

控制与决策

Control and Decision

抗干扰的多智能体系统固定时间分布式优化算法

耿超, 武永宝, 孙佳, 刘剑, 薛磊

引用本文:

耿超,武永宝,孙佳,刘剑,薛磊. 抗干扰的多智能体系统固定时间分布式优化算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(2): 527–535.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0626>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

控制与决策. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid

控制与决策. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计

Distributed moving horizon estimation for stochastic uncertain system with packet dropouts and quantized measurements

控制与决策. 2021, 36(7): 1771–1778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1603>

抗干扰的多智能体系统固定时间分布式优化算法

耿超¹, 武永宝², 孙佳^{2†}, 刘剑², 薛磊²

(1. 东南大学苏州联合研究生院, 江苏苏州 215123; 2. 东南大学自动化学院, 南京 210096)

摘要: 针对一阶多智能体系统提出一种抗干扰的分布式控制算法, 在固定时间内解决具有状态约束和外部扰动存在情况下的多智能体系统凸优化问题. 该算法分为两部分: 第 1 部分使得每个智能体在任意初始条件下都能在固定时间内收敛到一致; 第 2 部分在满足状态约束条件的同时, 使所有局部目标函数的总和在固定时间内取得最小值. 该算法能够在外部有界扰动存在的情况下抑制干扰信号, 获得最优解, 且收敛时间不受初始状态和外部扰动的影响, 可以根据任务需求离线地预分配任务建立时间. 利用凸优化和固定时间李雅普诺夫稳定性理论证明算法在有界扰动存在时的固定时间收敛性, 最后通过智能电网中经济调度问题的实例验证算法的有效性和优越性.

关键词: 固定时间收敛; 分布式控制; 多智能体系统; 抗干扰; 状态约束; 凸优化

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0626

引用格式: 耿超, 武永宝, 孙佳, 等. 抗干扰的多智能体系统固定时间分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 527-535.

Fixed-time distributed optimization algorithm for multi-agent systems with disturbance resistance

GENG Chao¹, WU Yong-bao², SUN Jia^{2†}, LIU Jian², XUE Lei²

(1. Southeast University-Monash University Joint Graduate School, Southeast University, Suzhou 215123, China; 2. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: This paper presents an anti-interference distributed algorithm, which can solve the convex optimization problem of first-order multi-agent systems with the state constraint and external bounded disturbance in a fixed-time. The designed algorithm is divided into two parts. The first part makes every agent converge to consensus in a fixed-time under any initial conditions. The second part minimizes the sum of all local objective functions in a fixed-time while satisfying the constraint condition. This algorithm can restrain the bounded interference signal and finally obtain the optimal solution. The setup time can be pre-allocated off-line according to task needs, regardless of the initial states of the agents and in the presence of bounded disturbances. By means of the convex optimization and fixed-time Lyapunov theory, the convergence of the algorithm in a fixed-time is proved when the bounded disturbance exists. Finally, the effectiveness and superiority of the algorithm is verified by an example of economic dispatch in smart grid.

Keywords: fixed-time convergence; distributed control; multi-agent systems; disturbance resistance; state constraint; convex optimization

0 引言

近年来, 学术界在多智能体系统的分布式控制领域取得了许多显著的研究成果, 例如传感器网络中的分布式参数估计^[1]和航空飞行器领域的编队控制^[2]等. 多智能体系统的分布式优化是多智能体系统协同控制的一个发展方向, 其具有广泛的实际应用, 如

智能电网中的功率分配^[3]、传感器网络中的资源融合^[4]、机器学习中的分布式训练^[5]等. 因此, 多智能体系统的分布式优化成为分布式控制研究的重点. 分布式优化是指通过多智能体之间的协调与合作高效地实现优化任务, 具体而言, 在多智能体系统中, 每个智能体都有一个不与其他智能体共享的局部成本函

收稿日期: 2022-04-16; 录用日期: 2022-10-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62273094, 62103100); 江苏省自然科学基金项目(BK20202006); 安徽省重点研究与开发计划项目(2022i01020013); 中央高校基本科研基金东南大学“至善”人才基金项目(2242021R40010).

责任编辑: 夏元清.

†通讯作者. E-mail: jiasun@seu.edu.cn.

数,通过设计合适的分布式协同控制器,实现最小化所有局部目标函数之和的目标^[6-7].

在多智能体系统分布式优化的研究中,一些学者提出了基于次梯度^[8]的离散时间算法来求解无约束的分布式优化问题,对于有约束的分布式优化问题,则采用牛顿法^[9]或投影算子法^[10-11]求解.文献[12-13]针对有向拓扑结构设计了快速收敛算法以获得全局目标函数的最小值.文献[14]研究了非凸目标函数在有向图上的最小化问题.当人们发现离散时间算法可能导致抖振现象的出现,一些学者开始设计连续时间算法来解决分布式优化问题,如文献[15]提出的基于扰动观测器的自抗扰分布式无约束优化算法,文献[16]利用拉格朗日乘数法提出的分布式优化算法以求解有约束的优化问题.文献[17]设计了逆向和正向工程框架实现了有约束分布式优化的渐近稳定.然而,上述离散时间和连续时间算法的研究结果在有限时间内只能得到次优解,为了在有限时间内获得分布式优化问题的最优解,减少整个系统的计算和通信开销,研究人员开始设计多智能体系统的有限时间收敛算法^[6].随着有限时间相关理论研究的深入,许多复杂的工程问题得以在有限时间内解决,如时滞耦合系统有限时间同步^[18]、有限时间一致性优化^[19].在有限时间分布式优化问题的研究中,文献[20]利用惩罚因子加速分布式一致性优化算法的收敛,在有限时间内解决了有约束的分布式凸优化问题.一些学者受有限时间分布式一致性算法如增量代价一致性算法^[21-22]的启发,利用拉格朗日乘子设计了分布式优化算法解决多智能体系统的分布式凸优化问题^[3].这些算法虽然可以在有限时间内解决分布式优化问题,但由于初始条件的影响,系统的收敛时间难以预测,不适用于为初始条件未知的多智能体系统预分配任务建立时间.之后,Polyakov^[23]引入了固定时间稳定性的概念,期望系统总能在固定时间内收敛到稳定状态.对于多智能体系统的固定时间分布式协同控制如一致性问题,已有一些杰出的研究成果,如基于事件触发方式的固定时间一致^[24-26]、针对随机多智能体系统实现的固定时间一致^[27]、固定时间下的二次协同控制一致^[28].考虑到实际应用中存在的外部干扰,文献[29-30]针对二阶多智能体系统设计抗扰动的固定时间一致性算法.但是目前为止,在多智能体系统固定时间优化方面的研究成果很少.对于一阶多智能体系统,文献[31]提出了一种求解具有等式约束的分布式固定时间优化算法,但是要应用到智能体及其两跳邻居(即邻居的邻居)的信息,大大提高了通信成本,同时对初始条件的选取有严格

要求.为节约通信资源,文献[32]在有向拓扑结构的基础上提出了固定时间优化算法,用事件触发的方式减小通信成本,但仍然用到智能体及其两跳邻居的信息以及要求严格的初始条件.文献[33]提出的分段分布式固定时间优化算法仅适用于无约束优化问题.文献[34]的最新研究成果相对完善,但提出的固定时间优化算法没有考虑实际情况下可能存在的扰动影响.因此,设计一种节约通信成本的、不受初始条件影响的、满足实际条件约束的、抗扰动的固定时间分布式优化算法具有重要的现实意义.

本文针对一阶多智能体系统提出一种抗扰动的固定时间优化算法,能够解决一阶多智能体系统有约束的分布式凸优化问题.主要贡献概括为以下4点:

1)与文献[31-32]相比,所提出的分布式控制协议仅使用智能体邻居局部成本函数的梯度信息,大大减少了通信资源的消耗.此外,消除对智能体初始状态的限制,使得系统在任何初始条件下,都能在预设时间内收敛到最优解,提高算法的实用性.

2)与文献[33]解决的无约束分布式一致性问题不同,额外考虑状态约束条件,解决具有等式约束的分布式优化问题.

3)与文献[34]相比,在处理智能体初始条件时仅使用智能体自身的状态信息,且不需要智能体间的相互通信,避免积分器的使用,使得算法结构更加简单.

4)与现有研究成果[31-34]相比,额外考虑外部扰动对系统动态特性的影响,并且将多智能体系统建模为一阶多智能体系统.所提出算法可以抑制输入信号中的干扰,使得任务建立时间不受外界扰动的影响,能够根据任务需求准确地预分配任务建立时间,在固定时间内完成任务.

符号说明: R 为实数集, R^+ 为正实数集, R^m 为 m 维实数向量空间, $\mathbf{1}_N$ 为 $N \times 1$ 维单位向量, $\mathbf{0}_N$ 为所有元素均为0的 N 维列向量, I_N 为 $N \times N$ 维单位矩阵, $\|\cdot\|$ 为Euclidean范数.

1 问题描述和预备知识

1.1 问题描述

考虑由 N 个智能体组成的多智能体系统,其动态特性可以描述为

$$\dot{x}_i = u_i + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中 x_i 、 u_i 、 f_i 分别为智能体 i 的状态、控制协议和外部扰动.

假设智能体 i 的局部目标函数为 $C_i(x_i)$,本文的研究目标为:在扰动存在的情况下,通过设计一种分布式控制协议,使多智能体系统在固定时间内最小化

所有局部目标函数之和,同时满足状态约束条件,即

$$\begin{aligned} \min C(x) &= \sum_{i=1}^N C_i(x_i); \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^N x_i &= D. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, $C(x)$ 为全局目标函数, D 为全局约束常量.

假设1 外部扰动 f_i 是有界的,其上界为已知常数 F , 满足 $|f_i| \leq F$.

假设2 $C(x)$ 是二次可微的强凸函数,即存在一个正常数 γ 满足 $\gamma I_N \leq \nabla^2 C(x)$.

注1 在实际应用场景中有许多函数满足假设2,如路径规划中的欧氏距离函数^[35]、在智能电网经济调度问题中发电机发电的经济成本可以近似成二次函数的形式^[36]、机器学习的分布式训练中具有二次项的损失函数^[5]等.

1.2 图论

设 N 个智能体的通信拓扑结构可以用一个加权无向图 $G = (V, E, A)$ 表示. 其中: $V = 1, 2, \dots, N$ 为节点集,表示 N 个智能体;边集 $E \subseteq V \times V$ 表示智能体间的通信,无向边 $(i, j) \in E$ 表示智能体 i 与智能体 j 可以互相通信;加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$ 是一个 $N \times N$ 维的矩阵,如果 $(i, j) \in E$, 则其元素 $a_{ij} = a_{ji} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 设 $N_i = \{j | (i, j) \in E\}$ 表示能够与 i 节点通信的邻节点集合. 智能体 i 与 j 之间的无向路径是边集构成的序列,其形式为 $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$. 如果在图 G 中存在任意一条无向路径,则图 G 被视为连通图. 设度矩阵 $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_N]$, 其中 $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$. 拉普拉斯矩阵 $L = D - A = [l_{ij}] \in R^{N \times N}$, 则 $\mathbf{1}_N^T L = \mathbf{0}_N^T$, $L \mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$. 设拉普拉斯矩阵 L 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, 且满足 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. 对于任意的 N 维列向量 X , 如果 $X^T \mathbf{1}_N = 0$, 则 $X^T L X \geq \lambda_2 X^T X$.

假设3 多智能体间的通信拓扑结构是无向且连通的.

1.3 引理

引理1^[37] 设 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N \geq 0$, 有

$$\sum_{i=1}^N \zeta_i^p \geq \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \right)^p, & 0 < p \leq 1; \\ N^{1-p} \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \right)^p, & p \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

引理2^[38] 对于凸函数 $f(x)$, 其梯度为 $\nabla f(x)$. 如果 $f(x)$ 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x)$ 是半正定的, 则对于

凸集上任意两点 x 和 x_0 , 根据多元函数在 x_0 处的一阶带拉格朗日余项的泰勒展开式, 有

$$f(x) = f(x_0) + \nabla^T f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(\hat{x})(x - x_0), \quad (5)$$

其中 \hat{x} 为 x 与 x_0 连线上的点.

引理3^[23] 考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0. \quad (6)$$

其中: $x(t) \in R^m$, $f: R^m \rightarrow R^m$ 是非线性连续函数. 假设原点是系统(6)的平衡点.

如果存在一个连续径向无界函数 $V: R^m \rightarrow R^+ \cup \{0\}$, 满足: 1) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) 对于系统(6)的任意解 $x(t)$, 均满足不等式 $\dot{V}(x(t)) \leq -(\alpha V^p(x(t)) + \beta V^q(x(t)))^k$, 其中 $\alpha, \beta, p, q, k > 0$ 且 $pk < 1, qk > 1$. 则系统(6)的原点是全局固定时间稳定平衡点, 其收敛时间满足

$$T(x_0) \leq \frac{1}{\alpha^k(1-pk)} + \frac{1}{\beta^k(qk-1)}, \forall x_0 \in R^m. \quad (7)$$

2 算法设计

受文献[30-31, 34]的启发,为了解决凸优化问题(2),提出如下抗干扰的多智能体系统固定时间分布式优化算法:

$$u_i = \dot{x}_i^* - y_1 \text{sig}(e_i)^\mu - y_2 \text{sig}(e_i)^\nu - F \text{sign}(e_i). \quad (8a)$$

$$\dot{x}_i^* = \begin{cases} -z_1 \text{sig}(x_i - \bar{x})^{\eta_1} - z_2 \text{sig}(x_i - \bar{x})^{\theta_1}, & t \leq T; \\ -z_3 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\eta_2} - z_4 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\theta_2}, & t > T. \end{cases} \quad (8b)$$

$$h_i = \frac{\partial C_i(x_i)}{\partial x_i}. \quad (8c)$$

$$e_i = x_i - x_i^*. \quad (8d)$$

其中: x_i^* 为虚拟状态, e_i 为实际状态与虚拟状态的误差, $\bar{x} = D/N$, $z_1, z_2, z_3, z_4, y_1, y_2$ 为正常数, $0 < \eta_1 < 1, 0 < \eta_2 < 1, 0 < \mu < 1, \theta_1 > 1, \theta_2 > 1, \nu > 1$. $\text{sig}(x)^k = \text{sign}(x)|x|^k$, 其中 $k > 0, x \in R, T = \frac{2^{\frac{1-\mu}{2}}}{y_1(1-\mu)} + \frac{2^{\frac{1-\eta_1}{2}}}{z_1(1-\eta_1)} + \frac{2^{\frac{1-\theta_1}{2}}}{z_2(\theta_1-1)} + \frac{2^{\frac{1-\nu}{2}}}{N^{\frac{1-\nu}{2}} y_2(\nu-1)}$.

注2 算法(8a)中的 $-y_1 \text{sig}(e_i)^\mu - y_2 \text{sig}(e_i)^\nu - F \text{sign}(e_i)$ 用来抵消外部扰动的影响. 当外部扰动在固定时间抵消后,系统的实际状态和虚拟状态相等, x_i^* 相当于扰动不存在时系统的实际控制律.

注3 算法(8b)中固定时间 T 的设计将 \dot{x}_i^* 分为两个阶段: 第1阶段,在任意初始条件下, \dot{x}_i^* 使每个智能体在固定时间 T 内均收敛到系统总约束的均值,从

而使多智能体系统的状态之和满足全局等式约束;第2阶段则保证多智能体系统在满足等式约束的条件下收敛到全局最优解。

3 主要结论

针对所提出算法,可以得出以下结论。

定理1 令假设1成立,外部扰动在固定时间内被消除,系统的实际状态等于虚拟状态。

证明 构造Lyapunov函数 $V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^2$,对 V_1 求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^N e_i(u_i + f_i - \dot{x}_i^*) = \\ &= \sum_{i=1}^N (e_i f_i - |e_i|F - y_1 e_i \text{sig}(e_i)^\mu - y_2 e_i \text{sig}(e_i)^\nu) = \\ &= \sum_{i=1}^N (e_i f_i - |e_i|F - y_1 |e_i|^{\mu+1} - y_2 |e_i|^{\nu+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

根据假设1可知 $|f_i| \leq F$,将式(3)和(4)代入(9),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \sum_{i=1}^N (-y_1 |e_i|^{\mu+1} - y_2 |e_i|^{\nu+1}) = \\ &= -y_1 \sum_{i=1}^N (e_i^2)^{\frac{\mu+1}{2}} - y_2 \sum_{i=1}^N (e_i^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \leq \\ &= -y_1 \left(\sum_{i=1}^N e_i^2 \right)^{\frac{\mu+1}{2}} - y_2 N^{1-\frac{\nu+1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N e_i^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}} = \\ &= -2^{\frac{\mu+1}{2}} y_1 V_1^{\frac{\mu+1}{2}} - 2^{\frac{\nu+1}{2}} N^{\frac{1-\nu}{2}} y_2 V_1^{\frac{\nu+1}{2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

根据引理3,当 $k=1$ 时, $\alpha = \alpha_1 = 2^{\frac{\mu+1}{2}} y_1$, $\beta = \beta_1 = 2^{\frac{\nu+1}{2}} N^{\frac{1-\nu}{2}} y_2$, $p = p_1 = \frac{\mu+1}{2}$, $q = q_1 = \frac{\nu+1}{2}$ 且满足 $0 < p \leq 1, q > 1, V_1 = 0 \Leftrightarrow e_i = 0 \Leftrightarrow x_i - x_i^* = 0$. 根据引理3,在算法(8)中定义的虚拟状态 x_i^* 是方程(1)的平衡点,收敛时间 T_1 满足 $T_1 \leq \frac{1}{\alpha_1(1-p_1)} + \frac{1}{\beta_1(q_1-1)}$. 此时由式(8d)可知当 $t \geq T_1$ 时, $e_i = 0, x_i = x_i^*$. \square

定理2 令假设1~假设3成立, x_i 在固定时间内收敛到最优状态,在满足全局状态约束条件的同时使全局目标函数 $C(x)$ 取得最小值。

证明 当 $t > T_1$ 时, $x_i = x_i^*$, 则 $\dot{x}_i = \dot{x}_i^*$. 由式(8b)可知,当 $T_1 < t \leq T_1 + T_2 = T$ 时,有

$$\dot{x}_i = -z_1 \text{sig}(x_i - \bar{x})^{\eta_1} - z_2 \text{sig}(x_i - \bar{x})^{\theta_1}. \quad (11)$$

构造Lyapunov函数 $V_2 = \frac{1}{2}(x_i - \bar{x})^2$,对 V_2 求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= (x_i - \bar{x})\dot{x}_i = \\ &= -z_1 |x_i - \bar{x}|^{\eta_1+1} - z_2 |x_i - \bar{x}|^{\theta_1+1} = \\ &= -z_1 (x_i - \bar{x})^{2(\frac{\eta_1+1}{2})} - z_2 (x_i - \bar{x})^{2(\frac{\theta_1+1}{2})} = \end{aligned}$$

$$-2^{\frac{\eta_1+1}{2}} z_1 V_2^{\frac{\eta_1+1}{2}} - 2^{\frac{\theta_1+1}{2}} z_2 V_2^{\frac{\theta_1+1}{2}}. \quad (12)$$

根据引理3,当 $k=1$ 时, $\alpha = \alpha_2 = 2^{\frac{\eta_1+1}{2}} z_1$, $\beta = \beta_2 = 2^{\frac{\theta_1+1}{2}} z_2$, $p = p_2 = \frac{\eta_1+1}{2}$, $q = q_2 = \frac{\theta_1+1}{2}$ 且满足 $0 < p \leq 1, q > 1, V_2 = 0 \Leftrightarrow x_i - \bar{x} = 0$. 根据引理3可知, \bar{x} 是方程(1)的平衡点,收敛时间 T_2 满足 $T_2 \leq \frac{1}{\alpha_2(1-p_2)} + \frac{1}{\beta_2(q_2-1)}$, 则当 $t = T_1 + T_2$ 时 $x_i = \bar{x}$.

当 $t > T_1 + T_2 = T$ 时, $\dot{x}_i = \dot{x}_i^*$, 由式(8b)可知

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -z_3 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\eta_2} - \\ &= z_4 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\theta_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

设 T 时刻 x_i 的状态为 $x_i(T)$, $t(t \geq T)$ 时刻对 \dot{x}_i 积分并求和,有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N \left(x_i(T) + \int_T^t \dot{x}_i dt \right) = \\ &= D + \int_T^t \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-z_3 a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\eta_2} - \\ &= z_4 a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\theta_2}) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

设

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-z_3 a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\eta_2} - \\ &= z_4 a_{ij} \text{sig}(h_i - h_j)^{\theta_2}). \end{aligned} \quad (15)$$

将 M 中的 i, j 角标互换,有

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (z_3 a_{ji} \text{sig}(h_i - h_j)^{\eta_2} + \\ &= z_4 a_{ji} \text{sig}(h_i - h_j)^{\theta_2}). \end{aligned} \quad (16)$$

由式(15)和(16)可得 $M = 0$, 故由式(14)有 $\sum_{i=1}^N x_i = D$ 成立,满足全局约束条件。

设 $x_* = [x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_{N*}]^T$ 是 $C(x)$ 的最优解,根据引理2中的式(5),有

$$\begin{aligned} C(x) &= C(x_*) + \nabla^T C(x_*)(x - x_*) + \\ &= \frac{1}{2}(x - x_*)^T \nabla^2 C(\bar{x}_1)(x - x_*). \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $\bar{x}_1 = x_* + \sigma_1(x_* - x)$, $\sigma_1 \in (0, 1)$. 且有

$$\begin{aligned} C(x_*) &= C(x) + \nabla^T C(x)(x_* - x) + \\ &= \frac{1}{2}(x_* - x)^T \nabla^2 C(\bar{x}_2)(x_* - x). \end{aligned} \quad (18)$$

其中: $\bar{x}_2 = x_* + \sigma_2(x_* - x)$, $\sigma_2 \in (0, 1)$.

因为 x_* 是 $C(x)$ 的最优解, $\nabla^T C(x_*) = 0$, 所以根据假设2和式(17)有

$$C(x) - C(x_*) = \frac{1}{2}(x - x_*)^T \nabla^2 C(\bar{x}_1)(x - x_*) \geq$$

$$\frac{1}{2}\gamma\|x - x_*\|^2. \quad (19)$$

设 $H = \nabla^T C(x) - \frac{\mathbf{1}_N^T \nabla C(x) \mathbf{1}_N^T}{N} = h^T - \frac{\mathbf{1}_N^T h \mathbf{1}_N^T}{N}$, 其中 $\nabla C(x) = h = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$. 注意到, 当 $t \geq T_1 + T_2$ 时, $\sum_{i=1}^N x_{i*} = \mathbf{1}_N^T x_* = \sum_{i=1}^N x_i = \mathbf{1}_N^T x$, 则 $\frac{\mathbf{1}_N^T h \mathbf{1}_N^T}{N}(x_* - x) = \frac{\mathbf{1}_N^T h}{N} \mathbf{1}_N^T (x_* - x) = 0$. 又根据假设2, 因为 $\frac{1}{2}(x_* - x)^T \nabla^2 C(x_*) (x_* - x) > 0$, 所以式(18)可改写为

$$C(x) - C(x_*) \leq \nabla^T C(x)(x - x_*) \leq \|H\| \cdot \|x - x_*\|. \quad (20)$$

由式(19)和(20)可得

$$\frac{1}{2}\gamma(C(x) - C(x_*)) \leq \|H\|^2. \quad (21)$$

构造 Lyapunov 函数 $V_3 = \frac{1}{2}(C(x) - C(x_*))^2$, 对 V_3 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= (C(x) - C(x_*)) \nabla^T C(x) \dot{x} = \\ &= (C(x) - C(x_*)) \sum_{i=1}^N h_i \dot{x}_i. \end{aligned} \quad (22)$$

因为 $h_i = \frac{1}{2}(h_i - h_j) + \frac{1}{2}(h_i + h_j)$, 所以有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N h_i \dot{x}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(-\frac{1}{2} z_3 a_{ij} |h_i - h_j|^{\eta_2+1} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} z_4 a_{ij} |h_i - h_j|^{\theta_2+1} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} z_3 a_{ij} (h_i + h_j) \text{sig}(h_i - h_j)^{\eta_2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} z_4 a_{ij} (h_i + h_j) \text{sig}(h_i - h_j)^{\theta_2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

与式(14)~(16)推导类似, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(-\frac{1}{2} z_3 a_{ij} (h_i + h_j) \text{sig}(h_i - h_j)^{\eta_2} - \right. \\ \left. \frac{1}{2} z_4 a_{ij} (h_i + h_j) \text{sig}(h_i - h_j)^{\theta_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N h_i \dot{x}_i &= -\frac{1}{2} z_3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} |h_i - h_j|^{\eta_2+1} - \\ &\quad \frac{1}{2} z_4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} |h_i - h_j|^{\theta_2+1} = \\ &\quad -\frac{1}{2} z_3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{ij}^{\frac{2}{\eta_2+1}} (h_i - h_j)^2)^{\frac{\eta_2+1}{2}} - \\ &\quad \frac{1}{2} z_4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{ij}^{\frac{2}{\theta_2+1}} (h_i - h_j)^2)^{\frac{\theta_2+1}{2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

设邻接矩阵 $A_1 = [a_{ij}^{\frac{2}{\eta_2+1}}]$ 的图为 G_1 , 其拉普拉斯矩阵 L_1 的最小非零特征值为 $\lambda_2(L_1)$, 邻接矩阵 $A_2 = [a_{ij}^{\frac{2}{\theta_2+1}}]$ 的图为 G_2 , 其拉普拉斯矩阵 L_2 的最小非零特征值为 $\lambda_2(L_2)$. 根据引理1中的式(3)和(4)可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N h_i \dot{x}_i &\leq -\frac{1}{2} z_3 \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{2}{\eta_2+1}} (h_i - h_j)^2 \right)^{\frac{\eta_2+1}{2}} - \\ &\quad \frac{1}{2} N^{1-\theta_2} z_4 \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\frac{2}{\theta_2+1}} (h_i - h_j)^2 \right)^{\frac{\theta_2+1}{2}} = \\ &\quad -2^{\frac{\eta_2-1}{2}} z_3 (h^T L_1 h)^{\frac{\eta_2+1}{2}} - \\ &\quad 2^{\frac{\theta_2-1}{2}} N^{1-\theta_2} z_4 (h^T L_2 h)^{\frac{\theta_2+1}{2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $h = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$. 注意到 $H \mathbf{1}_N = \left(h^T - \frac{\mathbf{1}_N^T h \mathbf{1}_N^T}{N} \right) \mathbf{1}_N = h^T \mathbf{1}_N - \mathbf{1}_N^T h = 0$, 且由于 $\mathbf{1}_N^T L = 0, L \mathbf{1}_N = 0$, 有

$$\begin{aligned} H L_1 H^T &= h^T L_1 h - \frac{\mathbf{1}_N^T h \mathbf{1}_N^T}{N} L_1 h - h^T L_1 \left(\frac{\mathbf{1}_N^T h \mathbf{1}_N^T}{N} \right)^T + \\ &\quad \frac{\mathbf{1}_N^T h \mathbf{1}_N^T}{N} L_1 \left(\frac{\mathbf{1}_N^T h \mathbf{1}_N^T}{N} \right)^T = h^T L_1 h. \end{aligned}$$

同理 $H L_2 H^T = h^T L_2 h$, 则式(25)有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N h_i \dot{x}_i &\leq -2^{\frac{\eta_2-1}{2}} z_3 (H L_1 H^T)^{\frac{\eta_2+1}{2}} - \\ &\quad 2^{\frac{\theta_2-1}{2}} N^{1-\theta_2} z_4 (H L_2 H^T)^{\frac{\theta_2+1}{2}} \leq \\ &\quad -2^{\frac{\eta_2-1}{2}} z_3 \lambda_2(L_1) \|H\|^{2(\frac{\eta_2+1}{2})} - \\ &\quad 2^{\frac{\theta_2-1}{2}} N^{1-\theta_2} z_4 \lambda_2(L_2) \|H\|^{2(\frac{\theta_2+1}{2})}. \end{aligned} \quad (26)$$

由式(21)、(26)可知

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq \\ &\quad -\frac{1}{2} z_3 (\lambda_2(L_1) \gamma)^{\frac{\eta_2+1}{2}} (C(x) - C(x_*))^{\frac{\eta_2+3}{2}} - \\ &\quad \frac{1}{2} N^{1-\theta_2} z_4 (\lambda_2(L_2) \gamma)^{\frac{\theta_2+1}{2}} (C(x) - C(x_*))^{\frac{\theta_2+3}{2}} = \\ &\quad -2^{\frac{\eta_2-1}{4}} z_3 (\lambda_2(L_1) \gamma)^{\frac{\eta_2+1}{2}} V_3^{\frac{\eta_2+3}{4}} - \\ &\quad 2^{\frac{\theta_2-1}{4}} N^{1-\theta_2} z_4 (\lambda_2(L_2) \gamma)^{\frac{\theta_2+1}{2}} V_3^{\frac{\theta_2+3}{4}}. \end{aligned} \quad (27)$$

根据引理3, 当 $k=1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_3 = 2^{\frac{\eta_2-1}{4}} z_3 (\lambda_2(L_1) \gamma)^{\frac{\eta_2+1}{2}}, \\ \beta &= \beta_3 = 2^{\frac{\theta_2-1}{4}} N^{1-\theta_2} z_4 (\lambda_2(L_2) \gamma)^{\frac{\theta_2+1}{2}}, \\ p &= p_3 = \frac{\eta_2 + 3}{4}, \quad q = q_3 = \frac{\theta_2 + 3}{4}, \end{aligned}$$

且满足 $0 < p \leq 1, q > 1, V_3 = 0 \Leftrightarrow C(x) - C(x_*) = 0$. 由于 $C(x) - C(x_*) = 0$, 根据式(19)可知 $x - x_* = 0, x = x_*$, 表明该算法得到了优化问题(2)的最优解. 收敛时间 T_3 满足 $T_3 \leq \frac{1}{\alpha_3(1-p_3)} + \frac{1}{\beta_3(q_3-1)}$,

则当 $t \geq T_1 + T_2 + T_3$ 时, $C(x) = C(x_*)$, 在满足约束条件的情况下全局目标函数取得最优解. \square

注4 通过上述分析可知最优解的获取分为3个阶段: 第1阶段 $t \leq T_1$, 微分方程(1)的平衡点是算法(8)中定义的虚拟状态 x_i^* , 目的是消除外部有界扰动对系统的影响, 使得当 $t > T_1$ 时系统的实际状态与虚拟状态相等; 第2阶段 $T_1 < t \leq T_1 + T_2$, 实际状态等于虚拟状态且最终等于全局约束常量的均值 \bar{x} , 微分方程(1)的平衡点是全局约束常量的均值 \bar{x} , 目的是当 $t \geq T_1 + T_2$ 时满足所有智能体的状态之和等于全局约束常量; 第3阶段 $T_1 + T_2 < t \leq T_1 + T_2 + T_3$, 实际状态等于虚拟状态且最终等于最优解, 微分方程(1)的平衡点即为优化问题(2)的最优解.

注5 由定理1和定理2不难发现, 在通信拓扑结构和网络节点数不变的情况下, 算法的收敛时间随控制参数 $y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4, \mu, \nu, \eta_1, \eta_2, \theta_1, \theta_2$ 的改变而改变, 因此算法收敛时间的上界可以根据任务需求预先设置. 而在控制参数不变的情况下, 由网络拓扑图构造的拉普拉斯矩阵第二小的特征值越大, 算法收敛时间的上界越小, 网络节点个数越多算法收敛时间的上界越大.

4 仿真结果

本节以一个智能电网中经济调度问题的实例验证算法的有效性. 考虑由6个发电机组成的能源系统, 其通信拓扑结构如图1所示. 每台发电机的经济成本关于发电量的局部成本函数近似为二次函数 $C_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$. 其中: x_i 为发电机 i 的发电量; a_i, b_i, c_i 为成本系数, 由表1给出. 设 $D = 15 \text{ kW}$ 为用户总用电量需求. 要求控制每台发电机的发电量, 在满足供需平衡的前提下最小化发电的经济成本.

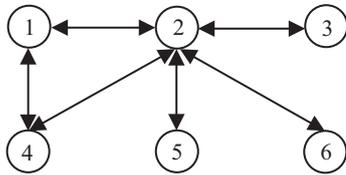


图1 系统通信拓扑图

表1 发电机成本系数

发电机	$a_i / (\$/\text{MW}^2)$	$b_i / (\$/\text{MW})$	$c_i / \$$
1	1	1	1.5
2	0.5	2	0.5
3	1.5	3	3
4	2	4	1
5	1	1.5	2.5
6	0.5	2.5	2

图1的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $\lambda_2 = \lambda_2(L_1) = \lambda_2(L_2) = 1$. 设外部扰动 $f_i = 2|\cos(t)|$, 可取 $F = 2$, 初始状态 $x(0) = [0, 2, 3, 1, 2.5, 1.5]^T$. 算法中令 $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 5, \mu = \eta_1 = \eta_2 = 0.5, \nu = \theta_1 = \theta_2 = 1.5, \gamma = 1$. 由定理1可知, 误差 e_i 收敛到0的时间满足 $T_1 \leq 1.00 \text{ s}$. 误差 e_i 随时间变化曲线如图2所示. 图3为发电机发电量 x_i 随时间变化曲线. 可以看到, 发电量 x_i 在任意初始条件下都能收敛到总用电需求的均值 2.5 kW . 由定理2可知, 收敛时间满足 $T_1 + T_2 \leq 1.81 \text{ s}$. 再由均值收敛到各自最优的状态 $x_* = [2.67, 4.35, 1.12, 0.59, 2.42, 3.85]^T$, 收敛时间满足 $T_1 + T_2 + T_3 \leq 4.48 \text{ s}$. 从图4中可以看到, 当 $t \geq 4.48 \text{ s}$ 时, 发电总成本在满足供需平衡的条件下取得最小值 $73.28 \text{ k\$}$. 图5展示了当 $t \geq 1.81 \text{ s}$ 时, 发电机的发电量之和满足实际总用电需求 15 kW .

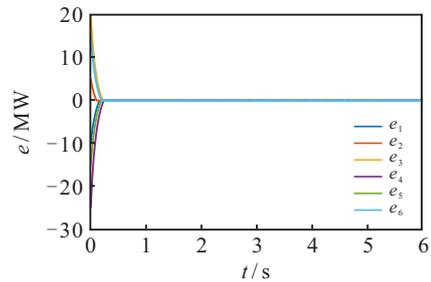


图2 e_i 随时间变化曲线

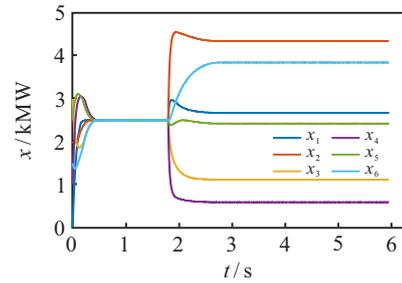


图3 x_i 随时间变化曲线

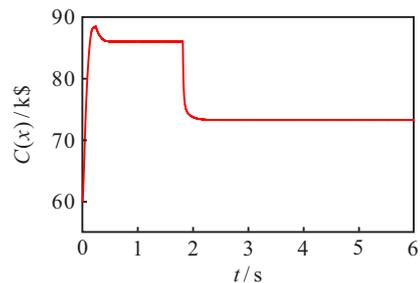


图4 $C(x)$ 随时间变化曲线

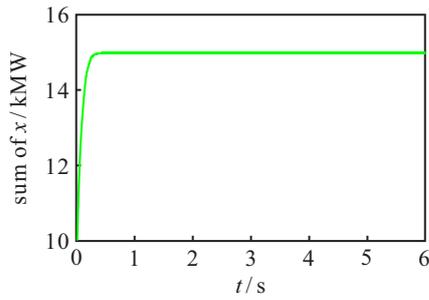


图5 $\sum_{i=1}^6 x_i$ 随时间变化曲线

改变算法(8)中控制器的幂值,令 $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 5, \mu = \eta_1 = 0.1, \eta_2 = 0.9, \nu = \theta_1 = 1.8, \theta_2 = 1.2$, 可以计算出算法理论收敛时间的上界 $T_1 = 0.69\text{ s}, T_2 = 0.49\text{ s}, T_3 = 1.92\text{ s}$. 误差 e_i 收敛到0的时间满足 $T_1 \leq 0.69\text{ s}$, 如图6所示. 每个 x_i 获得最优解 $x_* = [2.67, 4.35, 1.12, 0.59, 2.42, 3.85]^T$ 的所用时间满足 $T_1 + T_2 + T_3 \leq 3.10\text{ s}$, 如图7所示. 通过对比图2、图3和图6、图7不难发现, 调节控制器中的幂值可以使算法收敛时间的上界更接近实际收敛时间, 从而能够更加准确地预估任务建立时间.

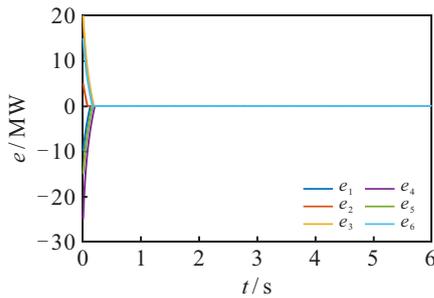


图6 控制器幂值改变后 e_i 随时间变化曲线

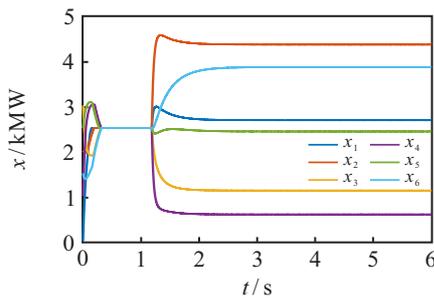


图7 控制器幂值改变后 x_i 随时间变化曲线

改变算法(8)中控制器的控制系数,令 $\mu = \eta_1 = 0.1, \eta_2 = 0.9, \nu = \theta_1 = 1.8, \theta_2 = 1.2, y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 8$, 可以计算出算法理论收敛时间的上界 $T_1 = 0.43\text{ s}, T_2 = 0.31\text{ s}, T_3 = 1.20\text{ s}$. 误差 e_i 收敛到0的时间满足 $T_1 \leq 0.43\text{ s}$, 如图8所示. x_i 收敛到均值所用时间满足 $T_1 + T_2 \leq 0.74\text{ s}$, 每个 x_i 获得最优解的所用时间满足 $T_1 + T_2 + T_3 \leq 1.94\text{ s}$, 如图9所示. 通过对比图8、图9和图6、图7可以发现, 调节控制器中的控制系数可以减少算法的收敛时间, 从而能

够根据任务需求预分配任务建立时间.

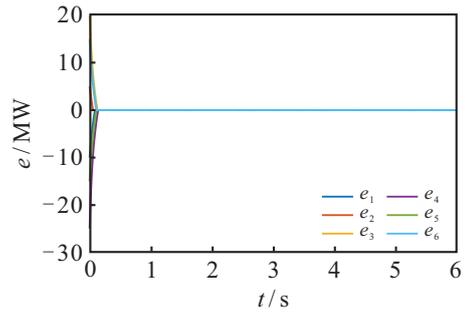


图8 控制器系数改变后 e_i 随时间变化曲线

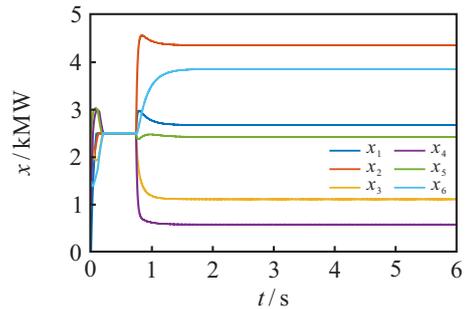


图9 控制器系数改变后 x_i 随时间变化曲线

此外,通过仿真实验对比文献[34]提出的分布式优化算法(8),可以进一步表明所设计算法(8)的抗干扰效果. 选择与本文相同的控制器控制系数和幂值, 干扰项同为 $f_i = 2|\cos(t)|$, 设置多智能体系统的初始状态同为 $x(0) = [0, 2, 3, 1, 2.5, 1.5]^T$. 文献[34]提出的分布式优化算法效果如图10~12所示. 图10展示了 x_i 随时间变化曲线, 最终结果为 $x = [2.72, 4.45, 1.15, 0.61, 2.47, 3.95]^T$. 图11展示了 $C(x)$ 随时间变化曲线, 得到 $C(x)$ 的最小值为 $75.51\text{ k}\$$. 图12展示了所有智能体状态之和随时间变化曲线, $\sum_{i=1}^6 x_i = 15.35\text{ kW}$. 与实际最优解 $x_* = [2.67, 4.35, 1.12, 0.59, 2.42, 3.85]^T$ 和 $C(x_*) = 73.28\text{ k}\$$ 相比, 在外部有界扰动存在的条件下, 文献[34]设计的分布式优化算法并不能得到优化问题的最优解, 且不满足全局约束条件. 而所设计的固定时间分布式算法可以有效抑制外部有界扰动, 能够得到令人满意的效果.

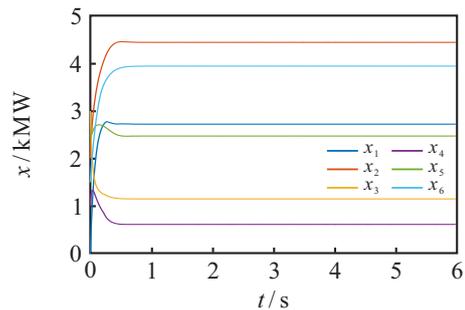
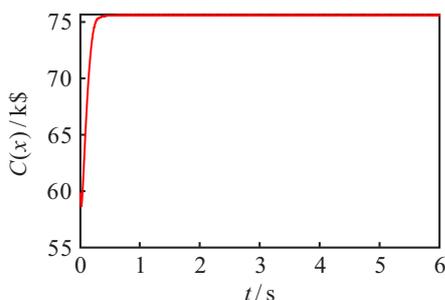
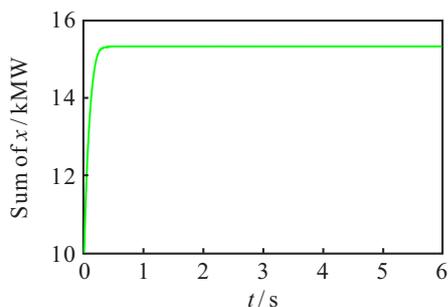


图10 文献[34]中 x_i 随时间变化曲线

图 11 文献[34]中 $C(x)$ 随时间变化曲线图 12 文献[34]中 $\sum_{i=1}^6 x_i$ 随时间变化曲线

5 结论

本文研究了一阶多智能体系统有等式约束的凸优化问题,提出了一种抗干扰的固定时间优化算法。在固定时间内抵消有界扰动,使每个智能体的状态在固定时间内收敛到一致值,满足约束条件的同时在固定时间内收敛到最优解。最后通过理论证明和智能电网中经济调度问题的仿真实例验证了所提出算法的有效性。

参考文献(References)

- [1] Gupta S, Sahoo A K, Sahoo U K. Wireless sensor network-based distributed approach to identify spatio-temporal volterra model for industrial distributed parameter systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 16(12): 7671-7681.
- [2] Zhang J D, Wang W Y, Zhang Z, et al. Cooperative control of UAV cluster formation based on distributed consensus[C]. IEEE 15th International Conference on Control and Automation. Edinburgh, 2019: 788-793.
- [3] Chen G, Ren J H, Feng E N. Distributed finite-time economic dispatch of a network of energy resources[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2017, 8(2): 822-832.
- [4] Zhu S Y, Chen C L, Li W S, et al. Distributed optimal consensus filter for target tracking in heterogeneous sensor networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(6): 1963-1976.
- [5] Huang Z, Liu F, Tang M X, et al. A distributed computing framework based on lightweight variance reduction method to accelerate machine learning training on blockchain[J]. China Communications, 2020, 17(9): 77-89.
- [6] Yang T, Yi X L, Wu J F, et al. A survey of distributed optimization[J]. Annual Reviews in Control, 2019, 47: 278-305.
- [7] Zheng Y L, Liu Q S. A review of distributed optimization: Problems, models and algorithms[J]. Neurocomputing, 2022, 483: 446-459.
- [8] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(1): 48-61.
- [9] Wei E M, Ozdaglar A, Jadbabaie A. A distributed newton method for network utility maximization—I: Algorithm[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(9): 2162-2175.
- [10] Ram S S, Veeravalli V V, Nedic A. Distributed and recursive parameter estimation in parametrized linear state-space models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(2): 488-492.
- [11] Lin P, Ren W, Song Y D. Distributed multi-agent optimization subject to nonidentical constraints and communication delays[J]. Automatica, 2016, 65: 120-131.
- [12] Xi C G, Xin R, Khan U A. ADD-OPT: Accelerated distributed directed optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(5): 1329-1339.
- [13] Xin R, Khan U A. A linear algorithm for optimization over directed graphs with geometric convergence[J]. IEEE Control Systems Letters, 2018, 2(3): 315-320.
- [14] Xin R, Khan U A, Kar S. Fast decentralized nonconvex finite-sum optimization with recursive variance reduction[J]. SIAM Journal on Optimization, 2022, 32(1): 1-28.
- [15] 段书晴, 陈森, 赵志良. 一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1559-1566.
- [16] 赵中原, 陈刚. 基于事件驱动的二次凸优化问题分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2019, 34(8): 1635-1644.
- [17] (Zhao Z Y, Chen G. Distributed event-triggered algorithm for quadratic convex optimization problem[J]. Control and Decision, 2019, 34(8): 1635-1644.)
- [18] Zhang X, Papachristodoulou A, Li N. Distributed optimal steady-state control using reverse- and forward-engineering[C]. The 54th IEEE Conference on Decision and Control. Osaka, 2016: 5257-5264.
- [19] Wu Y B, Wang C D, Li W X. Generalized quantized intermittent control with adaptive strategy on finite-time synchronization of delayed coupled systems and applications[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(2): 1361-1377.
- [20] Song Y F, Chen W S. Finite-time convergent distributed consensus optimisation over networks[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(11): 1314-1318.
- [21] 娄如思, 王璐瑶, 马丹. 二阶非线性多智能体系统有

- 限时间分布式优化[J]. 控制理论与应用, 2021, 38(7): 1015-1022.
(Lou R S, Wang L Y, Ma D. Finite-time distributed optimization of second-order nonlinear multi-agent systems[J]. Control Theory & Applications, 2021, 38(7): 1015-1022.)
- [21] Zhang Z A, Chow M Y. Incremental cost consensus algorithm in a smart grid environment[C]. IEEE Power and Energy Society General Meeting. Detroit, 2011: 1-6.
- [22] Zhang Z A, Chow M Y. Convergence analysis of the incremental cost consensus algorithm under different communication network topologies in a smart grid[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(4): 1761-1768.
- [23] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [24] Liu J, Zhang Y L, Yu Y, et al. Fixed-time event-triggered consensus for nonlinear multiagent systems without continuous communications[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(11): 2221-2229.
- [25] Liu J, Zhang Y L, Yu Y, et al. Fixed-time leader - follower consensus of networked nonlinear systems via event/self-triggered control[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(11): 5029-5037.
- [26] Liu J, Ran G T, Wu Y B, et al. Dynamic event-triggered practical fixed-time consensus for nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(4): 2156-2160.
- [27] 陈世明, 黎力超. 非线性随机多智能体系统的固定时间一致性[J]. 控制理论与应用, 2021, 38(4): 540-546.
(Chen S M, Li L C. Fixed-time consensus of nonlinear stochastic multi-agent systems[J]. Control Theory & Applications, 2021, 38(4): 540-546.)
- [28] 陈刚, 李志勇, 韦梦立. 孤岛微电网的分布式固定时间二次协调控制[J]. 控制与决策, 2019, 34(1): 205-212.
(Chen G, Li Z Y, Wei M L. Distributed fixed-time secondary coordination control of islanded microgrids[J]. Control and Decision, 2019, 34(1): 205-212.)
- [29] 孙小童, 郭戈, 张鹏飞. 非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪[J]. 自动化学报, 2021, 47(6): 1368-1376.
(Sun X T, Guo G, Zhang P F. Fixed-time consensus tracking of multi-agent systems under unmatched disturbances[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(6): 1368-1376.)
- [30] Liu J, Wang Q, Yu Y. Fixed-time consensus algorithm for second-order multi-agent systems with bounded disturbances[C]. The 31st Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation. Wuhan, 2017: 165-170.
- [31] Chen G, Li Z Y. A fixed-time convergent algorithm for distributed convex optimization in multi-agent systems[J]. Automatica, 2018, 95: 539-543.
- [32] Yu Z Y, Yu S Z, Jiang H J, et al. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems over a directed network[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 103(1): 775-789.
- [33] Wang X Y, Wang G D, Li S H. A distributed fixed-time optimization algorithm for multi-agent systems[J]. Automatica, 2020, 122: 109289.
- [34] Chen G, Guo Z J. Initialization-free distributed fixed-time convergent algorithms for optimal resource allocation[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(2): 845-854.
- [35] Ramasamy S, Reddinger J P F, Dotterweich J M, et al. Cooperative route planning of multiple fuel-constrained unmanned aerial vehicles with recharging on an unmanned ground vehicle[C]. International Conference on Unmanned Aircraft Systems. Athens, 2021: 155-164.
- [36] Yang S P, Tan S C, Xu J X. Consensus based approach for economic dispatch problem in a smart grid[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(4): 4416-4426.
- [37] Zuo Z Y. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks[J]. Automatica, 2015, 54: 305-309.
- [38] Boyd S P, Vandenberghe L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University, 2004: 459.

作者简介

耿超(1997—), 男, 硕士生, 从事多智能体协同控制、固定时间控制等研究, E-mail: ngwtdftx@126.com;

武永宝(1992—), 男, 博士生, 从事网络协同控制理论及随机复杂系统等研究, E-mail: yongbaowu199211@163.com;

孙佳(1993—), 女, 助理研究员, 博士, 从事复杂网络同步控制、分布式事件驱动控制等研究, E-mail: jiasun@seu.edu.cn;

刘剑(1992—), 男, 副研究员, 博士, 从事自主无人系统协同控制、固定时间控制等研究, E-mail: bkliujian@163.com;

薛磊(1986—), 男, 副研究员, 博士, 从事分布式协同控制理论、博弈优化方法等研究, E-mail: leixue@seu.edu.cn.