$,则称二者是相似(similar)的.

1.2 多智能体网络定位问题的本质

为探究多智能体网络定位问题的本质,不失一般性,以二维空间为例表示不同类型测量信息与多智能体位置之间的关系,其中距离和方位角测量与位置之间的关系尤为重要,可表示为

$$d_{ij} = \|p_j - p_i\| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2},$$

$$b_{ij}^i = R_g^i \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|} = R_g^i \frac{p_j - p_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}.$$

其中: R_g^i 为全局坐标系 Σ_g 到局部坐标系 Σ_i 的旋转矩阵, x_i 、 x_j 和 y_i 、 y_j 分别为节点 i 和 j 在二维空间的 x -坐标和 y -坐标.相对位置是距离与方位角测量的结合,可表示为

$$p_{ij}^i = R_g^i(p_j - p_i).$$

内角可以表示为两个方位角单位向量的内积.当内角不带方向时表示为

$$\alpha_{kij} = \arccos \left(\frac{(p_j - p_i)^T (p_k - p_i)}{\|p_j - p_i\| \|p_k - p_i\|} \right) = \arccos(b_{ij}^{iT} b_{ik}^i).$$

当内角带方向且定义逆时针为正方向时表示为

$$\alpha_{kij} = \begin{cases} \arccos(b_{ij}^{iT} b_{ik}^i), & b_{ij}^{iT} R\left(\frac{\pi}{2}\right) b_{ik}^i \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(b_{ij}^{iT} b_{ik}^i), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 $R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个旋转角度为 90° 的旋转矩阵.

针对以上4类测量,分别给出多智能体网络定位问题的描述.文献[3]综述了距离测量下的多智能体网络定位问题,其将定位问题描述成求解如下非线性方程的问题:

$$\text{find } \hat{\mathbf{p}}. \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \hat{p}_i = p_i, \forall i \in \mathcal{V}_a;$$

$$\|\hat{p}_i - \hat{p}_j\| = d_{ij}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}.$$

其中: $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{dn}$ 为所有节点位置的估计向量, d ($d = 2$ 或 3)为多智能体网络所在的空间维数, $d_{ij} \in \mathbb{R}^+$ 为节点间的距离测量值,当节点 i 为锚节点时 $\hat{p}_i = p_i$, \mathcal{E} 为存在距离测量的边的集合.

对于方位角可测情况下的多智能体网络定位问题,文献[4]将多智能体网络定位问题描述为求解如下非线性方程的问题:

$$\text{find } \hat{\mathbf{p}}. \quad (2)$$

$$\text{s.t. } \hat{p}_i = p_i, \forall i \in \mathcal{V}_a;$$

$$R_g^i \frac{\hat{p}_j - \hat{p}_i}{\|\hat{p}_j - \hat{p}_i\|} = b_{ij}^i, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_s.$$

其中: $b_{ij}^i \in \mathbb{R}^d$ 为方位角单位向量测量信息, R_g^i 为未知的旋转矩阵.当 R_g^i 为单位阵时,表示所有智能体的坐标系与全局坐标系的方向一致,对应的多智能体网络定位问题可参见文献[5-6].

对于相对位置可测情况下的多智能体网络定位问题,文献[7]将多智能体网络定位问题描述为求解如下非线性方程的问题:

$$\text{find } \hat{\mathbf{p}}. \quad (3)$$

$$\text{s.t. } \hat{p}_i = p_i, \forall i \in \mathcal{V}_a;$$

$$R_g^i(\hat{p}_j - \hat{p}_i) = p_{ij}^i, \forall (i, j) \in \mathcal{E}_s.$$

其中: $p_{ij}^i \in \mathbb{R}^d$ 为局部坐标系下测量获得的相对位置向量,注意到这里的 R_g^i 是未知的.

当不带方向的内角可测时,文献[8]将多智能体网络定位问题描述为求解如下非线性方程的问题:

$$\text{find } \hat{\mathbf{p}}. \quad (4)$$

$$\text{s.t. } \hat{p}_i = p_i, \forall i \in \mathcal{V}_a;$$

$$\frac{(\hat{p}_j - \hat{p}_i)^T (\hat{p}_k - \hat{p}_i)}{\|\hat{p}_j - \hat{p}_i\| \|\hat{p}_k - \hat{p}_i\|} = \cos(\alpha_{kij}), \forall (i, j, k) \in \mathcal{A}.$$

其中: $\mathcal{A} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为可测内角的三角形顶点节点集合; $\alpha_{kij} \in [0, \pi)$ 为由射线 ij 与射线 ik 所形成的不带方向的内角.这里需要注意的是,每个元素 (k, i, j) 仅代表角度 α_{kij} 可测,并不代表三角形 $\triangle kij$ 中的另两个角度也可测.

可以看出,由于以上4类测量信息与节点位置坐标之间的非线性关系,多智能体网络定位问题的本质是非线性的.

1.3 非线性方法的不足

通过第1.2节可以看到,由于测量量是智能体位置坐标的非线性函数,定位问题的本质是非线性的,

一种直接的解决方法是将多智能体网络定位问题转化为一组非线性方程的求解问题, 这些非线性方程的变量即为自由节点的位置, 而非线性方程则是由局部相对位置、距离、方位以及内角等测量量构成的约束方程. 当该多智能体网络对应的非线性方程有唯一解时, 称该多智能体网络是可定位的.

针对距离可测情况下的定位问题(1), 文献[9]提出了 Divide-and-Conquer 方法, 文献[10]提出了目标函数平滑方法, 文献[11]将单位圆图转化为半定规划问题进行求解, 文献[12]提出了序贯的定位方法. 为求解方位角可测情况下的定位问题(2), 文献[13]在几何约束下得到了优化解, 文献[14]则通过刚性图理论得到了可定位的充分条件. 为求解内角可测情况下的定位问题(4), 文献[8]通过半定规划方法将问题(4)转化为几类求解非线性方程的等价子问题. 文献[15]概述了可用于无线传感器网络定位的技术, 表明利用诸如梯度下降算法的数值方法来搜索求解出的位置估计优于解方程获得的位置估计. 文献[16]提出了使用噪声距离误差测量的定位问题, 基于平方和方法解决存在噪声时的协同定位问题. 文献[17]基于一种新的半定优化方法应用梯度下降法进行最大似然估计, 以解决仅基于距离测量的三维空间中的移动定位问题.

以上所列举的解决方法^[3,8-10,13-17]均为求解非线性方程的方法, 其具有如下共同的不足和挑战:

1) 很难保证全局收敛性. 非线性迭代方法中的非线性动态常常会导致多个平衡点(又称为局部最优点、鞍点)的存在, 因此非线性求解算法往往无法保证全局收敛性^[3].

2) 鞍点数量与网络规模有关. 当用非线性方法求解定位问题时, 随着网络规模(自由节点数量)的增加, 整个网络的待求变量将增加, 基于梯度下降进行迭代对应的非线性目标函数的鞍点数量也会呈指数增加^[18].

1.4 线性方法的优势和特征

与使用非线性优化作为解决工具的定位方法不同, 文献[19-20]首先针对距离测量下的平面网络, 提出了一种基于重心坐标的线性定位方法; 接着将线性定位方法陆续推广到三维距离测量的多智能体网络定位^[21-24]、二维方位角测量的多智能体网络定位^[4,25]、 d 维方位角测量的多智能体网络定位^[5,26]、二维内角测量的多智能体网络定位^[27]、三维内角测量的多智能体网络定位^[28]以及多种测量量混合下的多智能体网络定位^[29-31]. 此外, 研究更多基于线性

方法的多智能体网络定位问题, 涵盖了更广泛的情形^[32-35]. 称此类可应用线性方程进行求解的方法为线性定位方法, 与非线性定位方法相比, 前者所具有的对优势包括:

1) 定位算法具有全局收敛性. 线性方程建立后, 存在着对应的线性定位算法, 其具有全局收敛性.

2) 不存在鞍点. 对于线性迭代方法, 系统不存在鞍点, 并且与网络规模无关.

3) 定位算法可以实现分布式计算. 每个节点只需利用局部测量信息以及与邻居节点通信交换位置估计量即可进行并行计算.

对于线性方法的定位过程, 其主要由3步组成:

step 1: 建立节点位置与嵌入量(边上的权重)的线性方程. 定义由 $s \in \mathbb{N}^+$ 个节点 $\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ 构成的最小单元为多智能体网络的元图(该元图能够通过局部测量信息计算获得元图边上的权重). 注意到对于不同维度空间、不同类型的测量信息, 元图会有所不同, 后文会有详细阐述. 在元图上建立如下形式的线性方程:

$$A_{j_1}^i p_{j_1} + A_{j_2}^i p_{j_2} + \dots + A_{j_s}^i p_{j_s} = 0, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5)$$

其中: i 为第 i 个元图; $r \in \mathbb{N}^+$ 为多智能体网络中所有元图的总数; $A_{j_1}^i \in \mathbb{R}^{d \times d}, \dots, A_{j_s}^i \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 称为该元图边上的嵌入量, 可以通过节点 j_1, \dots, j_s 间的局部测量和邻居节点间的信息交互计算得到.

step 2: 将网络中所有的线性方程写成紧凑形式并得到代数可定位性条件. 将 r 个线性方程(5)写成紧凑形式可以得到

$$M\mathbf{p} = 0, \quad (6)$$

其中 M 为测量矩阵, 其仅与节点间的测量值相关, 具有如下结构:

$$\begin{matrix} & \dots & \text{节点 } j_1 & \dots & \text{节点 } j_2 & \dots & \text{节点 } j_s & \dots \\ \text{元图 } 1 & \left[\begin{array}{cccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_{j_1}^i & 0 & A_{j_2}^i & \dots & A_{j_s}^i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \end{matrix}$$

考虑 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_a^T, \mathbf{p}_f^T]^T$ 的有序标号关系, M 可以写成 $M = [M_a, M_f]$, 因此式(6)可以写为 $M_f \mathbf{p}_f = -M_a \mathbf{p}_a$. 显然, 为保证存在唯一解 \mathbf{p}_f , 矩阵 M_f 的秩需等于 dn_f .

step 3: 通过梯度下降迭代获得线性定位算法. 设计如下形式的目标函数:

$$J(\hat{\boldsymbol{p}}) = \sum_{i=1}^r \|A_{j_1}^i \hat{p}_{j_1} + A_{j_2}^i \hat{p}_{j_2} + \dots + A_{j_s}^i \hat{p}_{j_s}\|^2 = \hat{\boldsymbol{p}}^T M^T M \hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_a^T D_{aa} \boldsymbol{p}_a + 2\boldsymbol{p}_a^T D_{af} \hat{\boldsymbol{p}}_f + \hat{\boldsymbol{p}}_f^T D_{ff} \hat{\boldsymbol{p}}_f. \quad (7)$$

其中: $D = \begin{bmatrix} D_{aa} & D_{af} \\ D_{fa} & D_{ff} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $D_{aa} = M_a^T M_a$, $D_{af} = M_a^T M_f$, $D_{fa} = M_f^T M_a$, $D_{ff} = M_f^T M_f$. 通过目标函数 $J(\hat{\boldsymbol{p}})$ 对 $\hat{\boldsymbol{p}}_f$ 求梯度可以得到如下形式的线性定位算法:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{p}}}_f(t) = -\frac{\partial J(\hat{\boldsymbol{p}})}{\partial \hat{\boldsymbol{p}}_f} = -D_{ff} \hat{\boldsymbol{p}}_f(t) - D_{fa} \boldsymbol{p}_a. \quad (8)$$

通过对连续算法进行周期采样离散化(这里采用前向欧拉法)可以得到如下一般形式的离散定位算法:

$$\hat{\boldsymbol{p}}_f[k+1] = \hat{\boldsymbol{p}}_f[k] - \epsilon D_{ff} \hat{\boldsymbol{p}}_f[k] - \epsilon D_{fa} \boldsymbol{p}_a, \quad (9)$$

其中 $\epsilon > 0$ 为采样周期(在机器学习中又称为学习率).

由离散系统稳定性判定条件可以得到离散定位算法(9)的收敛性定理如下.

定理1^[4,26] 当采样周期 ϵ 小于 $2/\lambda_{\max}(D_{ff})$ 时, 离散定位算法(9)是指数稳定的, 其中 $\lambda_{\max}(D_{ff})$ 为矩阵 D_{ff} 的最大特征值.

为便于分布式计算, 引入辅助变量 ζ , 式(9)可以产生另一种形式的迭代计算, 即

$$\begin{cases} \zeta[k+1] = M \hat{\boldsymbol{p}}[k], \\ \hat{\boldsymbol{p}}_f[k+1] = \hat{\boldsymbol{p}}_f[k] - \epsilon M_f^T \zeta[k]. \end{cases} \quad (10)$$

同理, 可以得到离散定位算法(10)的收敛性定理如下.

定理2^[7,36] 当 ϵ 小于 $1/\lambda_{\max}(D_{ff})$ 时, 线性定位算法(10)是指数收敛的.

由上述3步处理过程可以看到, 线性定位方法的一个明显特征和主要优势是能够保证全局收敛性, 而且是指数收敛的. 此外可以看到, 多智能体网络定位的核心问题在于以上的 step 1, 即如何将各种局部测量通过局部分布式的计算获得每个元图的线性约束方程.

1.5 集中式与分布式

集中式的定位一般需要一个中心节点收集所有的测量信息, 然后使用集中式求解方法同时求出所有节点的位置^[8]. 随着网络规模的增大, 集中式的定位算法面临着诸多困难, 包括通信量、计算量的急剧增加等. 相比于集中式算法, 分布式算法仅要求每个节点与其邻居节点进行信息交互. 虽然也存在一些分布式的非线性定位算法, 但大多数非线性定位方法需要通过集中式进行求解. 相比之下, 线性定位算法一

般都是分布式的. 因而, 基于分布式的线性定位方法具有更大优势^[20].

2 多智能体网络定位的线性理论和可定位性研究

本节介绍多智能体网络如何基于局部测量信息构建线性约束方程并探讨可定位性的相关成果, 包括网络可定位性和节点可定位性. 围绕这两种可定位性, 介绍二维和三维空间中, 使用不同类型测量实现多智能体网络线性定位的基础理论、代数条件、拓扑条件等.

2.1 网络可定位性

多智能体网络定位的一个基础核心问题是判断给定局部测量条件下多智能体网络是否可唯一定位(即该网络中所有节点都可以求解获得其在全局坐标系下的真实坐标信息). 该问题称为网络可定位性问题, 与图的刚性密切相关, 因此图论为分析和解决该问题提供了有用的框架. 本节主要介绍基于不同测量类型的多智能体网络线性方法下可定位性的相关结论.

2.1.1 距离测量

为解决距离测量的多智能体网络定位问题, 文献[19]基于重心坐标将节点位置表示为伪线性系统并提出了分布式迭代定位方法. 但其需假定所有自由节点位于锚节点的凸包内, 并且任一自由节点都需要位于其3个邻居的凸包内. 文献[37]基于此定位算法对其收敛性、噪声存在的鲁棒性等情况进行了综述. 文献[20]提出了基于实数重心坐标和图拉普拉斯矩阵的定位方法, 在距离精确可测的前提下解决了二维空间中的定位问题, 并且不需要每个节点都位于其相邻节点的凸包内. 进一步地, 文献[36]提出一种更具鲁棒性的计算实数重心坐标的方法进行自由节点的定位, 文献[21]将此线性定位方法扩展到三维空间. 值得注意的是, 应用实数重心坐标方法进行多智能体网络定位, 在二维空间中, 多智能体网络的元图需要4个智能体构成, 三维空间则需要5个智能体.

针对二维空间的网络定位问题, 文献[38]指出了距离测量下多智能体网络可定位性的充分必要条件. 当且仅当多智能体网络是全局刚性的并且至少有3个锚节点时, 网络中的所有节点均为可定位的. 虽然线性定位方法所需要的充分条件并不相同, 但此条件对于线性定位方法仍然是必要的.

在二维空间中, 多智能体网络基于距离测量的元图由4个节点构成, 每个节点至少存在3个邻居, 测量量是4个节点两两间的所有距离信息. 基于实数重心

坐标方法(图3),文献[36]给出4个节点间的线性方程

$$p_i = a_{ij}p_j + a_{ik}p_k + a_{il}p_l, \quad (11)$$

其中 $\{a_{ij}, a_{ik}, a_{il}\}$ 为节点 i 相对于其邻居节点 j, k, l 的重心坐标,满足 $a_{ij} + a_{ik} + a_{il} = 1$.

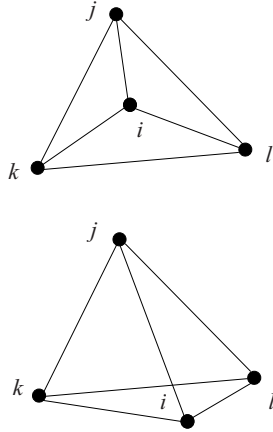


图3 节点 i 与3个邻居 j, k, l 在二维空间中的两种构型

由全等框架满足所有节点间距离不变的性质可知,由节点及其邻居组成的元图的全等框架在任何坐标系(坐标系可以平移、旋转)下具有相同的重心坐标^[36].这里提出一个重要的性质:实数重心坐标对于全等框架具有不变性.因此,节点 i 相对于邻居节点的重心坐标 $\{a_{ij}, a_{ik}, a_{il}\}$ 可以通过如下方法在特定坐标系下获得:对于多智能体网络中的任意一个元图,构建其全等框架并令该全等框架的节点 i 位于原点,节点 j 位于 X 轴上,即 $q_i = [0, 0]^T, q_j = [d_{ij}, 0]^T$. 同时,通过求解方程

$$\begin{cases} \|q_k - q_i\| = d_{ik}, \\ \|q_k - q_j\| = d_{jk} \end{cases}$$

可以得到 $q_k = [q_{kX}, q_{kY}]^T$ 的两个解,选取 $q_{kY} > 0$ 的解为节点 k 的坐标.再通过方程

$$\begin{cases} \|q_l - q_i\| = d_{il}, \\ \|q_l - q_j\| = d_{jl}, \\ \|q_l - q_k\| = d_{kl}, \end{cases}$$

求得节点 l 唯一的坐标 q_l .

综上,仅通过距离测量即可得到该元图某一特殊全等框架的节点坐标 q_i, q_j, q_k, q_l . 节点 i 相对于邻居节点的重心坐标 $\{a_{ij}, a_{ik}, a_{il}\}$ 通过如下公式^[36] 获得:

$$a_{ij} = \frac{S_{\Delta ikl}}{S_{\Delta jkl}}, a_{ik} = \frac{S_{\Delta ijl}}{S_{\Delta jkl}}, a_{il} = \frac{S_{\Delta ijk}}{S_{\Delta jkl}}.$$

其中

$$S_{\Delta ikl} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_i & q_k & q_l \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, S_{\Delta ijl} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_i & q_j & q_l \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S_{\Delta ijk} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_i & q_j & q_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, S_{\Delta jkl} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_j & q_k & q_l \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

在三维空间中,多智能体网络基于距离测量的元图是一个四面体,由5个节点构成,每个节点至少存在4个邻居,测量量是5个节点两两间的距离信息.文献[21]应用多维尺度法构建元图的全等框架,并基于实数重心坐标方法(图4)给出了5个节点间的线性方程为

$$p_i = a_{ij}p_j + a_{ik}p_k + a_{il}p_l + a_{ih}p_h, \quad (12)$$

其中 $\{a_{ij}, a_{ik}, a_{il}, a_{ih}\}$ 为节点 i 相对于其邻居节点 j, k, l, h 的重心坐标,且满足 $a_{ij} + a_{ik} + a_{il} + a_{ih} = 1$.

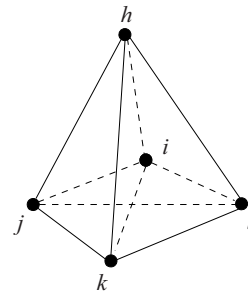


图4 节点 i 与4个邻居 j, k, l, h 在三维空间中的构型

与二维空间相同,三维空间中节点 i 相对于邻居节点 j, k, l, h 的重心坐标 $\{a_{ij}, a_{ik}, a_{il}, a_{ih}\}$ 可以通过以下多维尺度法构建元图的全等框架获得.针对多智能体网络的任意一个元图,定义 $D = [d_{rs}^2] \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$. 其中: $r, s \in \{i, j, k, l, h\}$, 元素 d_{rs}^2 为元图中两节点间距离的平方.定义 $J = I - \left\{ \frac{1}{5} \mathbf{1}_5 \mathbf{1}_5^T \right\}$, 计算三维空间中具有5个节点的全等框架的通用算法如算法1所示.矩阵 Q 的列向量即为节点 i, j, k, l, h 全等框架的坐标 q_i, q_j, q_k, q_l, q_h . 值得注意的是,多维尺度法也可应用到二维空间中.

算法1 利用距离矩阵获取元图全等框架的节点坐标.

输入: D ;

输出: Q .

1) 计算 $X = -\frac{1}{2} J D J$.

2) 对 X 进行奇异值分解 $X = V \Lambda V^T$. 其中: $V = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ 为 5×5 的酉矩阵; Λ 为对角矩阵,其对角元素为奇异值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq 0$.

3) 计算 $A_* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 和 $V_* = [v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$.

4) 计算矩阵 $Q = A_*^{1/2} V_*^T$.

节点 i 相对于邻居节点 j, k, l, h 的重心坐标 $\{a_{ij}, a_{ik}, a_{il}, a_{ih}\}$ 可通过如下公式^[21] 获得:

$$a_{ij} = \frac{V_{iklh}}{V_{jklh}}, a_{ik} = \frac{V_{jilh}}{V_{jklh}}, \quad (13)$$

$$a_{il} = \frac{V_{jkih}}{V_{jklh}}, a_{ih} = \frac{V_{jkli}}{V_{jklh}}. \quad (14)$$

其中

$$V_{iklh} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} q_i & q_k & q_l & q_h \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, V_{jilh} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} q_j & q_i & q_l & q_h \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$V_{jkih} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} q_j & q_k & q_i & q_h \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, V_{jkli} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} q_j & q_k & q_l & q_i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

$$V_{jklh} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} q_j & q_k & q_l & q_h \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

综上,可将二维或三维空间中基于实数重心坐标的线性方程(11)和(12)统一表示为

$$p_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} p_j = 0. \quad (18)$$

其中 a_{ij} 为节点 i 相对于其邻居节点的重心坐标,即对应边 (i, j) 的权重(嵌入量),满足 $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} = 1$. 每个节点的重心坐标均可通过本身与其邻居间的距离测量计算获得.

将多智能体网络中所有元图构建的方程(13)堆砌成矩阵形式即有方程(6). 基于该矩阵线性方程,可以得到如下关于网络可定位性的代数条件.

定理3^[21,36] 对于多智能体网络 F_p ,假设 p 是一般化的,那么基于距离测量的多智能体网络 F_p 可线性定位,当且仅当 $n_a \geq d+1$ ($d=2$ 或 3)且方程(6)和(7)中定义的 D_{ff} 是非奇异的.

对于二维和三维空间的情况,文献[20]给出了多智能体网络可线性定位的充分必要拓扑条件. 在给出其结论前,先给出重心坐标关联图及图连通性质的定义.

定义1^[39] 图 $\mathcal{G}(M)$ 称为重心坐标关联图,若其点集为 \mathcal{V} 且其边集由方程(6)存在非零权重的所有边构成.

定义2^[39] 对于一个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,如果除去节点 i 外的任意 $k-1$ 个节点后,节点 i 与非单节点集 \mathcal{U} 中的某个节点之间仍存在一条路径,则称该节点 i 相对于 \mathcal{U} 是 k -可达的,即 i 与 \mathcal{U} 之间有 k 条不相交的路径.

定理4^[20] 对于多智能体网络 F_p ,假设 p 是一般化的,那么基于距离测量的多智能体网络 F_p 可线性定位,当且仅当 $n_a \geq d+1$ ($d=2$ 或 3)且每个自由节点在重心坐标关联图 $\mathcal{G}(M)$ 中相对于锚节点集 \mathcal{V}_a 是 $(d+1)$ -可达的.

定理4的另外一种表达为:当且仅当每个自由节点到锚节点集存在至少 $(d+1)$ 条不相交的路径时,整个多智能体网络是可线性定位的. 在三维空间下,多智能体网络 $F_p = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, p)$ 可线性定位的充分必要条件是每个自由节点至少有4条不相交的路径与锚节点集相连接. 当退化到一个特殊情形(即只有一个自由节点)时,协同定位问题退化为普通的GPS定位问题,以上性质即成为需要存在4条边直接连接锚节点集.

注1 文献[40]探究了测量误差下多智能体网络的定位条件及相关理论. 当存在测量误差时,文献[36]在二维空间中应用有约束的优化方法构建全等框架. 在三维空间中,文献[21]通过改进算法1使其能够适用于具有测量误差的距离矩阵,进而获取全等框架的节点坐标. 之后,二者均可以继续应用重心坐标方法进行多智能体网络定位. 同时,文献[21]也给出了对存在测量误差情况下定位算法的分析,并给出矩阵误差上界.

2.1.2 方位角测量

方位角测量通常以角度或单位向量两种方式表示. 在假设所有智能体局部坐标系方向一致的情况下,文献[5,41]对分布式定位问题进行探究,提出了多智能体网络可定位性的充分必要条件和连续时间分布式线性定位算法. 由文献[41]可知,在二维空间中,如果多智能体网络是方位角刚性的且至少包含两个锚节点,则该多智能体网络是可定位的. 文献[5]将该问题扩展到任意 d 维空间中,并表述为线性最小二乘优化问题. 通过求解此最小二乘问题,从代数和刚性两方面给出网络可定位性的充要条件. 其表明如果多智能体网络的每个无穷小方位角运动都与至少一个锚节点相关,则多智能体网络是可定位的. 同时,文献[5]也给出了多智能体网络定位的线性分布式算法,此时多智能体网络的元图即为两个节点构成的元图,但对于大规模的多智能体网络,所有智能体的局部坐标系一般不会指向一个共同的方向.

为解决局部坐标系方向未知、基于方位角测量的多智能体网络定位问题,文献[4]在二维空间中提出了一种新的基于复数重心坐标的定位方法. 该线性方法通过引入复数重心坐标,基于局部方位角测量构建多智能体网络所有节点在全局坐标系下坐标的线性约束方程,进而通过复数域迭代求解完成多智能体网络定位. 另一方面,文献[26]应用一种统一的实数重心坐标方法构建一组线性约束方程,可同时解决二维和三维空间中的方位角测量定位问题. 以下主要介绍局部坐标系无需保持一致情况下的可定位性

条件.

在二维空间中, 一个二维向量可以等价于复平面中的一个复数, 文献[4]将节点*i*在全局坐标系 Σ_g 和局部坐标系 Σ_j 中的坐标 p_i 和 p_i^j 用复数形式表示. 同样地, 方位角测量也可以用复数表示为

$$b_{ij}^i = \frac{p_j^i}{|p_j^i|}.$$

考虑到局部坐标系方向不一致的情况, 多智能体网络基于方位角测量的元图是一个三角形, 由3个节点构成, 测量量是两个邻居相对于节点的方位角信息以及其中一个邻居相对于另外一个邻居的方位角信息. 文献[4]基于复数重心坐标方法, 给出3个节点间的线性方程为

$$a_{ij}(p_j - p_i) + a_{ik}(p_k - p_i) = 0, \quad (19)$$

其中 a_{ij} 和 a_{ik} 代表节点*i*相对于其邻居节点*j*、*k*的复数权重, 且满足 $a_{ij} + a_{ik} = 1$. 复数权重 a_{ij} 和 a_{ik} 在方程(14)中的几何含义是旋转和放缩了相对位置向量 $(p_j - p_i)$ 和 $(p_k - p_i)$. 需要注意的是本部分针对二维空间使用复数重心坐标的所有表达式中变量均为复数(例如方程(14)中的 p_i 、 p_j 、 p_k), 而不是二维实数向量.

针对复数重心坐标发现一个重要的类似于实数重心坐标的不变性性质, 即: 复数重心坐标对于相似框架具有不变性. 因此, 复数重心坐标 a_{ij} 和 a_{ik} 可以通过以下方法获得: 对于多智能体网络中的任意一个元图, 构建其相似框架并令该相似框架节点*i*的坐标 q_i 位于原点, 节点*j*的坐标 q_j 位于单位长度的直线 b_{ij}^i 上, 即 $q_i = 0, q_j = b_{ij}^i$. 同时, 经过 q_i 的直线 b_{ik}^i 与经过 q_j 的直线 b_{jk}^i 的交点唯一确定 Σ_i 中的坐标 q_k (如图5所示). 因此, 仅通过方位角测量即可得到每个元图相似框架的坐标 q_i 、 q_j 、 q_k , 进而容易通过

$$\begin{aligned} a_{ij}(q_j - q_i) + a_{ik}(q_k - q_i) &= 0, \\ a_{ij} + a_{ik} &= 1 \end{aligned}$$

求解出一组复数权重 a_{ij} 和 a_{ik} . 换言之, 仅通过局部坐标系下的方位角测量即可获得复数重心坐标 $a_{ij} \in \mathbb{C}$ 满足元图节点在全局坐标系下的线性方程

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(p_j - p_i) = 0. \quad (20)$$

将多智能体网络中所有元图构建的方程(15)堆砌成矩阵形式即有方程(6), 但注意到该方程中的系数和变量均为复数. 基于该复数矩阵线性方程可以得到如下关于网络可定位性的代数条件.

定理5^[4] 对于二维多智能体网络 F_p , 假设 p 是一般化的, 那么基于方位角测量和复数重心坐标的多

智能体网络 F_p 可线性定位, 当且仅当 $n_a \geq 2$ 且方程(6)和(7)中定义的复数矩阵 D_{ff} 是非奇异的.

根据以上代数条件, 文献[4]也给出了多智能体网络可线性定位的一个充分必要拓扑条件.

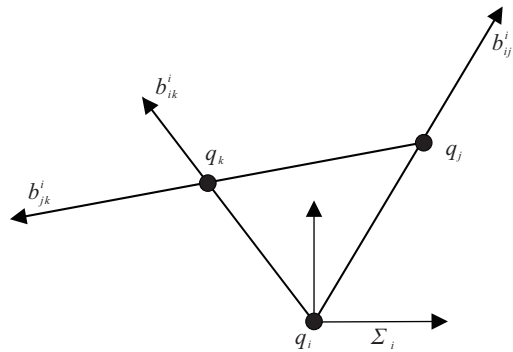


图5 构建相似框架

定理6^[4] 对于二维多智能体网络 F_p , 假设 p 是一般化的, 那么基于方位角测量和复数重心坐标的多智能体网络 F_p 可线性定位, 当且仅当 $n_a \geq 2$ 且每个自由节点在重心坐标关联图 $\mathcal{G}(M)$ 中相对于锚节点集 \mathcal{V}_a 是2-可达的.

需要指出的是, 在二维空间, 基于复数重心坐标获得的针对方位角测量信息的多智能体网络定位比基于实数重心坐标获得的针对距离测量信息的多智能体网络定位需要较弱的拓扑连接, 同时锚节点的最少量也可以再少一个.

在三维空间中, 文献[26]将节点*i*在局部坐标系 Σ_i 下的方位角测量应用实数表示为

$$b_{ij}^i = \begin{bmatrix} \sin(\theta_{ij}^i) \cos(\phi_{ij}^i) \\ \sin(\theta_{ij}^i) \sin(\phi_{ij}^i) \\ \cos(\theta_{ij}^i) \end{bmatrix},$$

其中 θ_{ij}^i 和 ϕ_{ij}^i 分别为节点*j*在局部坐标系 Σ_i 下的极角和方位角, 如图6所示. 二维空间中局部坐标系下方位角测量表示可以看作是三维空间中极角 $\phi_{ij}^i = \pi/2$ 时的特殊情况, 因此该方法可以一般性地应用到二维或三维空间的情况.

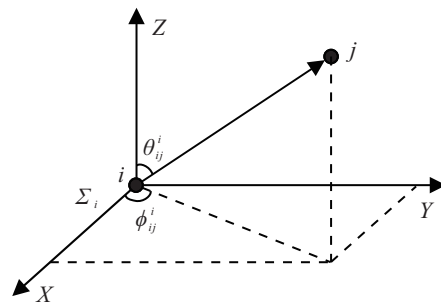


图6 方位角测量实数表示

为构建实数重心坐标, 对基于方位角测量信息的多智能体网络的元图做如下假设.

假设1^[26] 对于各节点*i*,存在感知图 \mathcal{G} 的子图(图7(a)),其由节点*i*, j_0, \dots, j_d 构成并满足以下性质:1)节点*i*与 j_0 互为邻居,即 $j_0 \in \mathcal{N}_i, i \in \mathcal{N}_{j_0}$;2)对于 $l = 1, 2, \dots, d$,节点 j_l 是节点*i*和 j_0 共同的邻居,即 $j_l \in \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_{j_0}$.另外,节点*i*和 j_0 是通信邻居(图7(b)),即 $(i, j_0) \in \mathcal{E}_c$.

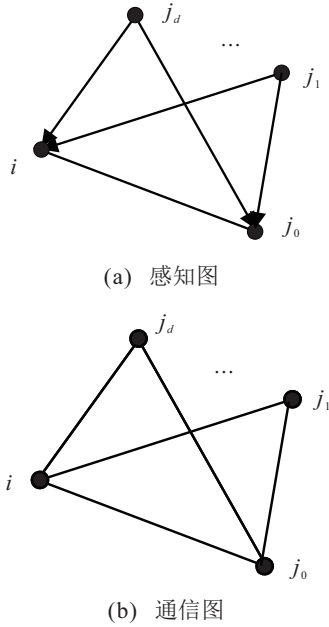


图7 假设1下节点*i*的感知图和通信图

在此假设下,基于方位角测量的多智能体网络的元图由 $(d+2)$ 个节点构成,每个节点至少存在 $(d+1)$ 个邻居,测量量是邻居相对于节点的方位角信息以及其中一个邻居相对于另外一个邻居的方位角信息.可以看出在二维空间情况下,计算实数重心坐标的元图(图7)比计算复数重心坐标的元图(图5)要多增加一个节点.

文献[26]提出了一种针对每个元图计算节点*i*在*d*维($d = 2$ 或 3)空间中相对于相邻节点实数重心坐标的统一算法,并给出了 $(d+2)$ 个节点间的线性方程

$$p_i - \sum_{l=0,1,\dots,d} a_{ij_l} p_{j_l} = 0, \quad (21)$$

其中 a_{ij_l} 为节点*i*相对于其邻居节点的重心坐标.

此时多智能体网络基于方位角测量的元图由节点集*i*, j_0, \dots, j_d 构成,节点*i*相对于 $(d+1)$ 个邻居节点的重心坐标 a_{ij_l} 可以通过以下方法获得:首先构建此元图的相似框架,令该相似框架中的

$$q_i = \mathbf{0}_3, q_{j_0} = b_{ij_0}^i.$$

然后根据

$$q_i + c_1 b_{ij_0}^i = q_{j_0} + c_2 b_{j_0 j_1}^i (= q_{j_1})$$

计算标量参数 c_1 和 c_2 ,同时可通过 $q_{j_1} = q_i + c_1 b_{ij_0}^i$ 或

$q_{j_1} = q_{j_0} + c_2 b_{j_0 j_1}^i$ 求得 q_{j_1} .为保证解存在,将上式重新表述为如下凸优化问题:

$$(c_1^*, c_2^*) = \underset{c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmin}} \|(q_i + c_1 b_{ij_0}^i) - (q_{j_0} + c_2 b_{j_0 j_1}^i)\|.$$

最后对节点 j_l 重复上述计算即可获得所有坐标 $q_{j_l}, l = 2, 3, \dots, d$.

二维和三维空间中,点*i*相对于 $d+1$ 个邻居节点的重心坐标 a_{ij_l} 可分别通过下式^[26]计算获得:

$$[a_{ij} \ a_{ik} \ a_{il}]^T = \begin{bmatrix} p_j & p_k & p_l \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_i \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[a_{ij} \ a_{ik} \ a_{il} \ a_{ih}]^T = \begin{bmatrix} p_j & p_k & p_l & p_h \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

将多智能体网络中所有元图构建的方程(16)堆砌成矩阵形式即有实数方程(6).基于该实数矩阵线性方程,可以得到如下关于网络可定位性的代数条件.

定理7^[26] 对于多智能体网络 F_p ,假设 p 是一般化的,那么基于方位角测量和实数重心坐标的多智能体网络 F_p 可线性定位,当且仅当 $n_a \geq d+1$ ($d = 2$ 或 3)且方程(6)和(7)中定义的实数矩阵 D_{ff} 是非奇异的.

同样基于实数重心坐标,由于方位角信息可以提供比距离更为有价值的定位信息,从感知图和通信图的要求来看会显得更为宽松,给出以下定理.

定理8^[26] 对于多智能体网络 F_p ,假设 p 是一般化的,如果多智能体网络的感知图和通信图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是能够保证基于距离测量可线性定位的,则同样也能够保证基于方位角测量是可线性定位的.

注2 文献[42]对方位角测量存在误差情况下的多智能体网络定位进行了分析.文献[4-5]在考虑存在测量误差的情况下,对所提出的线性定位算法进行研究,并提供了确保代数条件的矩阵误差上界,其获得的结论也可应用至其他测量的情况.另一方面,文献[26]针对带有误差的测量进行了仿真检验.

2.1.3 相对位置测量

对于多智能体网络,如果智能体根据感知图同时测量距离和方位角信息,则定位问题变为利用相对位置测量的分布式定位问题.

在二维空间中,文献[7]在全局坐标系方向未知的情况下,应用局部坐标系内相对位置信息解决了多智能体网络定位问题.在二维空间相对位置可测的情况下,仍然可以用复数变量表示相关向量,如图8所示,其中*X*轴代表实轴,*Y*轴代表虚轴.节点*j*在局

部坐标系 Σ_i 下相对位置测量可表示为

$$p_j^i = d_{ij} e^{i\theta_{ij}} = (p_j - p_i) e^{-i\alpha_i},$$

其中 i 为虚数单位 $\sqrt{-1}$.

多智能体网络基于相对位置测量的元图由节点和其两个邻居构成, 测量值为两个邻居在节点局部坐

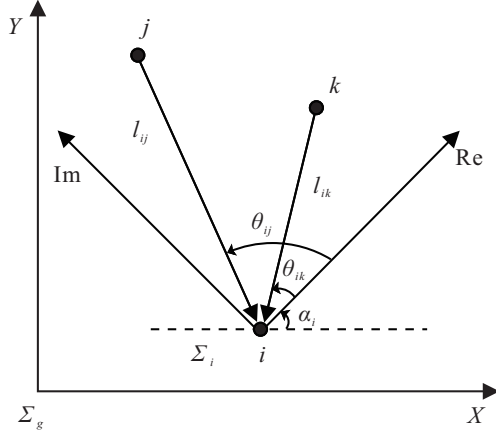


图8 相对位置测量示意图

标系下的相对位置. 因此当节点 i 至少有两个邻居时, 在已知距离及方位角测量的情况下, 可以很容易地计算获得一组复数重心坐标 $\{a_{ij}\}$, 并可以建立如下复数线性方程约束:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} p_j^i = 0. \quad (22)$$

式(17)也可以表示为

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (p_j - p_i) = 0. \quad (23)$$

将多智能体网络中所有元图构建的方程(18)堆砌成矩阵形式即有复数矩阵方程(6). 基于该复数矩阵线性方程, 可以得到如下关于网络可定位性的代数条件.

定理9^[7] 对于二维多智能体网络 F_p , 假设 p 是一般化的, 那么基于相对位置测量和复数重心坐标的多智能体网络 F_p 可线性定位, 当且仅当 $n_a \geq 2$ 且方程(6)和(7)中定义的复数矩阵 D_{ff} 是非奇异的.

文献[7]中给出了二维多智能体网络基于相对位置测量可线性定位的拓扑条件.

定理10^[7] 对于二维多智能体网络 F_p , 假设 p 是一般化的, 那么基于相对位置测量和复数重心坐标的多智能体网络 F_p 可线性定位, 当且仅当 $n_a \geq 2$ 且每个自由节点在感知图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 中相对于锚节点集 \mathcal{V}_a 是2-可达的.

值得指出的是, 二维空间基于相对位置的网络定位要求每个自由节点相对于锚节点集 \mathcal{V}_a 的2-可达性是体现在感知图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 上的, 而定理6基于方位角的网络定位要求每个自由节点相对于锚节点集 \mathcal{V}_a

的2-可达性是体现在重心坐标关联图 $\mathcal{G}(M)$ 上的. 后者可能会对感知图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 提出更多的拓扑连接要求.

相对位置测量在三维空间中的网络可定位性仍有待探究.

注3 文献[7]探究了存在相对位置测量误差以及迭代舍入误差的多智能体网络定位问题, 应用加权最小二乘估计理论提出了相应的分布式定位算法, 并给出其收敛性证明.

2.1.4 内角测量

当多智能体间可以测量不带方向的内角时, 文献[29]基于距离测量情况下的线性方程以及正弦定理得到了二维以及三维空间下的内角测量线性、非线性方程, 并建立了内角测量下的可定位性条件(由于其数学本质与距离情况类似, 此处不再赘述). 注意到, 当智能体内角测量不带方向时, 二维元图至少需要4个智能体, 而三维元图则至少需要5个智能体. 为此, 文献[27-28, 43]通过使用带方向的内角测量得到了新的角度线性方程, 其在二维空间中只需3个智能体, 三维空间只需4个智能体.

在二维空间中, 元图是一个三角形顶点构成的子图, 而测量量是三角形的所有内角. 文献[43]使用复数重心坐标建立如下基于内角测量的复数线性方程:

$$\left(\frac{q_k - q_i}{q_k - q_j} \right) (p_j - p_i) + \left(\frac{q_j - q_i}{q_j - q_k} \right) (p_k - p_i) = 0. \quad (24)$$

其中 $q_i, q_j, q_k \in \mathbb{C}$ 为元图的一个相似框架, 其坐标值可以在一个特殊的局部坐标系下基于三角形 Δ_{ijk} 的内角计算获得, 计算方法类似于基于方位角的复数重心坐标计算.

类似地, 如图9所示, 文献[27]通过使用两种方式描述内角 α_{kij} 角平分线上的单位向量 $b_{i\text{-bisector}}$ 得到等式

$$b_{i\text{-bisector}} = R\left(-\frac{\alpha_{kij}}{2}\right) \frac{p_j - p_i}{d_{ij}} = R\left(\frac{\alpha_{kij}}{2}\right) \frac{p_k - p_i}{d_{ik}};$$

然后通过使用正弦定理

$$\frac{d_{ij}}{d_{ik}} = \frac{\sin \alpha_{ikj}}{\sin \alpha_{ijk}}$$

得到内角测量下的实数线性方程

$$R^T(\alpha_{kij})(p_j - p_i) - \frac{\sin \alpha_{jki}}{\sin \alpha_{ijk}} (p_k - p_i) = 0, \quad (25)$$

其中 $R(\alpha_{kij})$ 为逆时针旋转 α_{kij} 角度的旋转矩阵. 注意到方程(20)可以被等价转化为复数重心坐标形式下的线性方程(19).

文献[27]将多智能体网络中所有元图构建的方程(20)堆砌成矩阵形式即有实数矩阵方程(6). 基于

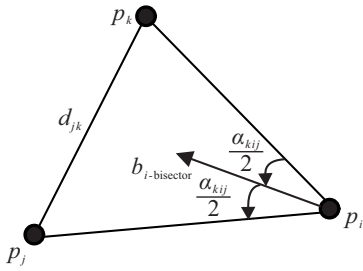


图9 三角形内的角度线性方程

该实数矩阵线性方程,可以得到如下关于网络可定位性的代数和拓扑条件.

首先给出几个相关概念.

定义3^[27] 1) 一个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 称为是三角化的, 如果对于 \mathcal{V} 中任意两个互为邻居的节点 i 和 j , 总存在第3个节点 k 是节点 i 和 j 的邻居.

2) 一个框架 $F_p = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, p)$ 称为是三角化角度刚性的, 如果: ①图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是三角化的; ②在智能体的位置 p 上施加一个扰动后, 为了维持 F_p 中任意一个三角形的内角值不变, F_p 只能进行平移、旋转或者缩放.

3) 一个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 称为 L -三角图, 如果: ①图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是三角化的; ②图 \mathcal{G} 中三角形的总个数为 $n - 2$, 其中 n 为图 \mathcal{G} 的节点总数; ③对于图 \mathcal{G} 中任意一个三角化子图, 其三角形的总个数小于或等于该子图的节点总数减2.

定理11^[27] 对于二维多智能体网络 F_p , 假设 p 是一般化的, 那么基于内角测量的多智能体网络 F_p 可线性定位, 当且仅当 $n_a \geq 2$ 且方程(6)和(7)中定义的实数矩阵 D_{ff} 是非奇异的.

定理12^[27] 对于二维多智能体网络 F_p , 假设 p 是一般化的且 $n_a = 2$, 那么基于内角测量的多智能体网络 F_p 可线性定位, 当且仅当 F_p 是三角化角度刚性的, 或等价地说, 感知图 \mathcal{G} 包含一个 L -三角图.

在三维空间中, 线性方程(20)不再成立. 为推导三维空间中基于内角测量的线性约束方程, 做如下假设.

假设2^[44] 所有智能体坐标系的 Z 轴都具有共同的指向.

在假设2下, 一种建立基于内角测量的线性约束方程的直观方法是将智能体的位置垂直投影到 XY 平面. 如图10所示, 考虑4个节点 i, j, k, m , 并将 j, k, m 投影到节点 i 为原点的局部坐标系 XY 平面, 分别得到 j', k', m' . 在 XY 平面内, 利用二维空间下的线性方程(20)可以类似地对 $\triangle ij'k'$ 和 $\triangle ik'm'$ 建立如下两个角度线性约束方程:

$$\frac{p_{j'} - p_i}{\|p_{j'} - p_i\|} = R_z(\alpha_{k'ij'}) \frac{p_{k'} - p_i}{\|p_{k'} - p_i\|}, \quad (26)$$

$$\frac{p_{k'} - p_i}{\|p_{k'} - p_i\|} = R_z(\alpha_{m'ik'}) \frac{p_{m'} - p_i}{\|p_{m'} - p_i\|}. \quad (27)$$

其中: $R_z(\alpha_{k'ij'}) = \begin{bmatrix} R(\alpha_{k'ij'}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{SO}(3)$ 为绕 Z 轴的旋转矩阵; $\alpha_{k'ij'} \in [0, 2\pi), \alpha_{m'ik'} \in [0, 2\pi)$ 为具有方向的内角测量; $p_{j'}, p_{k'}, p_{m'} \in \mathbb{R}^3$ 为各投影点在全局坐标系下的坐标. 在与 XY 平面垂直的 Z 方向上, 可以利用 j, k, m 的高度值建立如下两个角度线性约束方程:

$$\text{sgn}(\sin \alpha_{jiZ}) \frac{p_{jZ} - p_{iZ}}{\|p_{jZ} - p_{iZ}\|} = \text{sgn}(\sin \alpha_{kiZ}) \frac{p_{kZ} - p_{iZ}}{\|p_{kZ} - p_{iZ}\|}, \quad (28)$$

$$\text{sgn}(\sin \alpha_{kiZ}) \frac{p_{kZ} - p_{iZ}}{\|p_{kZ} - p_{iZ}\|} = \text{sgn}(\sin \alpha_{miZ}) \frac{p_{mZ} - p_{iZ}}{\|p_{mZ} - p_{iZ}\|}, \quad (29)$$

其中 $p_{iZ}, p_{jZ}, p_{kZ}, p_{mZ}$ 分别为节点 i, j, k, m 的 Z 轴坐标, 是标量.

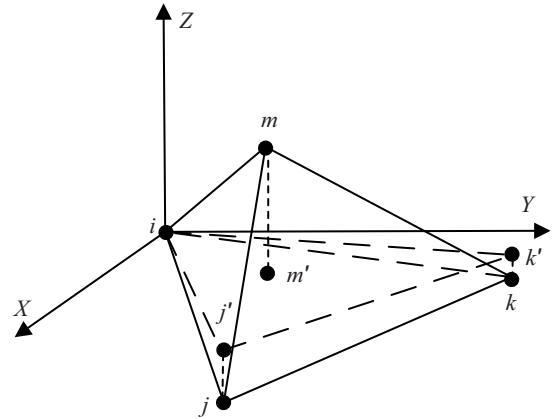


图10 三维空间四面体内建立角度线性约束方程示意图

将式(21)~(24)进行整理化简即可得到三维空间下的角度线性约束方程形式^[44], 有

$$A_i p_i + A_j p_j + A_k p_k + A_m p_m = 0, \quad (30)$$

其中 $A_i, A_j, A_k, A_m \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ 仅通过该元图的内角测量即可计算获得. 这里嵌入到该元图边上的权重(嵌入量)是实数矩阵.

同样地, 将多智能体网络中所有元图构建的方程(25)堆砌成矩阵形式即有矩阵方程(6). 基于该矩阵线性方程, 可以得到如下关于网络可定位性的代数和拓扑条件.

定理13^[44] 对于假设2下的三维多智能体网络 F_p , 假设 p 是一般化的, 那么基于内角测量的多智能体网络 F_p 可线性定位, 当且仅当 $n_a \geq 2$ 且方程(6)和(7)中定义的实数矩阵 D_{ff} 是非奇异的.

文献[28]将假设2进一步弱化, 得到假设3.

假设3^[28] 在每一个四面体结构内, 至少有一个

智能体坐标系的 Z 轴与全局坐标系 Z 轴具有共同的指向。

在假设3的条件下,建立角度线性约束方程的方法与假设2下的构建方法有所不同。在三维空间,基于内角测量信息的多智能体网络的元图是四面体。文献[28]首先通过智能体的内角测量构建一个相似四面体,该相似四面体由原四面体经过平移、缩放以及绕 Z 轴旋转得到,因此可以通过内角值计算获得一个特殊局部坐标系下的 q_i, q_j, q_k, q_m 坐标。基于此,可以计算获得一组满足平移、缩放以及绕 Z 轴旋转不变性的权重矩阵 B_i, B_j, B_k, B_m 。由于其不变特性,该权重系数同样满足全局坐标系下的线性约束方程,即

$$B_i p_i + B_j p_j + B_k p_k + B_m p_m = 0. \quad (31)$$

定理14^[28] 对于假设3下的三维多智能体网络 F_p ,假设 p 是一般化的,那么基于内角测量的多智能体网络 F_p 可线性定位,当且仅当 $n_a \geq 2$ 且由式(26)导出的方程(6)和(7)中定义的实数矩阵 D_{ff} 是非奇异的。

注4 文献[43]基于内角测量应用二次规划优化方法处理了内角测量存在误差的情况。文献[27,29]对测量误差情况下的位置估计误差进行了分析。

2.2 节点可定位性

由前文探讨的网络可定位性结果可知何种条件下整个多智能体网络是可以协同定位的,以及何种条件下整个多智能体网络是不可以协同定位的。这些结果只是给出了是与否的结论,但是当—个多智能体网络不满足网络定位条件(即整个网络不可以协同定位)时,并不意味着该网络中的所有节点都不可以被定位。换言之,其中存在可定位的节点,也一定存在不可被定位的节点,但是由上述结果无法知道哪些节点可以定位、哪些节点不可以被定位。同时注意到,当一个多智能体网络中存在一个或多个不可以被定位的节点时,强行运行协同定位算法会导致整个网络中所有节点的定位结果都会由于不可定位节点的存在而出现偏差。

本节引入重要概念——节点可定位性^[45-46]。节点可定位性探讨多智能体网络每个节点是否可以被定位的基本能力。事实上,网络定位可以看作是节点可定位问题中所有节点都可定位的一种特殊情况。因此,多智能体网络的节点可定位性问题是更—般化的问题^[47-48]。

对于多智能体节点可定位性问题,文献[43]基于内角测量进行了研究,并首先给出了节点可定位性的

充分必要条件。值得指出的是,文献[43]提出的节点可定位性判定方法和核心思想也可以一般性地应用到基于距离、方位角、相对位置等多种测量类型。下面介绍由文献[43]提出的判定节点可定位性的方法。

在二维空间中,当方位角或内角可测时,文献[43]基于复数重心坐标,通过构建三角形元图的相似框架得到 i, j, k 三个节点间的线性约束方程(14)。按照1.4节线性方法的定位步骤,可以得到矩阵 $D_{ff} = M_f^H M_f \in \mathbb{C}^{n_f \times n_f}$,其元素由复数组成, H 代表共轭转置。定义 $e_i \in \mathbb{R}^{n_f}$ 为 \mathbb{R}^{n_f} 的一个自然基向量,其只有第 i 个元素为1,其余元素均为0。有以下关于节点可定位性的结果。

定理15^[43] 对于二维多智能体网络 F_p ,假设 p 是一般化的,那么节点 i 是可线性定位的当且仅当 $e_i \perp \text{Ker}(D_{ff})$ 。

定理15中 $\text{Ker}(D_{ff})$ 代表矩阵 D_{ff} 的核,其是由所有满足线性方程 $D_{ff}x = 0$ 的解组成的集合,也称为矩阵 D_{ff} 零空间。当方程组 $D_{ff}x = 0$ 只有0解时,矩阵 D_{ff} 是满秩的,此时多智能体网络的线性约束方程存在唯一解。因此,当零空间中任一向量的第 i 项出现非零项时,所对应的多智能体网络第 i 个节点是不可定位的。

注意到文献[43]不但给出了内角测量下节点可定位性的充要条件,还给出了检验该条件的分布式迭代算法,其仅依赖于节点的方位角或内角测量以及节点间的通信,最后通过共轭残差法进行迭代求解完成定位目标。

3 多智能体网络定位的线性分布式算法

多智能体网络协同定位算法用于确定节点在全局坐标系下的坐标位置,是多智能体网络定位的关键。除了基于不同的测量类型进行分类外,多智能体网络定位算法还可以根据进行计算的方式分为集中式与分布式两类,根据构建约束方程的不同类型分为线性与非线性。本节主要介绍多智能体网络协同定位的线性分布式算法。

3.1 距离测量

在二维和三维空间中,获得距离测量线性约束方程(13)后,通过对目标函数求梯度获得连续线性定位算法(8),进而得到离散定位算法(9)和(10)。假设感知图与通信图相同,且均为无向图,节点通过与元图中邻居节点之间进行距离测量并计算嵌入量,即节点相对于邻居节点的重心坐标,再与邻居节点间通过通信交互位置估计值及重心坐标与位置估计值的乘积对节点位置进行迭代更新。

为了能够更加直观地体现节点间的信息分布式交互,文献[36]为每个节点引入辅助变量 $\zeta_i^{(r)} \in \mathbb{R}^d$ 并考虑由交换辅助变量引起的单步延迟,其中 $r = 1, 2, \dots, r_i$ 表示节点 i 所在的第 r 个元图 $\Delta^{(r)}$, r_i 为多智能体网络中包含节点 i 的元图的个数. 基于距离测量的单个节点线性迭代算法可以表示为

$$\begin{cases} \zeta_i^{(r)}[k+1] = \sum_{j \in \mathcal{N}_i \cap \Delta^{(r)}} a_{ij}^{(r)}(\hat{p}_j[k] - \hat{p}_i[k]), \\ r = 1, 2, \dots, r_i; \\ \hat{p}_i[k+1] = \\ \hat{p}_i[k] - \epsilon \sum_r \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i \cap \Delta^{(r)}} a_{ji}^{(r)} \zeta_j^{(r)}[k] - \zeta_i^{(r)}[k] \right). \end{cases} \quad (32)$$

其中: $a_{ij}^{(r)}$ 为节点 i 第 r 个元图 $\Delta^{(r)}$ 中节点 i 相对于邻居节点 j 的重心坐标,可以由节点 i 基于与邻居节点间的距离测量通过局部计算获得, $a_{ji}^{(r)} \zeta_j^{(r)}$ 可以由邻居节点经过局部计算后通过通信传递给节点 i 以对估计位置进行线性迭代. 为保证线性定位算法(27)的收敛性, ϵ 应满足 $0 < \epsilon < \frac{1}{\lambda_{\max}(D_{ff})}$ [36].

以上介绍了基于所有元图的线性约束构成方程组的线性定位算法. 文献[21]将每个节点关于包含自身节点的所有元图的线性约束方程通过线性组合构成方程组,所获得的方程数恰好等于未知变量的个数. 文献[21]给出了每个节点两步线性迭代定位算法,其分布式实现如下:

$$\begin{cases} \zeta_i[2k+1] = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ij}(\hat{p}_j[2k] - \hat{p}_i[2k]), \\ \hat{p}_i[2k+2] = \\ \hat{p}_i[2k] - \epsilon \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ji} \zeta_j[2k+1] - \zeta_i[2k+1] \right), \end{cases} \quad (33)$$

其中 \bar{a}_{ij} 为对所有元图产生的线性约束方程经过线性组合后获得的节点 i 关于邻居节点 j 的重心坐标, $\bar{a}_{ji} \zeta_j$ 可以由邻居节点经过局部计算后通过通信传递给节点 i . 为保证线性定位算法(28)的收敛性, ϵ 应满足

$$0 < \epsilon < \frac{2}{\lambda_{\max}(D_{ff})}.$$

当

$$\epsilon = \frac{2}{\lambda_{\max}(D_{ff}) + \lambda_{\min}(D_{ff})}$$

时,定位算法实现最快的收敛速度[21].

3.2 方位角测量

在二维和三维空间中,分别基于复数重心坐标和实数重心坐标得到方位角测量线性约束方程(15)和

(16)后,按照1.4节中线性方法的定位步骤,同样可以得到连续和离散线性定位算法(8)~(10). 假设感知图与通信图均为无向图,节点 i 通过与邻居节点 j 的信息交互可以在局部坐标系 Σ_i 中获取表示方位角测量信息的单位向量 b_{ij}^i . 同样地,节点 j 也可以在局部坐标系 Σ_j 中获取单位向量 b_{ji}^j . 由此可以计算局部坐标系的相对方向,再通过与邻居节点测量及通信局部计算复数权重,最后进行位置估计.

建立方位角测量线性约束方程(15)和(16)后,无论是实数还是复数,其约束方程的形式与基于距离测量获得的线性约束方程是一致的. 因此,式(27)和(28)两种分布式迭代计算方式同样适用于基于方位角测量的线性定位求解. 唯一需要注意的是:当在复数域进行计算时,转置操作需要用共轭转置来代替.

3.3 相对位置测量

同样地,通过相对位置线性方程(18)可以得到连续定位算法(8)和离散定位算法(9)、(10). 在二维空间中,式(27)和(28)的两种分布式迭代计算方式同样适用于基于相对位置测量的线性定位求解. 其中需要注意相对位置测量下的 a_{ij} 计算方法不同,参见第2.1.3节.

3.4 内角测量

在二维空间中得到内角线性约束方程(20),或者在三维空间中得到内角线性约束方程(25)(或(26))后,按照梯度法进行设计可以得到线性定位算法(8). 根据文献[27],该分布式定位算法(8)在每个节点的分量形式可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}}_i(t) = \\ - \sum_{r=1,2,\dots,r_i} (A_i^{(r)})^T f_i^{(r)}(\hat{p}_i(t), \hat{p}_j(t)|_{j \in \mathcal{N}_i \cap \Delta^{(r)}}). \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $\Delta^{(r)}$ 为包含节点 i 的第 r 个元图,共有 r_i 个(这里要注意的是将由相同节点不同顺序构成的元图认为是不一样的元图), $f_i^{(r)}(\hat{p}_i(t), \hat{p}_j(t)|_{j \in \mathcal{N}_i \cap \Delta^{(r)}})$ 为二维空间情形方程(20)或者三维空间情形方程(25)(或(26))的等式左边表达式, $A_i^{(r)}$ 为对应的权重系数矩阵.

同理,对连续时间定位算法(29)进行离散化设计可以得到离散时间、基于内角测量信息的分布式线性定位算法为

$$\begin{aligned} \hat{p}_i[k+1] = \\ \hat{p}_i[k] - \sum_{r=1,\dots,r_i} (A_i^{(r)})^T f_i^{(r)}(\hat{p}_i(t), \hat{p}_j(t)|_{j \in \mathcal{N}_i \cap \Delta^{(r)}}), \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $\epsilon > 0$ 可以理解为采样周期. 为保证式(30)的收

敛性,需满足 $\epsilon < \frac{2}{\lambda_{\max}(D_{ff})}$ [27].

不同于周期采样下的离散定位算法 (30), 文献 [28] 进一步探讨了非周期采样下的连续定位算法

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}),$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_f(t) = -D_{ff}\hat{\mathbf{p}}_f(t_k) - D_{fa}\mathbf{p}_a, \quad (36)$$

以及非周期采样下联合通信图的连续定位算法

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}),$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_f(t) = -D_{ff}^{t_k}\hat{\mathbf{p}}_f(t_k) - D_{ff}^{t_k-1}\hat{\mathbf{p}}_f(t_{k-1}) - D_{fa}\mathbf{p}_a. \quad (37)$$

其中: $D_{ff}^{t_k}$ 为 D_{ff} 在 $t = t_k$ 时刻下节点间具有联通关系的部分, 联合通信图的条件满足 $D_{ff}^{t_k} + D_{ff}^{t_k-1} = D_{ff}$.

4 待解决问题和未来研究方向

本节讨论分布式多智能体网络定位研究中尚未完全解决的问题并总结未来主要的研究方向.

4.1 多智能体网络线性定位的遗留未解决问题

根据上述4种测量类型下多智能体网络线性定位理论和分布式算法综述, 多智能体网络协同定位中尚未解决的问题主要包括以下3个方面, 具体叙述如下.

4.1.1 网络可定位性

关于网络可定位性的结果大多基于双向感知图、通信图以及时不变的网络, 在实际系统中, 一方面感知图和通信图可能都是单向的且可能会是时变的, 另一方面由于传感器和通信设备能力的不同会使得感知图与通信图不一致. 在这些情形下, 仍然有许多还没有明确的网络可定位性结论. 更重要的是, 目前针对不同类型的测量信息, 获得的网络可定位性条件往往基于相应的线性方法, 然而这种线性方法所得到的条件与基于非线性测量的网络拓扑所要求的条件之间可能存在一些差异, 这种差异的本质及具体程度仍值得深入研究和探索.

4.1.2 节点可定位性

目前已有的关于节点可定位性研究结果主要集中在距离和角度测量下的节点可定位性条件, 且大多数方法均采用集中式的方式. 因此, 在相对位置、方位角测量以及混合类型测量下, 分别基于有向测量图和有向通讯图的节点可定位性条件方面仍有待深入探究. 并且, 为了实现更为有效的节点可定位性验证, 如何设计分布式的方法对可定位性条件进行验证也需要进一步研究.

4.1.3 分布式定位算法

在多智能体网络本质非线性测量可定位条件下, 是否存在线性的分布式定位算法可以进行求解并非必然. 若无法确保这种必然性, 则在协同定位过程中需要深入探讨如何在线地以分布式的方式增加感知或通信信息, 以确保分布式定位算法的存在性. 此外, 在分布式线性定位算法设计中, 如何提高算法的收敛速度, 如何在实际测量存在噪音的情境下保持算法的鲁棒性以及如何设计算法以处理通信延迟和数据包丢失等情况, 都是需要深入研究和解决的难题.

4.2 多智能体网络线性定位的未来研究方向

除多智能体网络线性定位本身尚未解决的问题需要进一步研究外, 其核心思想和方法还可以扩展到多个领域. 为了更清晰地探讨这一点, 本文总结了未来多智能体网络线性定位可能拓展的研究方向如下.

4.2.1 移动多智能体网络的协同定位问题

本文综述的结果均属于静态多智能体网络的定位, 在有些应用场景中智能体节点是动态移动而不再是静止不动的, 这些情况下的多智能体网络也将是动态变化的. 比如在工厂里, 当通过协同定位方式获得工作人员、车辆等的位置时, 其所对应的智能体坐标位置是动态变化的而且多智能体网络拓扑也是动态变化的. 显然, 这些动态变化特性也许不能提前知道, 但往往智能体的动力学状态模型可以基于机理方式获得. 因此, 针对移动多智能体网络, 结合分布式动态估计理论实现动态系统的协同实时定位是一个重要的研究方向.

4.2.2 多智能体网络线性定位扩展到同步定位与建图 (SLAM)

近年来, 机器人同步定位与建图 (simultaneous localization and mapping, SLAM) 受到学术界的广泛关注, 并在工业界得到了实际应用. 值得注意的是, 大多数 SLAM 方法是基于非线性滤波和非线性优化技术实现的, 因此存在局限性, 例如对运动模型的依赖性、非线性导致的局部最优性和初始化困难等问题. 由于移动机器人的 SLAM 问题与多智能体分布式定位存在密切的本质联系, 如何从图的角度出发, 借鉴多智能体线性定位理论的优势将其扩展到 SLAM 问题是非常有研究价值的方向. 这将有助于克服 SLAM 方法中存在的一些限制, 并提供更有效、鲁棒的机器人定位与建图解决方案, 为 SLAM 问题的解决提供新的思路. 进一步地, 可以考虑应用线性方法多机 SLAM 问题, 令 SLAM 技术得到进一步提升. 然而, 在移动机器人的 SLAM 问题中, 被定位的是

环境的特征点与机器人之间的相对位置,显然,特征点不具有主动测量与通信功能.与此不同,在多智能体网络的分布式定位中,每个节点可以进行局部测量并与邻居节点进行通信.这也构成了二者之间的主要区别.因此,在将多智能体网络线性定位方法应用到SLAM求解的实现过程中,仍存在一些难点和关键性技术亟需取得突破.

4.2.3 同步定位与编队运动控制

多智能体编队控制旨在通过智能体已有的测量量,设计分布式控制器令智能体形成事先设定好的期望几何构型.编队控制也常常被称为多智能体分布式协同定位的对偶问题.注意到当多智能体网络的测量量仅为距离、方位角或内角时,目前提出的非线性编队控制算法大多仅能保证编队构型的局部收敛或存在收敛误差^[49],少量能保证几乎全局收敛^[50-51].此外,这些控制器的结构具有较大的差异,因此需要研究一种可以同步定位与编队运动控制的思路,其可以将非线性测量通过定位算法得到位置信息并实时在线地用于编队控制,所设计的控制结构可以适用于不同的测量类型.

4.2.4 同步定位与时钟一致问题

针对一些多智能体网络^[52],考虑到智能体间的距离测量是基于时间差原理计算获得的,但注意到实际多智能体网络中的智能体携带的时钟存在差异,因此不同步的时钟必然导致协同定位结果的不准确.针对多智能体间时钟的非同步情况,如何根据已有的通信资源、计算资源、测量资源进行时钟同步与协同定位的一体化设计和分析是值得深入研究的重要方向.

5 结语

本文主要围绕实数重心坐标、复数重心坐标和矩阵系数权重对多智能体网络协同定位的线性理论和分布式线性方法做了较为全面的综述.首先概括了多智能体网络线性方法的核心思想及相对于非线性方法的优势,其关键在于将直接的非线性测量方程通过多智能体网络中元图内部的局部信息交换和计算构建线性约束方程;其次,从不同类型的测量量出发,包括距离测量、方位角、相对位置、内角,介绍了多智能体网络协同定位的网络可定位性代数条件、拓扑条件以及节点可定位性的代数条件;然后,在解答了多智能体网络在不同类型测量信息下可定位这一根本性问题后,给出分布式线性定位算法的介绍和实现方法;最后,基于多智能体网络协同定位的线性理论和方法,讨论了未来需要进一步深入研究的问题以

及未来极为重要的几个研究方向.

参考文献(References)

- [1] Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J. Global positioning system: Theory and practice[M]. Vienna: Springer Vienna, 1997.
- [2] Wymeersch H, Lien J, Win M Z. Cooperative localization in wireless networks[J]. Proceedings of the IEEE, 2009, 97(2): 427-450.
- [3] Aspnes J, Eren T, Goldenberg D K, et al. A theory of network localization[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2006, 5(12): 1663-1678.
- [4] Lin Z Y, Han T R, Zheng R H, et al. Distributed localization for 2-D sensor networks with bearing-only measurements under switching topologies[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(23): 6345-6359.
- [5] Zhao S Y, Zelazo D. Localizability and distributed protocols for bearing-based network localization in arbitrary dimensions[J]. Automatica, 2016, 69: 334-341.
- [6] Zhao S Y, Zelazo D. Bearing rigidity theory and its applications for control and estimation of network systems: Life beyond distance rigidity[J]. IEEE Control Systems, 2019, 39(2): 66-83.
- [7] Lin Z, Fu M, Diao Y. Distributed self localization for relative position sensing networks in 2D space[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(14): 3751-3761.
- [8] Jing G S, Wan C H, Dai R. Angle-based sensor network localization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(2): 840-855.
- [9] Hendrickson B. The molecule problem: Exploiting structure in global optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 1995, 5(4): 835-857.
- [10] Moré J J, Wu Z J. Global continuation for distance geometry problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 1997, 7(3): 814-836.
- [11] Biswas P, Ye Y Y. Semidefinite programming for ad hoc wireless sensor network localization[C]. Proceedings of the 3rd International Symposium on Information Processing in Sensor Networks. New York: ACM, 2004: 46-54.
- [12] Diao Y F, Fu M Y, Lin Z Y, et al. A sequential cluster-based approach to node localizability of sensor networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2015, 2(4): 358-369.
- [13] Bishop A N, Anderson B D O, Fidan B, et al. Bearing-only localization using geometrically constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(1): 308-320.

- [14] Eren T, Whiteley W, Belhumeur P N. Using angle of arrival (bearing) information in network localization[C]. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 2006: 4676-4681.
- [15] Mao G Q, Fidan B, Anderson B D O. Wireless sensor network localization techniques[J]. Computer Networks, 2007, 51(10): 2529-2553.
- [16] Shames I, Anderson B D O, Fidan B. On the use of convex optimization in sensor network localization and synchronization[C]. Proceedings of the IFAC World Congress. Piscataway: IEEE, 2009: 228-233.
- [17] Jiang B M, Anderson B D O, Hmam H. 3-D relative localization of mobile systems using distance-only measurements via semidefinite optimization[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 56(3): 1903-1916.
- [18] Helmke U, Anderson B D O. Equivariant morse theory and formation control[C]. Proceedings of the 51st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Piscataway: IEEE, 2013: 1576-1583.
- [19] Khan U A, Kar S, Moura J M F. Distributed sensor localization in random environments using minimal number of anchor nodes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(5): 2000-2016.
- [20] Diao Y F, Lin Z Y, Fu M Y. A barycentric coordinate based distributed localization algorithm for sensor networks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(18): 4760-4771.
- [21] Han T R, Lin Z Y, Zheng R H, et al. A barycentric coordinate based approach to three-dimensional distributed localization for wireless sensor networks[C]. 2017 13th IEEE International Conference on Control & Automation. Ohrid, 2017: 600-605.
- [22] Xia Y Q, Yu C P, He C Y. An exploratory distributed localization algorithm based on 3D barycentric coordinates[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing Over Networks, 2022, 8: 702-712.
- [23] He C Y, Xia Y Q, Yu C P, et al. A multi-hop distributed indoor localization algorithm for ultra-wide-band sensor network[C]. 2020 16th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. Shenzhen, 2020: 1335-1340.
- [24] Wu J Z, Zino L, Lin Z Y, et al. Distributed finite-time cooperative localization for three-dimensional sensor networks[J/OL]. 2023, arXiv: 2309.11411.
- [25] Cao M Y, Zhang H, Wang Z P, et al. Fixed-time bearing-based distributed network localization[C]. 2021 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Melbourne, 2021: 964-969.
- [26] Cao K, Han Z M, Lin Z Y, et al. Bearing-only distributed localization: A unified barycentric approach[J]. Automatica, 2021, 133: 109834.
- [27] Chen L M. Triangular angle rigidity for distributed localization in 2D[J]. Automatica, 2022, 143: 110414.
- [28] Chen L M, Cao K, Xie L H, et al. 3-D network localization using angle measurements and reduced communication[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2022, 70: 2402-2415.
- [29] Fang X, Li X L, Xie L H. Angle-displacement rigidity theory with application to distributed network localization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(6): 2574-2587.
- [30] Fang X, Li X L, Xie L H. 3-D distributed localization with mixed local relative measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 5869-5881.
- [31] Lin Z Y, Han T R, Zheng R H, et al. Distributed localization with mixed measurements under switching topologies[J]. Automatica, 2017, 76: 251-257.
- [32] Lv Y, Zhang H, Wang Z, et al. Distributed localization estimation for dynamic multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2022, 19(4): 5797-5808.
- [33] Lv Y K, Zhang H, Wang Z P, et al. 3-D localization of multiagent systems under random environments based on iterative learning[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2023, 10(3): 1508-1519.
- [34] Shi L, Zheng W X, Liu Q C, et al. Privacy-preserving distributed iterative localization for wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2023, 70(11): 11628-11638.
- [35] Wang Y, Shi L, Chen X M, et al. Barycentric coordinate-based distributed localization for wireless sensor networks subject to random lossy links[J]. Neurocomputing, 2023, 550: 126503.
- [36] Cheng P, Han T R, Zhang X, et al. A single-mobile-anchor based distributed localization scheme for sensor networks[C]. 2016 35th Chinese Control Conference. Chengdu, 2016: 8026-8031.
- [37] Safavi S, Khan U A, Kar S, et al. Distributed localization: A linear theory[J]. Proceedings of the IEEE, 2018, 106(7): 1204-1223.
- [38] Eren T, Goldenberg O, Whiteley W, et al. Rigidity, computation, and randomization in network localization[C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Communications. Piscataway: IEEE, 2004: 2673-2684.
- [39] Lin Z Y, Wang L L, Chen Z Y, et al. Necessary and sufficient graphical conditions for affine formation control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(10): 2877-2891.
- [40] Anderson B D O, Shames I, Mao G Q, et al. Formal theory

- of noisy sensor network localization[J]. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2010, 24(2): 684-698.
- [41] Zhu G W, Hu J H. A distributed continuous-time algorithm for network localization using angle-of-arrival information[J]. *Automatica*, 2014, 50(1): 53-63.
- [42] Shames I, Bishop A N, Anderson B D O. Analysis of noisy bearing-only network localization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(1): 247-252.
- [43] Lin Z, Han Z, Cao M. Distributed localization for multi-robot systems in presence of unlocalizable robots[C]. *Proceedings of the 59th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway: IEEE, 2020: 1550-1555.
- [44] Chen L M, Lin Z Y, de Marina H G, et al. Maneuvering angle rigid formations with global convergence guarantees[J]. *CAA Journal of Automatica Sinica*, 2022, 9(8): 1464-1475.
- [45] Goldenberg D K, Krishnamurthy A, Maness W C, et al. Network localization in partially localizable networks[C]. *Proceedings IEEE 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*. Miami, 2005: 313-326.
- [46] Yang Z, Liu Y H. Understanding node localizability of wireless ad hoc and sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2012, 11(8): 1249-1260.
- [47] Liu Y H, Yang Z, Wang X P, et al. Location, localization, and localizability[J]. *Journal of Computer Science and Technology*, 2010, 25(2): 274-297.
- [48] Ping H D, Wang Y C, Shen X F, et al. On node localizability identification in barycentric linear localization[J]. *ACM Transactions on Sensor Networks*, 2022, 19(1): 1-26.
- [49] Han Z M, Guo K X, Xie L H, et al. Integrated relative localization and leader-follower formation control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(1): 20-34.
- [50] Chen L M, Xie L H, Li X L, et al. Simultaneous localization and formation using angle-only measurements in 2D[J]. *Automatica*, 2022, 146: 110605.
- [51] Lin Y J, Lin Z Y, Sun Z Y. Distributed event-triggered approach for multi-agent formation based on cooperative localization with mixed measurements[J]. *Electronics*, 2021, 10(18): 2265.
- [52] Wen R X, Schoof E, Chapman A. Clock rigidity and joint position-clock estimation in ultrawideband sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2023, 10(3): 1209-1221.

作者简介

林志贇(1976—),男,教授,博士生导师,博士,从事多智能体理论、分布式人工智能、自主无人系统与智能机器人等研究, E-mail: linzy@sustech.edu.cn;

吴金泽(1997—),女,博士生,从事多智能体系统、协同定位等研究, E-mail: wujz2022@mail.sustech.edu.cn;

陈亮名(1993—),男,副教授,博士,从事刚性图理论、多智能体系统控制与估计等研究, E-mail: chenlm6@sustech.edu.cn.

科研团队简介

林志贇教授团队立足于南方科技大学系统设计与智能制造学院控制科学技术中心。中心由中国科学院院士段广仁教授领衔,围绕控制科学与工程一级学科形成了3个具有国际影响力的主干学科方向:控制理论与控制工程、模式识别与智能系统、智能感知与自主控制。目前,控制科学技术中心有中国科学院院士1人、国际院士3人、IEEE Fellow 6人、海外优青6人,以国家重大战略需求和国际前沿基础理论为目标导向,开展非线性系统控制、多智能体与网络化系统、自主智能无人系统等方向重大科学和工程技术问题的研究。

课题组负责人林志贇现为南方科技大学系统设计与智能制造学院副院长,俄罗斯工程院外籍院士,IEEE Fellow, IET Fellow。近9年连续入选Elsevier“中国高被引学者”(2014年~2022年),担任IEEE Systems Journal等多个国际期刊的Associate Editor、国际互联网系统学会(INSIA)副理事长、国际自动控制联合会(IFAC)技术委员会委员、中国指挥与控制学会集群智能与协同控制专业委员会常务委员。课题组主要从事多智能体理论、分布式人工智能、自主无人系统与智能机器人、信息物理系统智能感知与控制等方向的前沿研究,主持/参与30余项国家、省部委及企业合作科研项目,出版英文学术专著2部,发表国际期刊和会议论文230余篇,申请/授权发明专利60余项,获准软件著作权20余件,所发表的论文被引用8000余次。