

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于面积重叠法的概率盒全局灵敏度计算分析

张保强, 李潇乾, 罗华耿, 颜伟杰, 汤鸿杰

引用本文:

张保强, 李潇乾, 罗华耿, 颜伟杰, 汤鸿杰. 基于面积重叠法的概率盒全局灵敏度计算分析[J]. *控制与决策*, 2024, 39(2): 467–473.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0376>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 车辆跟随控制策略的状态可达集建模及验证方法

A modeling and verification method of state reachable set for vehicle following control strategy

*控制与决策*. 2021, 36(7): 1679–1685 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1562>

#### 基于鲁棒优化的云医疗资源配置问题

Robust optimization based medical resource allocation problem in cloud healthcare system

*控制与决策*. 2021, 36(2): 469–474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0455>

#### 航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

#### 结冰飞机的包线保护与控制裕度研究

Envelope protection and control margin of icing aircraft

*控制与决策*. 2021, 36(6): 1415–1424 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1221>

#### 考虑气动效应不确定性的气动辅助变轨制导算法

Aeroassisted orbital transfer robust guidance method considering atmosphere effect uncertainty

*控制与决策*. 2020, 35(11): 2773–2779 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0333>

# 基于面积重叠法的概率盒全局灵敏度计算分析

张保强<sup>†</sup>, 李潇乾, 罗华耿, 颜伟杰, 汤鸿杰

(厦门大学 航空航天学院, 厦门 361000)

**摘要:** 针对随机与认知混合不确定性的概率盒灵敏度分析问题, 提出一种利用概率盒缩减前后重叠面积作为不确定性度量的全局灵敏度分析方法. 混合不确定性在航空航天仿真系统中广泛存在, 概率盒方法用于随机与认知混合不确定性的表征在学术界已被广泛应用. 首先, 介绍传统概率盒灵敏度分析的不确定性缩减法理论, 在此基础上, 进一步考虑概率盒在位置和形状上的偏移量; 然后, 通过计算缩减前后的概率盒面积重叠量来表征各输入不确定性的影响程度, 阐述其实施步骤; 最后, 通过数值算例对所提出方法与传统不确定性缩减方法进行全局灵敏度分析的对比和验证, 并应用于发动机总体性能仿真计算灵敏度排序. 研究表明, 所提出面积重叠方法比传统不确定性缩减法适用范围更广, 计算结果更准确.

**关键词:** 概率盒; 混合不确定性; 全局灵敏度; 不确定性缩减法; 面积重叠法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0376

**引用格式:** 张保强, 李潇乾, 罗华耿, 等. 基于面积重叠法的概率盒全局灵敏度计算分析 [J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 467-473.

## Global sensitivity analysis of probability box based on area overlap method

ZHANG Bao-qiang<sup>†</sup>, LI Xiao-qian, LUO Hua-geng, YAN Wei-jie, TANG Hong-jie

(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361000, China)

**Abstract:** Aiming at the sensitivity analysis of probability box with both aleatory and epistemic uncertainties, a global sensitivity analysis method using the overlap area before-and-after probability box pinching as an uncertainty measure is proposed. Aleatory and epistemic uncertainties are widely existed in aerospace systems and the probability box method has been widely used in quantifying these uncertainties. The theory of an uncertainty reduction method is introduced for traditional probability box sensitivity analysis. Based on this theory, the position and shape of the offset of probability box is further considered. The influence degree of each input uncertainty is characterized by calculating the overlap of probability box area before-and-after reduction. The detailed implementation steps are described. Through numerical examples, the global sensitivity of the proposed method is compared with that of the traditional method. Finally, the proposed method is applied to the sensitivity ranking of an aero engine overall performance simulation. The results show that the proposed method is more applicable than the traditional pinching method, and the results are more accurate.

**Keywords:** probability box; mixed uncertainty; global sensitivity; pinching method; area overlap method

## 0 引言

在航空航天、机械工程、土木工程以及武器装备系统中, 混合不确定性广泛存在<sup>[1]</sup>, 如加工、装配误差或材料的分散型累积会产生随机不确定性; 大型机械制造公差设计中零部件存在偏态分布的正、负公差, 难以采用随机不确定性表征; 此外, 由于知识水平受限, 仿真过程中的物理信息缺失等不可避免地会积累认知不确定性. 因此, 众多不确定性是多源的、混合

的, 目前处理混合不确定性的概率盒表征是学术界和工程界最常用的方式之一<sup>[2]</sup>.

全局灵敏度分析常用来衡量模型的输入不确定性对输出的影响程度, 除此之外还能用以探索输入与输出间的因果关系、降维计算、最大程度地减少输出的不确定性. 灵敏度分析可对不同决策选项、约束条件、假设的预期成果进行量化<sup>[3]</sup>. 全局灵敏度包含输入变量整个分布区域内的平均灵敏度信息, 考虑变量

收稿日期: 2022-03-13; 录用日期: 2022-09-03.

基金项目: 中国航空发动机集团产学研合作项目 (HFZL2020CXY004, HFZL2020CXY009); 国家科技重大专项项目 (2019-I-0006-0006).

责任编辑: 刘宝碇.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: bqzhang@xmu.edu.cn.

间的交互作用对模型输出变量的不确定性影响,比局部灵敏度分析应用更加广泛.传统全局灵敏度分析在概率框架下,有方差分析法、导数法、矩独立法等<sup>[4]</sup>.在非精确概率变量的不确定空间内,Ferson等<sup>[5]</sup>基于不确定性缩减(pinching)法的思想,提出了概率盒全局灵敏度分析框架,通过随机和认知不确定性各自引起概率盒面积的变化,完成随机与认知不确定性的重要性排序;Schöbi等<sup>[6-7]</sup>结合传统的方差分析法发展了概率盒框架下的Sobol'上下限指标;Wei等<sup>[8]</sup>提出了扩展蒙特卡洛方法计算概率盒下的全局灵敏度.在不确定性缩减法的基础上,Alvarez<sup>[9]</sup>拓展了其应用范围;Bi等<sup>[10]</sup>发展了Bhattacharyya距离的灵敏度分析方法;Zhang等<sup>[11]</sup>结合贝叶斯推断和重要性抽样方法对概率盒灵敏度分析方法进行了改进.

本文在传统概率盒灵敏度求解的不确定性缩减法的基础上进行改进,提出一种利用概率盒缩减前后重叠面积作为不确定性度量的全局灵敏度分析方法,可克服传统不确定性缩减法忽略超出原概率盒不确定性偏移量的问题.最后通过数值算例和某航空发动机总体性能指标的灵敏度分析结果验证所提出方法的有效性.

## 1 基于不确定性缩减法的灵敏度计算

### 1.1 概率盒基本理论

在工程分析中一般采用非精确概率解释模型在不确定性描述中缺失、模糊或不完整的数据.由于概率盒提供了非精确概率在数学上的直接描述,且计算效率高<sup>[12]</sup>、易于构造<sup>[13]</sup>,具备直观可视化的特点,在工程环境应用广泛.本质上,概率盒通过所有可能的累积分布函数(cumulative distribution function, CDF)  $F_X(x)$  边界来定义,有

$$\underline{F}_X(x) < F_X(x) < \overline{F}_X(x), \quad (1)$$

其中  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  为随机变量,参数型概率盒里描述CDF具体分布特性参数的  $\theta_i$  包含在区间  $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$  中,边界定义为

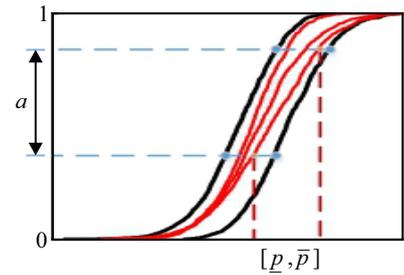
$$\underline{F}_X(x) = \min\{F_X(x, \theta) | \theta \in D_\theta\}, \quad (2)$$

$$\overline{F}_X(x) = \max\{F_X(x, \theta) | \theta \in D_\theta\}. \quad (3)$$

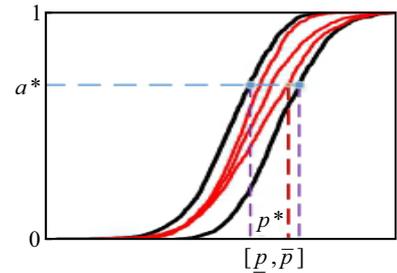
其中:  $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$  区间的笛卡尔积记为  $D_\theta$ ,  $\theta$  为包含所有分布参数的向量.

图1所示的变量混合不确定性空间中,曲线族  $F$  的下界  $\underline{F}_X(x)$  和上界  $\overline{F}_X(x)$  可由分布系数的区间  $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$  确定.图1(a)中:每条CDF曲线在纵轴截断的累积概率范围  $a$ ,对应的变量区间  $[p, \bar{p}]$  只包含随机不确定性信息.如图1(b)所示,由于认知不确定性,CDF

族包含无限个变量值对应于相同的概率值  $a^*$ ,组成变量区间  $[p, \bar{p}]$ .



(a) 给定响应值对应应区间值概率范围



(b) 给定概率值对应应区间值响应范围

图1 概率盒中的随机和认知不确定性表征

### 1.2 不确定性缩减法

由于不确定性信息均体现在概率盒范围中,概率边界的变化也可全面地反映不确定性导致的评估结果偏差.在全局灵敏度分析中,为了评估输入的不确定性减少时计算结果的不确定性降低程度,Ferson等<sup>[5]</sup>提出了通过比较缩减输入不确定性前后,概率盒表征的输出不确定性面积范围的不确定性缩减法,通过量化这种影响来评估输入对整体输出不确定性的贡献,不确定性缩减法的思想以及不确定性缩减度量量的计算过程如下式所示:

$$S = \left(1 - \frac{\text{unc}(T)}{\text{unc}(B)}\right) \times 100\%, \quad (4)$$

$$\text{unc}() = \|\overline{F} - \underline{F}\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{F}(x) - \underline{F}(x)| dx. \quad (5)$$

其中:  $B$  为系统原有不确定性;  $T$  为采用缩减输入计算的不确定性;  $\text{unc}()$  被广泛定义为不同的度量方式,如方差<sup>[6-7]</sup>、概率盒尾部的权重<sup>[14]</sup>、Bhattacharyya距离<sup>[10]</sup>等,使用不同的度量方法在灵敏度分析中适用于解决不同的问题.常用精确概率分布、0方差区间或固定值替换输入变量的混合不确定性信息,分别代表消除输入变量的分布不确定性、随机不确定性和整体可变性.根据以上不确定性缩减法的思想,大量基于概率盒上下边界围成面积度量系统不确定性的灵敏度分析方法在岩土、电力、地下水模型中得到了广泛发展和应用<sup>[15-22]</sup>, Pedroni等<sup>[23]</sup>、胡政文等<sup>[24]</sup>将其应用于NASA挑战问题灵敏度分析.

然而,灵敏度度量若仅由CDF上下界围成的面

积数值差所决定时,则表征的不确定信息是不完整的. 存在混合不确定性情况下,自变量在缩减前后会对输出结果的概率盒产生位置和形状上的不确定性影响,这样的变化反映于概率盒的横坐标为输出不确定范围的偏移量,反映于纵轴为对某一结果取到的概率值范围的变化. 当原有输入不确定性对最终输出随机不确定性影响较大时,概率盒图显示的边界斜率平缓,取到边界值的可能性增加. 缩减该输入不确定性后,概率盒图显示的边界斜率变陡,取到边界值的可能性减小,取到中间值的可能性增加. 因此,当该输入量对输出量的随机不确定性影响足够大时,缩减后取得中间值的概率会大于未缩减时的概率,概率盒图中体现为超出原有概率盒边界,会出现“越界现象”.

图2(a)中:红色边界线为原概率盒的累积分布函数上下界,其围成的面积值为 $A_1$ ;图2(b)中:黑色边界线为缩减某自变量不确定性后的概率盒累积分布函

数上下界,其围成的面积值为 $A_2$ . 由原有不确定性缩减法:  $S = (A_1 - A_2)/A_1 \times 100\%$ ,  $A_1$  与  $A_2$  在数值上的差异性非常小时,计算得到的该自变量的灵敏度值也非常小,表明该输入不确定性对输出结果而言不重要. 若  $A_1 \approx A_2$ ,则在响应空间缩减该指标不确定性后计算得到的灵敏度值约为0,该输入自变量为无关变量. 提取概率盒边界共同绘制如图2(c)所示,结合概率盒的数学意义,从黑色阴影部分到红色阴影部分的变化,体现出该变量对输出不确定性的影响量较大,原概率盒输出范围为 $[-30, 58]$ ,缩减后输出范围为 $[3, 25]$ ,由于该自变量的不确定性影响,输出结果的不确定性范围从22增加至88,其为非常重要的影响量,普遍性体现于:若被缩减自变量的方差对所关心的因变量很重要时,则该输入变量不确定性缩减后引起输出概率盒的整体内缩,会出现“越界现象”. 结合以上论述,图2(c)表明了不确定性缩减法的局限性.

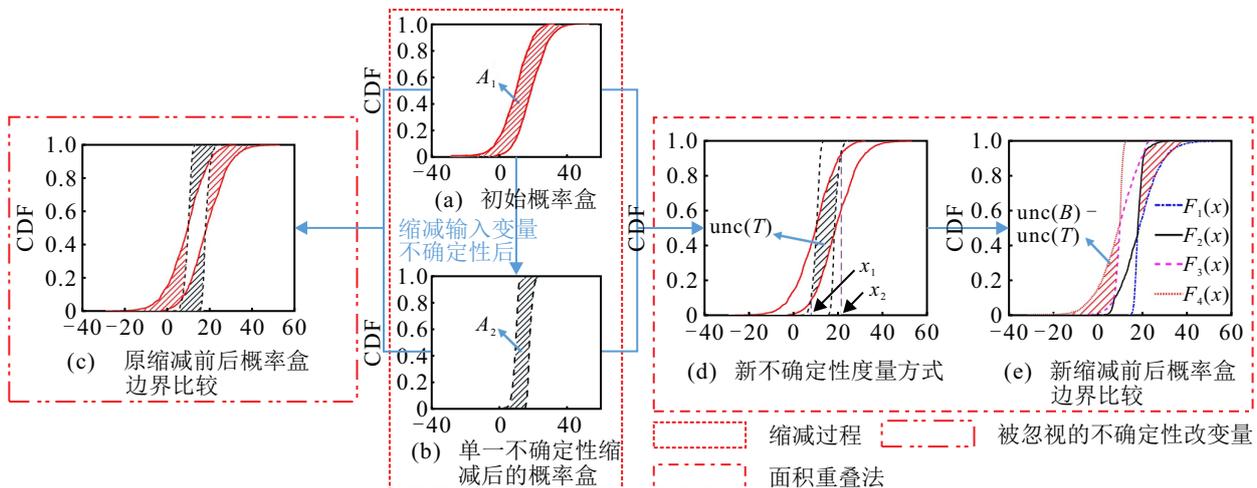


图2 概率盒全局灵敏度分析

## 2 基于面积重叠法的灵敏度方法

仅使用概率盒上下边界线与其围成的面积值并不能表征完整的概率盒不确定性信息,除此之外还有概率盒的整体形状、横坐标上位置的偏移等,且会损失未包络的不确定性信息,因此,提出将缩减前后的概率盒面积重叠部分  $S_{i_{overlap}}$  作为缩减不确定性后的参考度量,如图2(d)阴影部分所示,计算过程如下式所示:

$$unc(T) = S_{i_{overlap}} = \int_{x_1}^{x_2} |F_2(x) - F_3(x)| dx, \quad (6)$$

$$S = \Delta S_{i_{non-overlap}} = \left(1 - \frac{unc(T)}{unc(B)}\right) \times 100\%. \quad (7)$$

其中:  $x_1$  和  $x_2$  分别为在缩减不确定性前后概率盒重叠面积在横坐标始末位置;概率盒4条边界中按横坐标值由大到小重组排列(如图2(e)所示),  $F_1(x)$  与  $F_4(x)$  构成整个概率盒空间的外包络线,  $F_2(x)$  与

$F_3(x)$  围成要求解的重叠部分面积. 该部分不确定性为缩减不确定性前后公共部分不确定性空间,虽然不代表缩减后输出的全部不确定性空间,但是,对比原概率盒不确定性空间,用以体现该自变量不确定性对总的输出不确定性的影响程度,并计算其全局灵敏度指标是合理的. 因为原概率盒内的非重叠部分(如图2(e)所示)均是由于引入该自变量后输出不确定性的改变程度,完全能够体现输入变量不确定对输出结果不确定性影响的重要程度.

作为不确定性缩减法的改进,对于缩减不确定性后概率盒边界未超出原边界的情况,计算  $unc(T)$  将被简化为在边界内积分,计算全部缩减不确定性后的概率盒总面积;而对于缩减不确定性后概率盒超出边界的情况,以原概率盒内的非重叠部分度量输入变量不确定对输出结果不确定性影响的重要程度

(如式(7)所示),在数学图形上的解释为:以原概率盒为基准,缩减该不确定性后,概率盒面积的改变偏移量.实际工程意义为:在系统原有不确定性的基础上,增加该自变量的不确定性后,对系统输出不确定性的影响程度.以考虑全部不确定性的输出概率盒面积为基准,各输入所造成的偏移面积与原有概率盒的面积相比完全可反映该自变量对整体不确定性的贡献程度.从概率盒原理上,改进后的面积重叠法突出概率盒缩减前后在面积和形状上的差异化,并将这些信息量考虑到了计算全局灵敏度的过程中,更加能够保证计算结果的准确性.量化蒙特卡洛抽样误差可保证结果计算精度.随机抽样平均误差与总体标准差成正比,与样本容量成反比.简单随机抽样误差为

$$\mu_{MCS} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (8)$$

其中: $\sigma$ 为总体的标准差, $N$ 为随机抽样次数, $\mu_{MCS}$ 为随机抽样误差.

计算面积重叠法全局灵敏度指标的流程如图3所示.不确定性量化过程采用双层蒙特卡洛抽样传递,外层量化参数的认知不确定性,内层对随机不确定性进行量化,具体执行步骤如下.

step 1: 对外层认知不确定性参数进行  $N$  次抽样,内层随机不确定参数  $M$  次抽样.

step 2: 依次将 step 1 中产生的  $M$  个随机样本绘制为 CDF,重复  $N$  次累积为概率盒的形式表征混合不确定性.

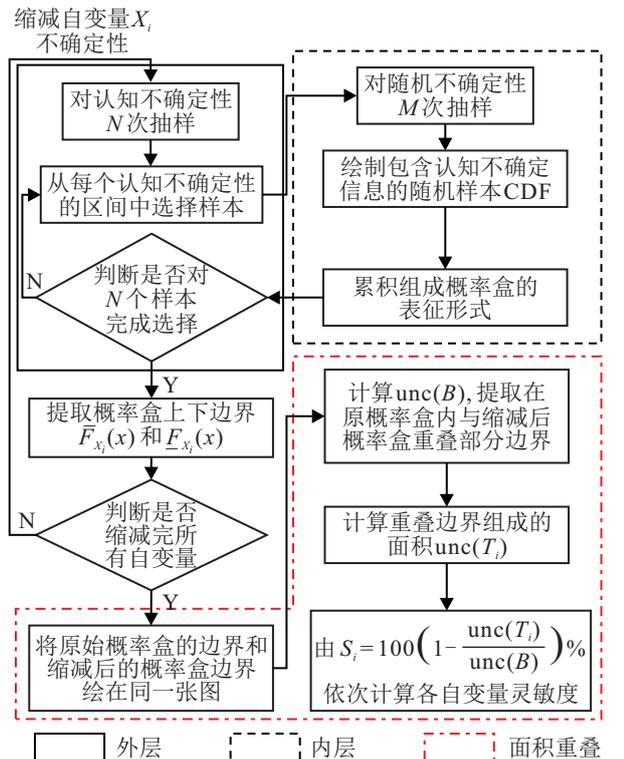


图3 面积重叠法计算流程

step 3: 提取出概率盒上下边界,若未缩减自变量不确定性,则将原概率盒边界记为  $\bar{F}_X(x)$  和  $F_X(x)$ ;若为缩减输入自变量  $X_i$  不确定性后的概率盒边界,则记为  $\bar{F}_{X_i}(x)$  和  $F_{X_i}(x)$ .

step 4: 依次缩减自变量  $X_i$  不确定性,固定其为期望的中值,直至今已缩减完全.

step 5: 提取原概率盒与缩减自变量不确定性后的概率盒上下边界,绘制在同一张概率盒边界图上.

step 6: 计算原概率盒边界围成的面积,提取面积重叠部分边界,计算其围成的面积.

step 7: 由式(7)计算各自变量全局灵敏度指标,并排序确定关键和次要的输入变量.

综上所述,采用基于面积重叠法的全局灵敏度指标,避免了将面积值标量直接作差而忽视输出在横坐标轴偏移量的弊端,而是提取出缩减前后的共同面积部分,将新引入输入变量后的完整不确定性面积新增量作为全局灵敏度度量值,更完整地体现该自变量的不确定性引入前后对整个输出的不确定性改变值,计算结果更加合理.

### 3 算例分析

为了验证所提出方法求解概率盒全局灵敏度的准确性和稳定性,本节选择合适的数值算例,分别通过传统的不确定性缩减法和面积重叠法进行计算求得全局灵敏度指标,分析并表明该方法的计算准确性,并应用于混合不确定性下涡扇发动机总体性能计算的灵敏度排序中.

#### 3.1 数值算例分析

所选6变量算例为  $Y = X_1 - 2X_2 + 1.5X_3 - X_4 + X_5 - X_6$ . 其中:  $X_1 \sim X_6$  对应存在混合不确定性的输入变量,具体不确定性特征如表1所示.随机分布类型均取最常见的正态分布,变异系数均小于16%,不属于大变异性情况,同时分布参数均存在认知不确定性.

表1 参数的不确定性类型和描述

自变量	参数分布类型	分布参数的认知不确定性
$X_1$	正态分布	$\mu_1 \in [1, 2], \sigma_1 \in [0.1, 0.15]$
$X_2$	正态分布	$\mu_2 \in [1, 2], \sigma_2 \in [0.1, 0.15]$
$X_3$	正态分布	$\mu_3 \in [10, 12], \sigma_3 \in [1, 1.2]$
$X_4$	正态分布	$\mu_4 \in [94, 96], \sigma_4 \in [9, 9.6]$
$X_5$	正态分布	$\mu_5 \in [94, 96], \sigma_5 \in [14, 14.5]$
$X_6$	正态分布	$\mu_6 \in [100, 110], \sigma_6 \in [13, 15]$

根据表达式、分布参数及其区间不确定性范围可直观判断出  $X_1 \sim X_6$  的全局灵敏度值依次增加,计算中通过不确定性缩减法内、外层各抽样5000次,由式(8)得到总样本标准差不超过15,最大计算误差为

0.21, 结果显示误差在控制范围内, 并不影响灵敏度排序结果. 计算得到原概率盒面积为 17.805, 采用传统不确定性缩减法与面积缩减法计算得到的各概率盒面积度量、全局灵敏度值和排序结果如表 2 所示, 左侧为采用传统不确定性缩减法计算得到的输入变量全局灵敏度结果, 其中:  $S_{x_3} > S_{x_5}, S_{x_2} > S_{x_4}$ , 这显然是不合理的. 概率盒边界的交叠情况如图 4 所示, 缩减自变量  $X_4, X_5, X_6$  不确定性后的概率盒边界为

黑色虚线, 原概率盒边界为红色实线, 由于缩减这些自变量后的概率盒边界超出原概率盒边界范围较大, 结合第 2 节的论述, 计算这几个变量的全局灵敏度时, 越界部分的不确定性信息被忽略, 导致其全局灵敏度会比真实值偏小, 最终排序结果错误. 表 2 右侧为采用面积重叠法计算得到的各全局灵敏度指标、度量值以及排序. 结果表明与预期结果一致, 准确性高且对于存在“越界现象”的情况, 计算方法同样适用.

表 2 数值算例不确定性缩减法与面积重叠法计算结果比较

自变量	不确定性缩减法			面积重叠法		
	排序等级	缩减后的度量	全局灵敏度/%	排序等级	缩减后的度量	全局灵敏度/%
$X_1$	6	17.78	0.58	6	17.60	1.61
$X_2$	4	16.79	6.13	5	16.78	6.15
$X_3$	2	16.37	8.45	4	16.37	8.49
$X_4$	5	17.18	3.96	3	15.78	11.73
$X_5$	3	16.73	6.48	2	13.08	26.88
$X_6$	1	9.29	48.05	1	8.25	53.84

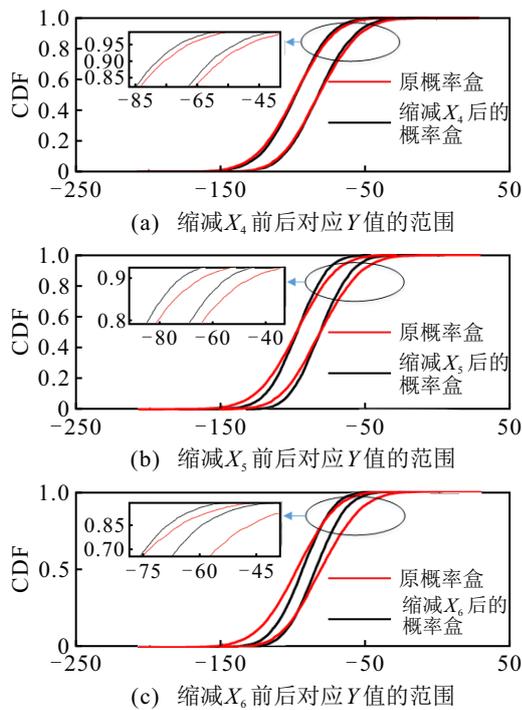


图 4 缩减不确定性后的“越界现象”

为了进一步对比传统不确定性缩减法与面积重叠法的稳健性, 从内、外层各抽样 100~8000 次, 两种方法计算的灵敏度指标如图 5 所示. 结果表明, 随内外层抽样次数不断增加, “越界现象”一直存在, 并非抽样次数过少导致, 图 5(b) 面积重叠法计算得到的全局灵敏度排序比图 5(a) 不确定性缩减法波动范围小、排序结果更加稳定, 可信度更高.

3.2 涡扇发动机性能灵敏度分析

传统发动机初步设计阶段并不会考虑不确定性对最终性能的影响, 但是, 发动机研制过程中由于知

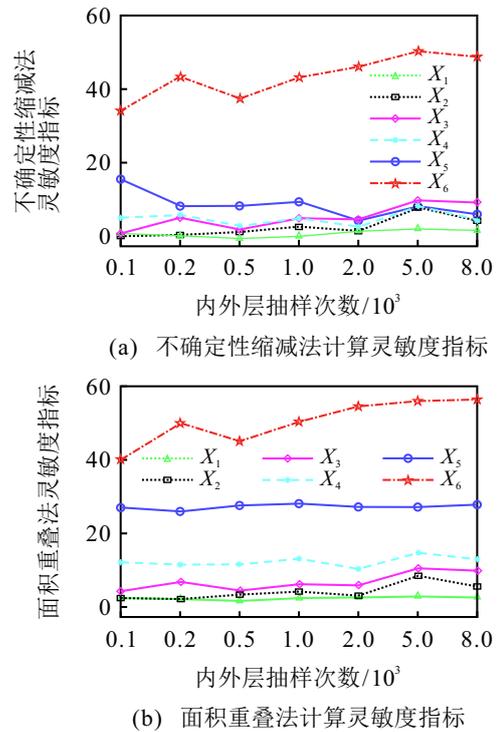


图 5 稳定性比较

识缺乏、加工制造误差和客观条件改变等多种不确定性的存在, 会对发动机正常使用产生影响<sup>[25]</sup>, 于是研究人员发展了概率方法下的发动机总体性能仿真<sup>[26-28]</sup>.

所提出计算模型以某双转子涡扇发动机为例, 设计点为海平面静止条件, 推力为 3.09 kN, 设各部件性能不相关, 利用 NASA 热化学数据根据燃料空气比、温度、压力与焓的关系进行热力学建模和设计点推力的求解<sup>[29]</sup>, 部件性能的不确定性参数如表 3 所示. 为了能够对实验或计算后的均值统计量有直观的认识

识,同时在数值处理上也更为方便,将均值取为定值,这样,根据正态分布 $3\sigma$ 原则,部件性能99.74%概率在区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ,为了避免抽样得到的部件性能参数超过100%,存在认知不确定性的变异系数取[0.1%, 0.3%]. 内外层各200次蒙特卡洛抽样循环30次取平均,得到的传统不确定性缩减法与面积重叠法的计算结果比较如表4所示. 由式(8)得到除最重要的涡轮前温度,其他样本标准差不超过0.02,最大计算误差为0.001,结果显示误差在有效控制范围内.

表3 参数的不确定性类型和描述

自变量	分布参数的认知不确定性
风扇效率	$\mu_1 = 0.85, \sigma_1 \in [0.000\ 85, 0.002\ 6]$
压气机效率	$\mu_2 = 0.89, \sigma_2 \in [0.000\ 89, 0.002\ 7]$
涡轮效率	$\mu_3 = 0.87, \sigma_3 \in [0.000\ 87, 0.002\ 6]$
燃烧室效率	$\mu_4 = 0.98, \sigma_4 \in [0.000\ 98, 0.002\ 9]$
进气道恢复系数	$\mu_5 = 0.97, \sigma_5 \in [0.000\ 97, 0.002\ 9]$
喷管恢复系数	$\mu_6 = 0.97, \sigma_6 \in [0.000\ 97, 0.002\ 9]$
燃烧室恢复系数	$\mu_7 = 0.94, \sigma_7 \in [0.000\ 94, 0.002\ 8]$
低压压气机压比	$\mu_8 = 4.00, \sigma_8 \in [0.004\ 0, 0.012\ 0]$
高压压气机压比	$\mu_9 = 6.00, \sigma_9 \in [0.006\ 0, 0.018\ 0]$
涡轮前温度	$\mu_{10} = 1\ 295\ K, \sigma_{10} \in [1.295, 3.885]$

表4 涡扇发动机算例不确定性缩减法与面积重叠法计算结果比较

自变量	不确定性缩减法			面积重叠法		
	排序等级	缩减后的度量	全局灵敏度/%	排序等级	缩减后的度量	全局灵敏度/%
风扇效率	2	0.024 3	12.19	2	0.022 1	20.29
压气机效率	5	0.026 9	2.74	5	0.025 3	8.64
涡轮效率	6	0.027 5	0.85	7	0.026 5	4.29
燃烧室效率	3	0.025 7	7.29	3	0.023 4	15.43
进气道恢复系数	8	0.027 6	0.19	6	0.026 3	4.89
喷管恢复系数	4	0.026 8	3.17	4	0.025 1	9.21
燃烧室恢复系数	10	0.027 7	0	10	0.027 6	0.34
低压压气机压比	7	0.027 6	0.21	8	0.027 0	2.51
高压压气机压比	9	0.027 6	0.18	9	0.027 0	2.50
涡轮前温度	1	0.023 9	13.59	1	0.021 3	22.81

涡扇发动机算例中缩减不确定性后同样存在“越界现象”,两种计算方法结果的差异性为:1)面积重叠法计算结果显示进气道总压恢复系数对推力的重要性大于涡轮效率,而不确定性缩减法得到的结果相反,根据参考文献[30]可知面积重叠法得到的结果更加准确.2)在经历双层抽样后的面积重叠法有更高的稳定性,复杂问题下可进行更有效的排序.

该方法作为不确定性面积缩减法的改进,既适用于缩减输入变量不确定性后的概率盒不超越原概率盒边界的情况,又适用于方差差异大时,存在“越界现象”下的全局灵敏度计算,因此计算适用范围更广;相比于不确定性面积缩减法不只是缩减前后面积在数值上的相减,而且考虑了位置和形状上的改变程度,能更完整地体现该自变量对系统不确定性的影响程度,计算结果精度高、更准确;最后,通过算例验证了结果的准确性,并应用于发动机总体性能灵敏度计算中.

### 4 结论

1)所提出面积重叠法在计算全局灵敏度时,可区分超出原概率盒边界外的不确定性对系统不确定性的影响,可更全面、合理地反映输入不确定性对所关心量的影响程度.

2)数值算例验证了所提出面积重叠法有更高的准确性和稳定性;该方法应用于航空发动机性能的灵敏度分析时,计算过程更加直观地显示各输入不确

定性的影响,排序结果将为分析和决策提供参考.

3)所提出面积重叠法在一定的样本下可采用Bootstrap抽样计算灵敏度指标的置信区间,但是仍然需要依次缩减每个自变量,在计算上需要调用次数较多,如何进一步改进抽样或结合代理模型方法对于提高计算效率有待进一步研究.

### 参考文献(References)

- [1] Beer M, Ferson S, Kreinovich V. Imprecise probabilities in engineering analyses[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 37(1/2): 4-29.
- [2] Faes M G R, Daub M, Marelli S, et al. Engineering analysis with probability boxes: A review on computational methods[J]. Structural Safety, 2021, 93: 102092.
- [3] Razavi S, Jakeman A, Saltelli A, et al. The future of sensitivity analysis: An essential discipline for systems modeling and policy support[J]. Environmental Modelling & Software, 2021, 137: 104954.
- [4] 肖思男, 吕震宙, 王薇. 不确定性结构全局灵敏度分析方法概述[J]. 中国科学: 物理学力学天文学, 2018, 48(1): 8-25.  
(Xiao S N, Lv Z Z, Wang W. A review of global sensitivity analysis for uncertainty structure[J]. Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica, 2018, 48(1): 8-25.)
- [5] Ferson S, Tucker W T. Sensitivity analysis using probability bounding[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2006, 91(10/11): 1435-1442.
- [6] Schöbi R, Sudret B. Structural reliability analysis for

- p-boxes using multi-level meta-models[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2017, 48: 27-38.
- [7] Schöbi R, Sudret B. Uncertainty propagation of p-boxes using sparse polynomial chaos expansions[J]. Journal of Computational Physics, 2017, 339: 307-327.
- [8] Wei P F, Lu Z Z, Song J W. Extended Monte Carlo simulation for parametric global sensitivity analysis and optimization[J]. AIAA Journal, 2014, 52(4): 867-878.
- [9] Alvarez D A. Reduction of uncertainty using sensitivity analysis methods for infinite random sets of indexable type[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50(5): 750-762.
- [10] Bi S F, Broggi M, Wei P F, et al. The Bhattacharyya distance: Enriching the P-box in stochastic sensitivity analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 129: 265-281.
- [11] Zhang J X, Termaath S, Shields M D. Imprecise global sensitivity analysis using Bayesian multimodel inference and importance sampling[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 148: 107162.
- [12] Hall J W. Uncertainty-based sensitivity indices for imprecise probability distributions[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2006, 91(10/11): 1443-1451.
- [13] Ferson S, Kreinovich V, Grinzburg L, et al. Constructing probability boxes and dempster-shafer structures[R]. Albuquerque: Sandia National Lab, 2015.
- [14] Hettmansperger T, Keenan M A. Tailweight, statistical inference and families of distributions—A brief survey[M]. Dordrecht: Springer, 1975: 161-172.
- [15] Oberguggenberger M. Analysis and computation with hybrid random set stochastic models[J]. Structural Safety, 2015, 52: 233-243.
- [16] Rocchetta R, Patelli E. Imprecise probabilistic framework for power grids risk assessment and sensitivity analysis[J]. Risk, Reliability and Safety, 2016, 830: 2789-2796.
- [17] Aphale O, Tonjes D J. Multimodel validity assessment of groundwater flow simulation models using area metric approach[J]. Ground Water, 2017, 55(2): 219-226.
- [18] Dankwah C O. Investigating an optimal decision point for probability bounds analysis models when used to estimate remedial soil volumes under uncertainty at hazardous waste sites[D]. Minneapolis: Walden University, 2010: 1-132.
- [19] 司怀伟, 王清心, 丁家满. 一种电网规划方案决策的灵敏度分析算法[J]. 现代电子技术, 2016(7): 149-153. (Si H W, Wang Q X, Ding J M. A sensitivity analysis algorithm for decision-making of power grid planning scheme[J]. Modern Electronics Technique, 2016(7): 149-153.)
- [20] Xiang Y Y, Pan B S, Luo L P. A sensitivity analysis method to evaluate the impacts of random and interval variables on the probability box[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 93: 538-562.
- [21] Feng G. Sensitivity analysis for systems under epistemic uncertainty with probability bounds analysis[J]. International Journal of Computer Applications, 2018, 179: 1-6.
- [22] 张保强, 苏国强, 展铭, 等. 概率盒框架下多响应模型确认度量方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(12): 2642-2648. (Zhang B Q, Su G Q, Zhan M, et al. Model validation metrics with multiple correlated responses under the frame of probability box[J]. Control and Decision, 2019, 34(12): 2642-2648.)
- [23] Pedroni N, Zio E. Hybrid uncertainty and sensitivity analysis of the model of a twin-jet aircraft[J]. Journal of Aerospace Information Systems, 2015, 12(1): 73-96.
- [24] 胡政文, 张保强, 邓振鸿. 概率盒全局灵敏度和活跃子空间跨层降维[J]. 航空学报, 2021, 42(9): 224582. (Hu Z W, Zhang B Q, Deng Z H. Cross-layer dimension reduction based on probability box global sensitivity analysis and active subspace method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(9): 224582.)
- [25] Kurz R, Brun K. Degradation in gas turbine systems[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2001, 123(1): 70-77.
- [26] Mavris D N, Macsotai N I, Roth B. A probabilistic design methodology for commercial aircraft engine cycle selection[C]. SAE Technical Paper Series. Warrendale, 1998: 1432-1441.
- [27] Tong M T. Aprobabilistic approach to aero propulsion system assessment[C]. Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air. Cleveland, 2000, 78545: V001T01A001.
- [28] Chen M, Zhang K, Tang H L. A probabilistic design methodology for a turboshaft engine overall performance analysis[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2014, 6: 976853.
- [29] Mattingly J D. Aircraft engine design[M]. Reston: AIAA, 2002: 1-648.
- [30] 朱之丽, 陈敏, 唐海龙. 航空燃气涡轮发动机工作原理及性能[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2014: 1-321. (Zhu Z L, Chen M, Tang H L. Working principle and performance of aircraft gas turbine engines[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2014: 1-321.)

## 作者简介

张保强(1981—), 男, 副教授, 博士, 从事不确定性量化、V&V等研究, E-mail: bqzhang@xmu.edu.cn;

李潇乾(1997—), 男, 硕士生, 从事不确定性量化、灵敏度分析等研究, E-mail: xq\_li\_xmu@163.com;

罗华耿(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事振动和噪声分析、信号处理等研究, E-mail: luoh@xmu.edu.cn;

颜伟杰(1994—), 男, 硕士生, 从事信号处理分析的研究, E-mail: 960984197@qq.com;

汤鸿杰(1997—), 男, 硕士生, 从事不确定性量化的研究, E-mail: t\_hongjie@126.com.