

# 控制与决策

Control and Decision

$\sigma$ 优劣关系熵及其在多属性决策的应用

吴家明, 黄哲煌, 李进金, 刘丹玥

引用本文:

吴家明, 黄哲煌, 李进金, 刘丹.  $\sigma$ 优劣关系熵及其在多属性决策的应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 613–624.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0464>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

[概率区间值直觉犹豫模糊Maclaurin对称平均算子及决策方法](#)

Probabilistic interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and decision method

控制与决策. 2021, 36(5): 1249–1258 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1370>

[基于TOPSIS方法改进的多属性决策模型:最小化偏好反转](#)

Modified MCDM model based on TOPSIS method: Minimizing preference reversal

控制与决策. 2021, 36(1): 216–225 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0536>

[考虑个体累积共识贡献的犹豫模糊语言自适应共识模型](#)

Adaptive consensus model with hesitant fuzzy linguistic information considering individual cumulative consensus contribution

控制与决策. 2021, 36(1): 187–195 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0556>

[基于云模型和多层权重求解的多粒度语言大群体决策方法](#)

Multi-granularity linguistic large group decision-making based on cloud model and multi-layer weight determination

控制与决策. 2021, 36(9): 2257–2266 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0102>

[考虑时间序列的动态大群体应急决策方法](#)

Dynamic large group emergency decision-making method considering time series

控制与决策. 2020, 35(11): 2609–2618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0088>

# $\sigma$ 优劣关系熵及其在多属性决策的应用

吴家明<sup>1</sup>, 黄哲煌<sup>1†</sup>, 李进金<sup>1,2</sup>, 刘丹玥<sup>1</sup>

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021; 2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

**摘要:** 目前大多数的模糊关系熵是由一般的模糊二元关系构造, 无法有效地对具有优劣顺序的模糊关系族进行评估, 这限制了它们在多属性决策的应用. 为此, 提出一种新的优劣关系熵. 首先, 研究一种参数化的模糊优劣关系用于表征样本间的差异, 进而探讨几种  $\sigma$  优劣关系的模糊类; 然后, 在此基础上提出一种新的  $\sigma$  优劣关系熵, 并介绍其一些衍生熵, 如  $\sigma$  优劣关系条件熵、 $\sigma$  优劣关系联合熵和  $\sigma$  优劣关系互信息, 探讨它们间的关系以及一些重要性质; 最后, 给出 2 种基于  $\sigma$  优劣关系熵的多属性决策方法, 并通过数据实例验证所提出方法的有效性和可行性. 比较和敏感性分析表明, 所提出方法与一些经典多属性决策方法的排序结果具有高度一致性. 特别地, 在多专家评判环境下, 所提出方法具有更广泛的适用性.

**关键词:** 优势关系; 粗糙集; 模糊集; 信息熵; 多属性决策

中图分类号: TP301

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0464

引用格式: 吴家明, 黄哲煌, 李进金, 等.  $\sigma$  优劣关系熵及其在多属性决策的应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 613-624.

## $\sigma$ superior-inferior relation entropy and its application in multi-attribute decision making

WU Jia-ming<sup>1</sup>, HUANG Zhe-huang<sup>1†</sup>, LI Jin-jin<sup>1,2</sup>, LIU Dan-yue<sup>1</sup>

(1. College of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China; 2. College of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

**Abstract:** At present, most fuzzy relation entropies are constructed by means of general fuzzy binary relations, which cannot effectively evaluate the fuzzy relation families with order attributes. This limits their application in multi-attribute decision-making. For this reason, a new superior-inferior relationship entropy is presented in this paper. First, a parameterized fuzzy superior-inferior relation is studied to characterize the differences between samples, and some fuzzy classes are then proposed with  $\sigma$  superior-inferior relation. On this basis, a new  $\sigma$  superior-inferior relation entropy are proposed, and some of its derived entropy, such as  $\sigma$  superior-inferior relation conditional entropy,  $\sigma$  superior-inferior relation joint entropy and  $\sigma$  superior-inferior relation mutual information, are then introduced. We discuss the relationship between them and some important properties are explored. Finally, two multi-attribute decision-making methods with  $\sigma$  superior-inferior relation entropy are developed, and the effectiveness and feasibility of the presented method are verified by data examples. Comparison and sensitivity analysis show that the ranking results of the proposed model and some classical methods are highly consistent. In particular, the proposed method has wider applicability in the multiple expert evaluation environment.

**Keywords:** dominance relation; rough sets; fuzzy sets; information entropy; multi-attribute decision making

## 0 引言

粗糙集是由 Pawlak<sup>[1-2]</sup> 提出的用于处理不确定、不精确的一种有效的数学模型. 目前为止, 粗糙集已广泛应用于机器学习、数据挖掘和模式识别等领

域<sup>[3-7]</sup>. 在粗糙集理论中, 等价关系用于刻画分类集合中元素间的联系. 但是, 等价关系的定义过于严格, 限制了粗糙集在实际问题的应用. 为此, 研究者陆续提出了各种各样的衍生关系, 如模糊相似关系、邻域关

收稿日期: 2022-03-23; 录用日期: 2022-09-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(12271191, 11871259); 福建省自然科学基金项目(2017J01114, 2022J01306); 华侨大学高层次人才项目(16BS814).

责任编委: 刘宝碇.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: hqufuzzy@163.com.

系、优势关系等. 这些特殊的二元关系是粗糙集模型的基础. 不同类型的关系诱导不同的粗糙集模型. Greco等<sup>[8]</sup>通过优势关系构建了一种用于解决多属性决策的粗糙集模型. Zhang等<sup>[9]</sup>讨论了基于关系的粗糙集理论与证据理论间的关系,并给出基于关系的信念结构的直观解释. Sun等<sup>[10]</sup>提出了基于二元关系的模糊多粒度粗糙集模型,将其用于具有不同评价指标集的多属性群决策. 针对具有模糊决策的区间值信息系统, Yang等<sup>[11]</sup>给出了基于模糊邻域关系的粗糙集,并针对对象动态变化的环境设计了动态更新算法. 文献[12]研究了多粒度邻域粗糙集的粒化机制,并应用于多标签数据集的分类学习. Hu等<sup>[13]</sup>给出了基于优势关系的多粒度粗糙集,通过多粒化近似提高了知识更新的计算效率. Xin等<sup>[14]</sup>提出了基于风险偏好优先关系的多粒度直觉模糊模型,从乐观和悲观的角度归纳出3支决策规则. Singh等<sup>[15]</sup>利用相似度定义了2个对象间的模糊容差关系,进而构建一种基于容差关系的粗糙集模型.

信息熵是表征不确定性信息的有效工具,用来评估特征子集或一族二元关系的区分信息. 特征子集或二元关系对决策属性的条件信息熵越小,它们区分样本的能力越强<sup>[16]</sup>. 近年来,信息熵及其衍生熵在模糊关系系统和模糊决策系统得到了广泛应用. Yager<sup>[17]</sup>提出了一种模糊信息熵,用于评估一族模糊相似关系的区分信息. 在此基础上,模糊联合熵<sup>[18]</sup>和模糊条件熵<sup>[19]</sup>被重新定义,并用于评估特征子集的区分能力. 为了综合评判给定知识的划分能力, Qian等<sup>[20]</sup>介绍了一种组合熵; Li等<sup>[21]</sup>研究了一种模糊关系信息系统的的多不确定性度量方法,并分析模糊关系诱导的信息粒度和粗糙熵; 姚晟等<sup>[22]</sup>研究了基于邻域粗糙互信息熵的非单调属性约简; Dai等<sup>[23-24]</sup>给出了几种不同形式的条件熵,并应用于不完全决策表. 为了充分利用上近似和下近似隐含的分类信息, Wang等<sup>[25]</sup>给出了4种不同形式的自信息熵; Tan等<sup>[26]</sup>讨论了直觉模糊信息系统的信息粒度,进而研究一种模糊粒度熵,并应用于特征子集的选择. 为了分析混合类型数据的不确定性,文献[27]和文献[28]分别给出一般模糊关系熵和模糊邻域熵. 值得说明的是,以上所介绍的这些信息熵均集中于Shannon熵和Yager熵的推广和应用.

多属性决策<sup>[29-31]</sup>是指在考虑多个属性条件下,选择最优备选方案或对给定的方案进行排序的决策问题. 多属性决策广泛应用于经济学、管理学等众多领域. Deng等<sup>[32]</sup>提出了在多尺度决策系统中的3支

多属性决策方法. Chen等<sup>[33]</sup>研究了一种基于随机直觉模糊信息的因子分析模型,从3个角度解决了复杂的动态多属性群体决策的问题.

本文的目的如下.

1) 传统优势关系普遍存在条件过于苛刻、对关系的描述过于粗糙等缺点,无法精确地刻画2个对象间的差异,限制了它们在实际问题中的应用. 有必要从不同的粒度层次定义优势关系,并在优势和劣势的视角下探索它们的模糊相似类(即优势类和劣势类).

2) 大多数的模糊信息熵是利用模糊相似关系构建的,很少考虑对象间的优劣顺序. 而事实上,现实世界中不同样本存在不同程度的差异. 若能够从这些差异定义优劣关系,进而研究不同粒度层次上的优势关系熵,则有望对样本进行更精确地区分和比较.

3) 在实际问题中,当面对一个重要决策时往往需要多位专家商讨. 但是,由于不同的知识背景、决策经验以及决策偏好等因素的影响,不同专家的决策意见可能无法达成一致. 在这种情景下,如何选择出最合适的专家进行决策是个重要的问题.

这些差距启发本文研究基于不同粒度层次优势关系的信息熵以及它们在多阶段多属性决策的应用. 本文的主要内容如下.

1) 针对传统优势关系的定义不够精细的问题,引入优势程度参数 $\sigma$ ,并提出一种改进的 $\sigma$ 优劣关系,从而能够从不同粒度层次上刻画2个样本间的优劣程度. 在此基础上,研究优劣关系的基本粒度,即 $\sigma$ 优势类、 $\sigma$ 劣势类和 $\sigma$ 混合类.

2) 提出一种新的不确定性度量,即 $\sigma$ 优劣关系熵. 它可以在不同粒度层次上对目标概念的不确定性进行度量,进而研究它的衍生熵,如 $\sigma$ 优劣关系联合熵、 $\sigma$ 优劣关系条件熵和 $\sigma$ 优劣关系互信息. 讨论这些衍生熵的性质,并探讨它们之间的关系.

3) 将 $\sigma$ 优劣关系熵应用于多属性决策问题,并提出2种多属性决策方法. 这些方法能够充分考虑不同决策者间的差异,从多位决策者得到最权威的决策,从而提高决策的科学性. 同时,将这些方法应用于解决实际应用问题,通过与一些经典算法的比较,验证所提出模型的有效性和可行性.

## 1 基础知识

### 1.1 优势关系

基于优势关系的信息系统由一个4元组构成:  $S = \langle U, A, V, f \rangle$ . 其中:  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  为对象集;  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  为非空有限的属性集;  $V = \bigcup_{k=1}^m V_{a_k}$  为属性集值域,且属性值  $V_{a_k}$  有偏好次序;  $f :$

$U \times A \rightarrow V$  为一个信息函数. 对于  $a_k \in A, u \in U, f(u, a_k) \in V_{a_k}$ .

设  $S = \langle U, A, V, f \rangle$  为基于优势关系的信息系统, 对于  $\forall a \in B, S$  在属性集  $B \subseteq A$  上的优势关系定义为

$$R_B^< = \{(u_i, u_j) \in U \times U | f(u_i, a) \leq f(u_j, a), \forall a \in B\}.$$

设  $S = \langle U, A, V, f \rangle$  为一个基于优势关系的信息系统,  $B \subseteq A$ , 定义

$$[u_i]_B^< = \{u_j | (u_i, u_j) \in R_B^<\},$$

其中  $[u_i]_B^<$  为在属性集  $B$  的条件下优于  $u_i$  的所有对象的集合, 称为  $u_i$  的优势类.

### 1.2 信息熵

令  $(U, A, d)$  为一个决策表. 其中:  $U$  为样本的非空有限集,  $A$  为条件属性集,  $d$  为决策属性. 对于任意的  $B \subseteq A$ , 由  $B$  诱导的等价关系定义为

$$R_B = \{(x, y) \in U \times U | a(x) = a(y), \forall a \in B\}.$$

若  $U$  被分为等价类  $U/R_B = \{X_1, X_2, \dots, X_l\}$ , 可将  $B$  当作一个随机变量, 其所有可能值为  $\{X_1, X_2, \dots, X_l\}$ , 则  $B$  的概率分布为

$$p(X_i) = \frac{|X_i|}{|U|}, i = 1, 2, \dots, l,$$

其中  $|X_i|$  为  $X_i$  的基数.

$B$  的信息熵定义为

$$H(B) = \sum_{i=1}^l -p(X_i) \log p(X_i).$$

$C$  为  $A$  的另一属性集,  $U/R_C = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_t\}$ , 则  $B$  和  $C$  的联合熵定义为

$$H(B \cup C) = - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^t p(X_i \cap Y_j) \log p(X_i \cap Y_j).$$

可通过下式计算  $B$  在  $C$  已知情况下的条件熵:

$$H(B|C) = - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^t p(X_i \cap Y_j) \log p(X_i | Y_j),$$

其中  $p(X_i | Y_j) = |X_i \cap Y_j| / |Y_j|$ .

$B$  和  $C$  的互信息被定义为

$$I(B; C) = - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^t p(X_i \cap Y_j) \log \frac{p(X_i | Y_j)}{p(X_i)p(Y_j)}.$$

互信息表示 2 个属性集间的相关性.

## 2 $\sigma$ 优劣关系

对于传统的优势关系, 仅当一个对象的所有属性值均优于或劣于另一个对象, 它们才能进行比较. 但是, 现实生活中 2 个对象在不同属性上往往各有优劣, 很少能有全方位的优势. 为此, 本文提出一种新型的

$\sigma$  优劣关系, 用于衡量在  $\sigma$  程度上 2 个对象的关系.

### 2.1 几种 $\sigma$ 优劣关系邻域

基于  $\sigma$  优劣关系的信息系统由一个 5 元组构成:  $S = (U, C, V, f, \sigma)$ . 其中:  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  为对象集;  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为非空有限属性集;  $V = \bigcup_{k=1}^m V_{C_k}$  为属性集值域, 且属性值  $V_{C_k}$  有偏好次序.  $f: U \times C \rightarrow V$  为一个信息函数. 对于  $\forall C_k \in C, u \in U, f(u, C_k) \in V_{C_k} (k=1, 2, \dots, m), \sigma$  为参数且  $\sigma \in (0, 1]$ .

**定义 1** 设  $S = (U, C, V, f, \sigma)$  为一个基于  $\sigma$  优劣关系的信息系统, 其中  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为非空有限属性集, 则  $\sigma$  优势关系定义为: 在  $C$  中若存在  $n$  个  $C_k$  满足  $f(u_i, C_k) \leq f(u_j, C_k)$ , 且  $\frac{n}{m} \geq \sigma$ , 则  $u_j$  在  $\sigma$  程度上优于  $u_i$ , 记为  $u_i \prec^\sigma u_j$ .

**定义 2** 设  $S = (U, C, V, f, \sigma)$  为基于  $\sigma$  优劣关系的信息系统, 对于任意  $u \in U, u$  的  $\sigma$  优势类定义为

$$[u]_1^\sigma = \{v | u \prec^\sigma v \wedge v \in U\}.$$

若  $v \in [u]_1^\sigma$ , 有  $u \prec^\sigma v$ , 则表明  $v$  优于  $u$ .  $\{[u]_1^\sigma | u \in U\}$  为所有对象关于  $C$  的可能重叠的分类. 一般而言,  $\{[u]_1^\sigma | u \in U\}$  为  $U$  的覆盖. 当  $\sigma = 1$  时,  $\sigma$  优势类  $[u]_1^\sigma$  退化为传统优势类.

由定义 2,  $\sigma$  越大,  $[u]_1^\sigma$  越小,  $\{[u]_1^\sigma | u \in U\}$  的分类粒度越细. 在实际应用中, 可根据需要选择合适的粒度对数据进行观察和分析.

**性质 1** 若任意  $u \in U$  的  $\sigma$  优势类为  $[u]_1^\sigma$ , 则:

- 1) 对于任意  $u \in U$ , 有  $u \in [u]_1^\sigma$ , 故  $[u]_1^\sigma$  满足自反性;
- 2) 对于任意  $u, v, w \in U$ , 若  $v \in [u]_1^\sigma$  且  $w \in [v]_1^\sigma$ , 则有  $w \in [u]_1^\sigma$ , 故  $[u]_1^\sigma$  具有传递性.

**例 1** 令  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}$  为 6 名应聘者,  $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$  为它们的 5 个指标, 分别为专业知识、英文水平、表达能力、性格和应变能力. 评价结果如表 1 所示.

表 1 6 名应聘者的多属性决策

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$u_1$	1.00	0.96	1.00	0.80	0.90
$u_2$	0.96	0.85	0.87	0.81	1.00
$u_3$	0.89	1.00	0.93	1.00	0.98
$u_4$	0.94	0.86	0.99	0.80	0.86
$u_5$	0.89	0.92	0.87	0.76	0.89
$u_6$	0.85	0.88	0.78	0.84	0.99

令  $\sigma = 0.6$ , 得到

- $$u_1 \prec^{0.6} u_1, u_1 \prec^{0.6} u_3;$$
- $$u_2 \prec^{0.6} u_1, u_2 \prec^{0.6} u_2, u_2 \prec^{0.6} u_3;$$
- $$u_3 \prec^{0.6} u_3;$$
- $$u_4 \prec^{0.6} u_1, u_4 \prec^{0.6} u_2, u_4 \prec^{0.6} u_3, u_4 \prec^{0.6} u_4,$$
- $$u_4 \prec^{0.6} u_6;$$

$$\begin{aligned}
 &u_5 \prec^{0.6} u_1, u_5 \prec^{0.6} u_2, u_5 \prec^{0.6} u_3, u_5 \prec^{0.6} u_4, \\
 &u_5 \prec^{0.6} u_5; \\
 &u_6 \prec^{0.6} u_1, u_6 \prec^{0.6} u_2, u_6 \prec^{0.6} u_3, u_6 \prec^{0.6} u_5, \\
 &u_6 \prec^{0.6} u_6.
 \end{aligned}$$

从而得到任意  $u_i \in U$  的  $\sigma$  优势类, 即

$$\begin{aligned}
 [u_1]_1^{0.6} &= \{u_1, u_3\}, [u_2]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3\}, \\
 [u_3]_1^{0.6} &= \{u_3\}, [u_4]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_6\}, \\
 [u_5]_1^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, \\
 [u_6]_1^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6\}.
 \end{aligned}$$

$u$  的  $\sigma$  优势类为在  $\sigma$  程度上优于  $u$  的元素的集合, 如对于  $[u_1]_1^\sigma = \{u_1, u_3\}$ , 表明  $u_1, u_3$  至少有 3 个属性要优于  $u_1$ .

**定义 3** 设  $S = (U, C, V, f, \sigma)$  为一个基于  $\sigma$  优势关系的信息系统, 其中  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为非空有限属性集.  $\sigma$  劣势关系定义为: 在  $C$  中若存在  $n$  个  $C_k$  满足  $f(u_i, C_k) \geq f(u_j, C_k)$ , 且  $\frac{n}{m} \geq \sigma$ , 则  $u_j$  在  $\sigma$  程度上劣于  $u_i$ , 记为  $u_i \succ^\sigma u_j$ .

**定义 4** 设  $S = (U, C, V, f, \sigma)$  为一个基于  $\sigma$  优势关系的信息系统, 则  $u \in U$  的  $\sigma$  劣势类为

$$[u]_2^\sigma = \{v \mid u \succ^\sigma v \wedge v \in U\}.$$

若  $v \in [u]_2^\sigma$ , 有  $u \succ^\sigma v$ , 则表明  $v$  劣于  $u$ .  $\{[u]_2^\sigma \mid u \in U\}$  为所有对象关于  $C$  的可能重叠的分类. 当  $\sigma = 1$  时,  $\sigma$  劣势类  $[u]_2^\sigma$  退化为传统劣势类.

**性质 2** 若任意  $u \in U$  的  $\sigma$  劣势类为  $[u]_2^\sigma$ , 则:

- 1) 对于任意  $u \in U$ , 有  $u \in [u]_2^\sigma$ , 故  $[u]_2^\sigma$  满足自反性;
- 2) 对于任意  $u, v, w \in U$ , 若  $v \in [u]_2^\sigma$  且  $w \in [v]_2^\sigma$ , 则有  $w \in [u]_2^\sigma$ , 故  $[u]_2^\sigma$  具有传递性.

**例 2** 对于  $\sigma$  劣势关系, 若采用  $\sigma = 0.6$ , 则得到劣势类为

$$\begin{aligned}
 [u_1]_2^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}, \\
 [u_2]_2^{0.6} &= \{u_2, u_4, u_5, u_6\}, \\
 [u_3]_2^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}, \\
 [u_4]_2^{0.6} &= \{u_4, u_5\}, \\
 [u_5]_2^{0.6} &= \{u_5, u_6\}, \\
 [u_6]_2^{0.6} &= \{u_4, u_6\}.
 \end{aligned}$$

$u$  的  $\sigma$  劣势类为在  $\sigma$  程度上劣于  $u$  的元素的集合, 如对于  $[u_1]_2^\sigma = \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}$ , 表明  $u_1, u_2, u_4, u_5, u_6$  至少有 3 个属性劣于  $u_1$ .

**定义 5** 设  $S = (U, C, V, f, \sigma)$  为基于  $\sigma$  优势关系的信息系统, 对于  $\forall u \in U$ ,  $u$  的混合优势类定义为

$$[u]_3^\sigma = [u]_1^\sigma \wedge [u]_2^\sigma, [u]_4^\sigma = [u]_1^\sigma \vee [u]_2^\sigma.$$

**定义 6** 设  $S = (U, C, V, f, \sigma)$  为一个基于  $\sigma$  优势

关系的信息系统, 其中  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  为对象集, 则  $\sigma$  优势关系矩阵定义为

$$R_\diamond^\sigma = [[u_i]_\diamond^\sigma(u_j)]_{n \times n},$$

其中

$$[u_i]_\diamond^\sigma(u_j) = \begin{cases} 1, & u_j \in [u_i]_\diamond^\sigma; \\ 0, & u_j \notin [u_i]_\diamond^\sigma; \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n, \diamond = 1, 2, 3, 4.$$

### 2.2 几种 $\sigma$ 优势关系矩阵的关系

**性质 3** 令  $[u]_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$  为  $U$  上的  $\sigma$  优势关系类, 则:

- 1)  $[u]_3^\sigma \subseteq [u]_1^\sigma \subseteq [u]_4^\sigma$ ;
- 2)  $[u]_3^\sigma \subseteq [u]_2^\sigma \subseteq [u]_4^\sigma$ .

由性质 3, 得到 4 种  $\sigma$  优势关系类的关系, 如图 1 所示.

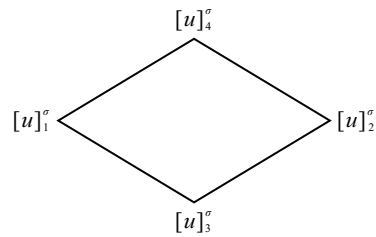


图 1 4 种类型的  $\sigma$  优势关系类的关系

**性质 4** 令  $R_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$  为  $U$  上的  $\sigma$  优势关系矩阵, 则:

- 1)  $R_3^\sigma \subseteq R_1^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ ;
- 2)  $R_3^\sigma \subseteq R_2^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ .

**证明** 1) 对于任意  $u \in U$ , 有  $[u]_3^\sigma = [u]_1^\sigma \wedge [u]_2^\sigma \subseteq [u]_1^\sigma, [u]_1^\sigma \subseteq [u]_1^\sigma \vee [u]_2^\sigma = [u]_4^\sigma$ , 故  $[u]_3^\sigma \subseteq [u]_1^\sigma \subseteq [u]_4^\sigma$ , 对于任意  $v \in [u]_3^\sigma$ , 必有  $v \in [u]_1^\sigma, v \in [u]_4^\sigma$ , 由定义 6, 有  $R_3^\sigma \subseteq R_1^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ .

2) 证明与 1) 类似, 此略.  $\square$

由性质 4, 得到几种  $\sigma$  优势关系矩阵的关系, 如图 2 所示.

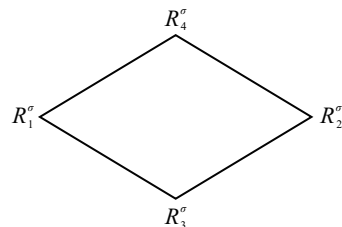


图 2 4 种类型的  $\sigma$  优势关系矩阵的关系

**例 3** 由  $\sigma$  优势关系, 得到

$$\begin{aligned}
 [u_1]_1^{0.6} &= \{u_1, u_3\}, \\
 [u_2]_1^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_3\}, \\
 [u_3]_1^{0.6} &= \{u_3\}, \\
 [u_4]_1^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_6\},
 \end{aligned}$$

$$[u_5]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\},$$

$$[u_6]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6\}.$$

从而得到 $\sigma$ 优势矩阵

$$R_1^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由 $\sigma$ 劣势关系,得到

$$[u_1]_2^{0.6} = \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\},$$

$$[u_2]_2^{0.6} = \{u_2, u_4, u_5, u_6\},$$

$$[u_3]_2^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\},$$

$$[u_4]_2^{0.6} = \{u_4, u_5\},$$

$$[u_5]_2^{0.6} = \{u_5, u_6\},$$

$$[u_6]_2^{0.6} = \{u_4, u_6\}.$$

则 $\sigma$ 劣势矩阵为

$$R_2^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3 $\sigma$ 优劣关系熵及其衍生熵

#### 3.1 $\sigma$ 优劣关系熵

定义7 令 $R_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$ 为 $U$ 上的 $\sigma$ 优劣关系矩阵,则 $\sigma$ 优劣关系熵定义为

$$H(R_\diamond^\sigma) = -\log \frac{|R_\diamond^\sigma|}{|U|^2},$$

其中 $|\cdot|$ 为矩阵的基数.

由于 $n \leq |R_\diamond^\sigma| \leq n^2$ ,易知 $0 \leq H(R_\diamond^\sigma) \leq \log n$ .特别当 $|R_\diamond^\sigma| = n$ 时, $H(R_\diamond^\sigma) = \log n$ ;当 $|R_\diamond^\sigma| = n^2$ 时, $H(R_\diamond^\sigma) = 0$ .

例4 已知 $\sigma$ 优势矩阵为

$$R_1^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算 $\sigma$ 优势关系熵为

$$H(R_1^{0.6}) = -\log \frac{21}{36} \approx 0.54.$$

$\sigma$ 劣势矩阵为

$$R_2^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算 $\sigma$ 劣势关系熵为

$$H(R_2^{0.6}) = -\log \frac{21}{36} \approx 0.54.$$

性质5 令 $R_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$ 为 $U$ 上的 $\sigma$ 优劣关系矩阵,则:

$$1) H(R_4^\sigma) \leq H(R_1^\sigma) \leq H(R_3^\sigma);$$

$$2) H(R_4^\sigma) \leq H(R_2^\sigma) \leq H(R_3^\sigma).$$

证明 1)由性质4可知, $R_3^\sigma \subseteq R_1^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ ,有 $|R_3^\sigma| \leq |R_1^\sigma| \leq |R_4^\sigma|$ ,则 $-\log \frac{|R_3^\sigma|}{|U|^2} \geq -\log \frac{|R_1^\sigma|}{|U|^2} \geq -\log \frac{|R_4^\sigma|}{|U|^2}$ .故得到 $H(R_4^\sigma) \leq H(R_1^\sigma) \leq H(R_3^\sigma)$ .

2)证明与1)类似,此略.  $\square$

该性质表明 $\sigma$ 优劣关系熵具有单调性.通过该不确定性度量,可比较2个优劣关系矩阵的区分能力.

#### 3.2 $\sigma$ 优劣关系联合熵

定义8 令 $R_\diamond^\sigma$ 和 $R'_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$ 为 $U$ 上的 $\sigma$ 优劣关系矩阵,则 $R_\diamond^\sigma$ 和 $R'_\diamond^\sigma$ 的 $\sigma$ 优劣关系联合熵为

$$H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) = -\log \frac{|R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|U|^2}.$$

性质6 令 $R_\diamond^\sigma$ 和 $R'_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$ 为 $U$ 上的2个 $\sigma$ 优劣关系矩阵,则:

$$1) H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) \geq H(R_\diamond^\sigma), H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) \geq H(R'_\diamond^\sigma);$$

$$2) \text{若 } R_\diamond^\sigma \subseteq R'_\diamond^\sigma, \text{则 } H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) = H(R_\diamond^\sigma).$$

证明 1)由 $R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma \subseteq R_\diamond^\sigma$ ,有 $|R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma| \leq |R_\diamond^\sigma|$ ,得到

$$-\log \frac{|R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|U|^2} \geq -\log \frac{|R_\diamond^\sigma|}{|U|^2},$$

因此, $H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) \geq H(R_\diamond^\sigma)$ .同理可得, $H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) \geq H(R'_\diamond^\sigma)$ .

2)证明与1)类似,此略.  $\square$

性质6第1)项表明, $\sigma$ 优劣关系联合熵不小于其单个矩阵的 $\sigma$ 优劣关系熵.性质6第2)项表明,将粗的 $\sigma$ 优劣关系矩阵引入至细的 $\sigma$ 优劣关系矩阵,其熵值不会有变化.

#### 3.3 $\sigma$ 优劣关系条件熵

定义9 令 $R_\diamond^\sigma$ 和 $R'_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$ 为 $U$ 上的 $\sigma$ 优劣关系矩阵,则 $R'_\diamond^\sigma$ 关于 $R_\diamond^\sigma$ 的 $\sigma$ 优劣关系条件熵为

$$H(R'_\diamond^\sigma | R_\diamond^\sigma) = -\log \frac{|R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|R_\diamond^\sigma|}.$$

$\sigma$ 优劣关系条件熵体现了在 $R_\diamond^\sigma$ 已知的条件下

$R'_\diamond^\sigma$ 的不确定性信息.

**性质7** 令  $R_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$  为  $U$  上的  $\sigma$  优劣关系矩阵, 则:

1)  $H(R_4^\sigma | R_1^\sigma) = H(R_4^\sigma | R_2^\sigma) = H(R_4^\sigma | R_3^\sigma) = H(R_2^\sigma | R_3^\sigma) = H(R_1^\sigma | R_3^\sigma) = 0;$

2)  $H(R_3^\sigma | R_4^\sigma) \geq H(R_1^\sigma | R_4^\sigma), H(R_3^\sigma | R_4^\sigma) \geq H(R_2^\sigma | R_4^\sigma).$

**证明** 1) 由性质4可知,  $R_3^\sigma \subseteq R_1^\sigma \subseteq R_4^\sigma, R_3^\sigma \subseteq R_2^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ , 故  $|R_1^\sigma \cap R_4^\sigma| = |R_1^\sigma|$ , 有

$$H(R_4^\sigma | R_1^\sigma) = -\log \frac{|R_1^\sigma \cap R_4^\sigma|}{|R_1^\sigma|} = -\log \frac{|R_1^\sigma|}{|R_1^\sigma|} = 0.$$

类似可证明,  $H(R_4^\sigma | R_2^\sigma) = H(R_4^\sigma | R_3^\sigma) = H(R_2^\sigma | R_3^\sigma) = H(R_1^\sigma | R_3^\sigma) = 0.$

2) 由性质4可知,  $R_3^\sigma \subseteq R_1^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ , 故  $|R_3^\sigma \cap R_4^\sigma| = |R_3^\sigma|, |R_1^\sigma \cap R_4^\sigma| = |R_1^\sigma|$ , 有  $|R_3^\sigma \cap R_4^\sigma| \leq |R_1^\sigma \cap R_4^\sigma|$ , 则

$$H(R_3^\sigma | R_4^\sigma) = -\log \frac{|R_4^\sigma \cap R_3^\sigma|}{|R_4^\sigma|} \geq -\log \frac{|R_1^\sigma \cap R_4^\sigma|}{|R_4^\sigma|} = H(R_1^\sigma | R_4^\sigma).$$

由  $R_3^\sigma \subseteq R_2^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ , 类似证明得到  $H(R_3^\sigma | R_4^\sigma) \geq H(R_2^\sigma | R_4^\sigma).$  □

性质7第1)项表明, 粗的  $\sigma$  优劣关系矩阵不会对细的  $\sigma$  优劣关系矩阵提供额外的区分信息. 性质7第2)项表明, 引入粗的  $\sigma$  优劣关系矩阵不影响  $\sigma$  优劣关系熵大小关系.

**性质8** 令  $R_\diamond^\sigma$  和  $R'_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$  为  $U$  上的2个  $\sigma$  优劣关系矩阵, 则:

1)  $H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) = H(R'_\diamond^\sigma | R_\diamond^\sigma) + H(R_\diamond^\sigma);$

2)  $H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) = H(R_\diamond^\sigma | R'_\diamond^\sigma) + H(R'_\diamond^\sigma).$

**证明** 1) 由  $\sigma$  优劣关系联合熵和  $\sigma$  优劣关系条件熵的定义, 得到

$$H(R'_\diamond^\sigma | R_\diamond^\sigma) + H(R_\diamond^\sigma) = -\log \frac{|R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|R_\diamond^\sigma|} - \log \frac{|R_\diamond^\sigma|}{|U|^2} = -\log \frac{|R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|U|^2} = H(R'_\diamond^\sigma, R_\diamond^\sigma).$$

故  $H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) = H(R'_\diamond^\sigma | R_\diamond^\sigma) + H(R_\diamond^\sigma).$

2) 同理,  $H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) = H(R_\diamond^\sigma | R'_\diamond^\sigma) + H(R'_\diamond^\sigma).$  □

### 3.4 $\sigma$ 优劣关系互信息

**定义10** 令  $R_\diamond^\sigma$  和  $R'_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$  为  $U$  上的  $\sigma$  优劣关系矩阵, 则  $R_\diamond^\sigma$  与  $R'_\diamond^\sigma$  的  $\sigma$  优劣关系互信息为

$$I(R_\diamond^\sigma; R'_\diamond^\sigma) = \log \frac{|U|^2 \cdot |R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|R_\diamond^\sigma| \cdot |R'_\diamond^\sigma|}.$$

$\sigma$  优劣关系互信息为2个优劣关系矩阵的公共不确定性信息, 体现了它们之间的相关性. 显然  $I(R_\diamond^\sigma; R'_\diamond^\sigma) = I(R'_\diamond^\sigma; R_\diamond^\sigma).$

**性质9** 令  $R_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$  为  $U$  上的  $\sigma$  优劣关系矩阵, 则:

1)  $I(R_\diamond^\sigma; R_4^\sigma) = H(R_4^\sigma);$

2)  $I(R_3^\sigma; R_2^\sigma) = H(R_2^\sigma).$

**证明** 1) 由  $R_3^\sigma \subseteq R_1^\sigma \subseteq R_4^\sigma, R_3^\sigma \subseteq R_2^\sigma \subseteq R_4^\sigma$ , 有  $R_\diamond^\sigma \cap R_4^\sigma = R_\diamond^\sigma$ , 故

$$I(R_\diamond^\sigma; R_4^\sigma) = \log \frac{|U|^2 \cdot |R_\diamond^\sigma \cap R_4^\sigma|}{|R_\diamond^\sigma| \cdot |R_4^\sigma|} = \log \frac{|U|^2}{|R_4^\sigma|} = H(R_4^\sigma).$$

2) 证明与1)类似, 此略. □

当一个  $\sigma$  优劣关系矩阵包含于另一个更粗的  $\sigma$  优劣关系矩阵时,  $\sigma$  优劣关系互信息等于粗的  $\sigma$  优劣关系矩阵的  $\sigma$  优劣关系熵.

**性质10** 令  $R_\diamond^\sigma$  和  $R'_\diamond^\sigma (\diamond = 1, 2, 3, 4)$  为  $U$  上的2个  $\sigma$  优劣关系矩阵, 则:

1)  $I(R_\diamond^\sigma; R'_\diamond^\sigma) = H(R_\diamond^\sigma) + H(R'_\diamond^\sigma) - H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma);$

2)  $I(R_\diamond^\sigma; R'_\diamond^\sigma) = H(R_\diamond^\sigma) - H(R_\diamond^\sigma | R'_\diamond^\sigma) = H(R'_\diamond^\sigma) - H(R'_\diamond^\sigma | R_\diamond^\sigma).$

**证明** 1) 由性质8, 得到

$$\begin{aligned} H(R_\diamond^\sigma) + H(R'_\diamond^\sigma) - H(R_\diamond^\sigma, R'_\diamond^\sigma) &= \\ H(R_\diamond^\sigma) - H(R_\diamond^\sigma | R'_\diamond^\sigma) &= \\ -\log \frac{|R_\diamond^\sigma|}{|U|^2} + \log \frac{|R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|R'_\diamond^\sigma|} &= \\ \log \frac{|U|^2 \cdot |R_\diamond^\sigma \cap R'_\diamond^\sigma|}{|R_\diamond^\sigma| \cdot |R'_\diamond^\sigma|} &= \\ I(R_\diamond^\sigma; R'_\diamond^\sigma). \end{aligned}$$

2) 证明与1)类似, 此略. □

由性质10易得,  $\sigma$  优劣关系熵及其衍生熵间的关系如图3所示.

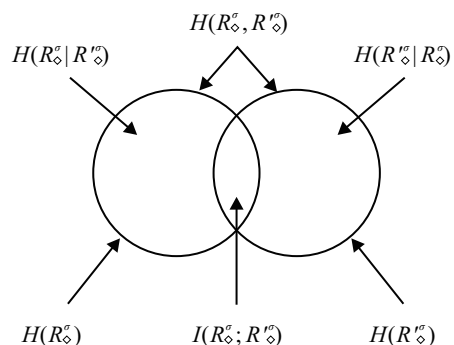


图3  $\sigma$  优劣关系熵及其衍生熵的关系

**例5**  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  为5种金融产品, 分别为国债、基金、股票、外汇以及保险.  $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$  为6个指标, 分别为稳定性、安全性、便利性、流动性、收益性以及防御性. 评价结果如表2所示.

表2 5种金融产品的多属性决策

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$u_1$	0.55	0.83	0.74	0.70	0.30	0.61
$u_2$	0.25	0.40	0.52	0.81	0.47	0.60
$u_3$	0.60	0.70	0.40	0.71	0.35	0.55
$u_4$	0.72	0.26	0.50	0.58	0.64	0.72
$u_5$	0.52	0.40	0.33	0.75	0.54	0.62

对于 $\sigma$ 优势关系,若 $\sigma=0.6$ ,得到

$$\begin{aligned} u_1 &\prec^{0.6} u_1; \\ u_2 &\prec^{0.6} u_1, u_2 \prec^{0.6} u_2, u_2 \prec^{0.6} u_5; \\ u_3 &\prec^{0.6} u_2, u_3 \prec^{0.6} u_3, u_3 \prec^{0.6} u_4; \\ u_4 &\prec^{0.6} u_4; \\ u_5 &\prec^{0.6} u_4, u_5 \prec^{0.6} u_5. \end{aligned}$$

从而 $\sigma$ 的优势类为

$$\begin{aligned} [u_1]_1^{0.6} &= \{u_1\}, [u_2]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_5\}, \\ [u_3]_1^{0.6} &= \{u_2, u_3, u_4\}, [u_4]_1^{0.6} = \{u_4\}, \\ [u_5]_1^{0.6} &= \{u_4, u_5\}. \end{aligned}$$

则 $\sigma$ 优势矩阵为

$$R_1^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

对于 $\sigma$ 劣势关系,令 $\sigma=0.6$ ,得到

$$\begin{aligned} u_1 &\succ^{0.6} u_1, u_1 \succ^{0.6} u_2; u_2 \succ^{0.6} u_2, u_2 \succ^{0.6} u_3; \\ u_3 &\succ^{0.6} u_3; u_4 \succ^{0.6} u_3; u_4 \succ^{0.6} u_4, u_4 \succ^{0.6} u_5; \\ u_5 &\succ^{0.6} u_2, u_5 \succ^{0.6} u_5. \end{aligned}$$

从而 $\sigma$ 劣势类为

$$\begin{aligned} [u_1]_2^{0.6} &= \{u_1, u_2\}, [u_2]_2^{0.6} = \{u_2, u_3\}, \\ [u_3]_2^{0.6} &= \{u_1, u_3\}, [u_4]_2^{0.6} = \{u_3, u_4, u_5\}, \\ [u_5]_2^{0.6} &= \{u_2, u_5\}. \end{aligned}$$

则 $\sigma$ 劣势矩阵为

$$R_2^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由 $\sigma$ 优劣矩阵,可计算 $\sigma$ 优劣关系熵为

$$\begin{aligned} H(R_1^{0.6}) &= -\log \frac{|R_1^{0.6}|}{|U|^2} = -\log \frac{10}{25} = 0.9163, \\ H(R_2^{0.6}) &= -\log \frac{|R_2^{0.6}|}{|U|^2} = -\log \frac{11}{25} = 0.8210, \\ H(R_1^{0.6}, R_2^{0.6}) &= -\log \frac{|R_1^{0.6} \cap R_2^{0.6}|}{|U|^2} = 1.6094, \end{aligned}$$

$$H(R_2^{0.6}|R_1^{0.6}) = -\log \frac{|R_1^{0.6} \cap R_2^{0.6}|}{|R_1^{0.6}|} = 0.6931,$$

$$I(R_1^{0.6}; R_2^{0.6}) = \log \frac{|U|^2 \cdot |R_1^{0.6} \cap R_2^{0.6}|}{|R_1^{0.6}| \cdot |R_2^{0.6}|} = 0.1278.$$

### 4 基于 $\sigma$ 优劣关系熵的多属性决策模型

本节利用 $\sigma$ 优劣关系条件熵解决具有模糊评价信息的多属性决策问题。

#### 4.1 问题叙述

假设 $I = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$ 为 $l$ 位专家,专家 $I_k(k = 1, 2, \dots, l)$ 对方案 $u_i$ 的评估值以 $b_{ik}$ 表示,其中 $b_{ik} \in [0, 1]$ ,根据 $b_{ik}$ 的值对所有备选方案进行排序, $b_{ik}$ 值越大,备选方案 $u_i$ 的排序越靠前。

**情况1** 若专家 $I_k$ 对方案 $u_i$ 的评估值 $b_{ik}$ 大于或等于 $u_j$ 的评估值 $b_{jk}$ ,则专家 $I_k$ 认为方案 $u_i$ 优于 $u_j$ ,由此专家的 $\sigma$ 优势矩阵为 $I_1^k = [c_{ij}]_{n \times n}$ ,其中

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & b_{ik} \geq b_{jk}; \\ 0, & b_{ik} < b_{jk}; \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

**情况2** 若专家 $I_k$ 对方案 $u_i$ 的评估值 $b_{ik}$ 小于或等于 $u_j$ 的评估值 $b_{jk}$ ,则专家 $I_k$ 认为方案 $u_i$ 劣于 $u_j$ ,由此专家的 $\sigma$ 劣势矩阵为 $I_2^k = [c_{ij}]_{n \times n}$ ,其中

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & b_{ik} > b_{jk}; \\ 1, & b_{ik} \leq b_{jk}; \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

#### 4.2 决策方法

专家组 $I = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$ 对备选方案进行评估.计算出备选方案 $u_i$ 的 $\sigma$ 优劣关系类,进而得到 $\sigma$ 优劣关系矩阵,接着计算各专家的 $\sigma$ 优劣关系条件熵,有

$$H(I_\diamond^k | R_\diamond^\sigma) = -\log \frac{|R_\diamond^\sigma \cap I_\diamond^k|}{|R_\diamond^\sigma|}, \quad \diamond = 1, 2.$$

熵越小,表明专家的判断越准确。

#### 4.3 基于 $\sigma$ 优势关系的多属性决策算法

输入: 备选方案的特征描述表,专家组的评估 $I = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$ ,参数 $\sigma$ ;

输出: 备选方案的排序以及最合适的专家 $I_j$ 。

step 1: 由备选方案的特征描述表计算出 $\sigma$ 优势关系矩阵。

step 2: 根据专家组的评估 $I = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$ 得到各专家的 $\sigma$ 优势关系矩阵。

step 3: 计算 $\sigma$ 优势关系条件熵,即

$$H(I_1^k | R_1^\sigma) = -\log \frac{|R_1^\sigma \cap I_1^k|}{|R_1^\sigma|}, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

step 4: 找出 $H(I_1^k | R_1^\sigma) = \min\{H(I_1^1 | R_1^\sigma), H(I_1^2 | R_1^\sigma), \dots, H(I_1^l | R_1^\sigma)\}$ ,则决策目标为 $I_j$ 。

step 5: 由 $I_j$ 的偏好信息得到备选方案的排序。

**例6** 某公司将从5个方面对员工进行考察.令 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_9\}$ 为9位员工, $C = \{C_1, C_2, C_3,$

$C_4, C_5$  为公司要考察的5个方面,分别为业绩完成情况、综合分析能力、自我调节能力、应变能力以及人际交往能力. 公司根据该9名员工以上5个方面的表现进行评估,并从该9名员工中选出1名优秀员工. 9名员工的特征描述如表3所示. 临界值  $\sigma = 0.6, 3$  位专家对各员工的评估为

$$I_1 = \frac{0.3}{u_1} + \frac{0.4}{u_2} + \frac{0.9}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{0.6}{u_5} + \frac{0.7}{u_6} + \frac{0.1}{u_7} + \frac{0.2}{u_8} + \frac{0.5}{u_9},$$

$$I_2 = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.8}{u_2} + \frac{0.9}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.7}{u_5} + \frac{0.6}{u_6} + \frac{0.1}{u_7} + \frac{0.2}{u_8} + \frac{0.3}{u_9},$$

$$I_3 = \frac{0.7}{u_1} + \frac{0.5}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{0.9}{u_5} + \frac{0.3}{u_6} + \frac{0.2}{u_7} + \frac{0.4}{u_8} + \frac{0.1}{u_9}.$$

表3 9名员工的特征描述

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$u_1$	0.607	0.550	0.511	0.518	0.468
$u_2$	0.547	0.467	0.563	0.550	0.605
$u_3$	0.647	0.578	0.574	0.636	0.592
$u_4$	0.529	0.597	0.468	0.492	0.507
$u_5$	0.438	0.652	0.471	0.617	0.502
$u_6$	0.626	0.647	0.434	0.503	0.512
$u_7$	0.524	0.514	0.481	0.542	0.497
$u_8$	0.587	0.529	0.464	0.454	0.522
$u_9$	0.562	0.480	0.468	0.520	0.560

进一步,得到  $\sigma$  优势类

$$[u_1]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6\}, [u_2]_1^{0.6} = \{u_2, u_3\},$$

$$[u_3]_1^{0.6} = \{u_3\},$$

$$[u_4]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_9\},$$

$$[u_5]_1^{0.6} = \{u_2, u_3, u_5\},$$

$$[u_6]_1^{0.6} = \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_9\},$$

$$[u_7]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\},$$

$$[u_8]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_8, u_9\},$$

$$[u_9]_1^{0.6} = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_7, u_9\}.$$

从而  $\sigma$  优势矩阵为

$$R_1^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由3位专家的评估,得到  $\sigma$  优势矩阵分别为

$$I_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_1^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

故各专家的  $\sigma$  优势关系条件熵分别为

$$H(I_1^1 | R_1^{0.6}) = -\log \frac{|R_1^{0.6} \cap I_1^1|}{|R_1^{0.6}|} = -\log \frac{33}{45} = 0.3102,$$

$$H(I_1^2 | R_1^{0.6}) = -\log \frac{|R_1^{0.6} \cap I_1^2|}{|R_1^{0.6}|} = -\log \frac{42}{45} = 0.0690,$$

$$H(I_1^3 | R_1^{0.6}) = -\log \frac{|R_1^{0.6} \cap I_1^3|}{|R_1^{0.6}|} = -\log \frac{32}{45} = 0.3409.$$

由  $H(I_1^2 | R_1^{0.6}) < H(I_1^1 | R_1^{0.6}) < H(I_1^3 | R_1^{0.6})$ , 认为专家  $I_2$  的评估更为准确, 即  $u_3 \succ u_2 \succ u_5 \succ u_6 \succ u_1 \succ u_4 \succ u_9 \succ u_8 \succ u_7$ , 故将选择  $u_3$  作为优秀员工, 且可确定专家  $I_2$  更公正合理, 更有能力担任评估工作.

4.4 基于  $\sigma$  劣势关系的多属性决策算法

输入: 备选方案的特征描述表, 专家组的评估  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$ , 参数  $\sigma$ ;

输出: 备选方案的排序以及最合适的专家  $I_j$ .

step 1: 由备选方案的特征描述表得出  $\sigma$  劣势关系矩阵.

step 2: 根据专家组的评估  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$  得到各专家的  $\sigma$  劣势关系矩阵.

step 3: 计算  $\sigma$  劣势关系条件熵为

$$H(I_2^k | R_2^\sigma) = -\log \frac{|R_2^\sigma \cap I_2^k|}{|R_2^\sigma|}, k = 1, 2, \dots, l.$$

step 4: 找出  $H(I_2^j | R_2^\sigma) = \min\{H(I_2^1 | R_2^\sigma), H(I_2^2 | R_2^\sigma), \dots, H(I_2^l | R_2^\sigma)\}$ , 则决策目标为  $I_j$ .

step 5: 由  $I_j$  的偏好信息得到备选方案的排序.

例 7 由特征描述表, 得到  $\sigma$  劣势类

$$\begin{aligned} [u_1]_2^{0.6} &= \{u_1, u_4, u_7, u_8, u_9\}, \\ [u_2]_2^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}, \\ [u_3]_2^{0.6} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}, \\ [u_4]_2^{0.6} &= \{u_4, u_7, u_8\}, \\ [u_5]_2^{0.6} &= \{u_1, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}, \\ [u_6]_2^{0.6} &= \{u_1, u_4, u_6, u_7, u_8\}, [u_7]_2^{0.6} = \{u_7, u_9\}, \\ [u_8]_2^{0.6} &= \{u_7, u_8\}, [u_9]_2^{0.6} = \{u_4, u_6, u_8, u_9\}. \end{aligned}$$

从而得到  $\sigma$  劣势矩阵

$$R_2^{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由专家的评估,  $\sigma$  劣势矩阵分别为

$$I_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

故计算各专家的  $\sigma$  劣势关系条件熵为

$$\begin{aligned} H(I_2^1 | R_2^{0.6}) &= -\log \frac{|R_2^{0.6} \cap I_2^1|}{|R_2^{0.6}|} = -\log \frac{33}{45} = 0.3102, \\ H(I_2^2 | R_2^{0.6}) &= -\log \frac{|R_2^{0.6} \cap I_2^2|}{|R_2^{0.6}|} = -\log \frac{42}{45} = 0.0690, \\ H(I_2^3 | R_2^{0.6}) &= -\log \frac{|R_2^{0.6} \cap I_2^3|}{|R_2^{0.6}|} = -\log \frac{32}{45} = 0.3409. \end{aligned}$$

由  $H(I_2^2 | R_2^{0.6}) < H(I_2^1 | R_2^{0.6}) < H(I_2^3 | R_2^{0.6})$ , 认为专家  $I_2$  的评估更为准确, 即  $u_3 \succ u_2 \succ u_5 \succ u_6 \succ u_1 \succ u_4 \succ u_9 \succ u_8 \succ u_7$ , 故公司将选择  $u_3$  作为优秀员工. 同样可确定专家  $I_2$  更公正合理, 更适合担任评估工作.

4.5 比较分析

为验证所提出方法的有效性和可行性, 本节将所提出方法与几种经典方法进行比较, 分别为加权算术

表 4 不同方法的排序结果

决策方法	排序结果
方法1( $\sigma$ 优势关系)	$u_3 \succ u_2 \succ u_5 \succ u_6 \succ u_1 \succ u_4 \succ u_9 \succ u_8 \succ u_7$
方法2( $\sigma$ 劣势关系)	$u_3 \succ u_2 \succ u_5 \succ u_6 \succ u_1 \succ u_4 \succ u_9 \succ u_8 \succ u_7$
WAA 算子方法	$u_3 \succ u_2 \succ u_6 \succ u_5 \succ u_1 \succ u_4 \succ u_9 \succ u_7 \succ u_8$
TOPSIS 方法	$u_3 \succ u_6 \succ u_2 \succ u_5 \succ u_1 \succ u_4 \succ u_9 \succ u_8 \succ u_7$
Zhang 等 <sup>[34]</sup> 的方法	$u_3 \succ u_2 \succ u_5 \succ u_6 \succ u_1 \succ u_4 \succ u_9 \succ u_8 \succ u_7$
Ye 等 <sup>[35]</sup> 的方法	$u_3 \succ u_2 \succ u_6 \succ u_5 \succ u_4 \succ u_7 \succ u_1 \succ u_9 \succ u_8$

平均(WAA)算子方法、理想解(TOPSIS)方法、Zhang等<sup>[34]</sup>的方法和Ye等<sup>[35]</sup>的方法. 一般而言,排序决策方法最终需要得到最优对象或最优排序方案,本文基于这2个目标与其他的方法进行比较. 对于例6的问题,上述方法的排序结果如表4所示.

为提高可视性,图4直观地展示不同方法排序结果的差异. 所提出方法1与方法2的排序结果是相同的,故在下述统称为本文方法.

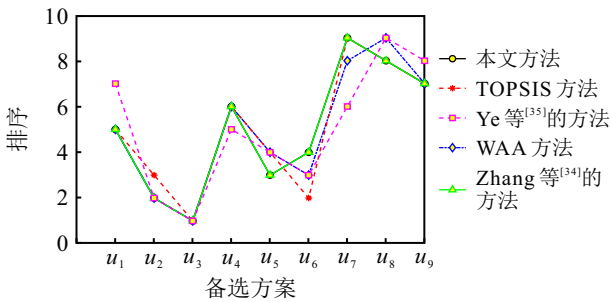


图4 本文方法与其他方法的排序结果比较

由图4可见,上述方法与本文方法得到的最优对象是一致的,均为 $u_3$ . 且上述方法均可得到完整的排序,这意味着决策者可根据实际需求选择合适的方法获得排序结果. 虽然其他方法与本文方法的排序并不完全相同,但是这些差异是被允许的,特别注意到Zhang等<sup>[34]</sup>的方法与本文方法排序结果高度一致.

为验证本文方法的有效性,将采用斯皮尔曼秩相关系数(SRCC)分析不同方法的排序结果间的相关性. SRCC的计算公式如下所示:

$$SRCC = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

其中: $n$ 为备选方案的个数; $d_i = x_i - y_i$ , $x_i$ 为给定方法备选方案 $u_i$ 的排名, $y_i$ 为另一种方法中备选方案 $u_i$ 的排名. 一般而言,当SRCC的值大于0.8时,表明2种方法的排序结果的相关程度是显著的.

本文方法与其他方法间的SRCCs,如表5所示.

表5 不同方法间的SRCCs

	本文方法	WAA	TOPSIS	Zhang等 <sup>[34]</sup> 的方法	Ye等 <sup>[35]</sup> 的方法
本文方法	1	0.9667	0.9500	1	0.8500
WAA算子方法	-	1	0.9667	0.9667	0.9167
TOPSIS方法	-	-	1	0.9500	0.8500
Zhang等 <sup>[34]</sup> 的方法	-	-	-	1	0.8500
Ye等 <sup>[35]</sup> 的方法	-	-	-	-	1

通过上述比较分析,验证了本文方法的有效性. 接下来,将分析本文方法与其他方法的差异. 基于这些讨论,总结本文方法的优点如表6所示.

表6 不同方法间的差异

不同的方法	多专家	决策偏好	排序
本文方法	√	√	√
WAA算子方法	×	×	√
TOPSIS方法	×	×	√
Zhang等 <sup>[34]</sup> 的方法	×	√	√
Ye等 <sup>[35]</sup> 的方法	×	×	√

由表6可见,上述不同方法间的差异如下.

1) 本文方法可对多位专家的决策进行比较,而其余方法均无法做到.

2) 本文方法和Zhang等<sup>[34]</sup>的方法均考虑了决策偏好,而其余的方法均无考虑这一信息.

3) 本文方法与其他方法均能够得到备选方案的排序.

#### 4.6 敏感性分析

为考察 $\sigma$ 的取值对排序结果的影响,接下来将对例6进行敏感性分析,结果如表7和表8所示.

表7  $\sigma$ 优势关系中不同 $\sigma$ 的排序结果

$\sigma$	$H(I_1^1   R_1^\sigma)$	$H(I_1^2   R_1^\sigma)$	$H(I_1^3   R_1^\sigma)$
(0, 0.2]	0.5371	0.5371	0.5596
(0.2, 0.4]	0.4729	0.4274	0.5452
(0.4, 0.6]	0.3102	0.0690	0.3409
(0.6, 0.8]	0.1466	0.0465	0.3185
(0.8, 1]	0	0	0.08

表8  $\sigma$ 劣势关系中不同 $\sigma$ 的排序结果

$\sigma$	$H(I_2^1   R_2^\sigma)$	$H(I_2^2   R_2^\sigma)$	$H(I_2^3   R_2^\sigma)$
(0, 0.2]	0.5371	0.5371	0.5596
(0.2, 0.4]	0.4729	0.4274	0.5452
(0.4, 0.6]	0.3102	0.0690	0.3409
(0.6, 0.8]	0.1466	0.0465	0.3185
(0.8, 1]	0	0	0.08

由表7和表8可见,专家 $I_2$ 的 $\sigma$ 优劣关系条件熵均是最小的,且2种方法均认为专家 $I_2$ 的评估更为准确,更公正合理,更适合担任评估工作.  $\sigma$ 越小,各备选方案间的比较越宽松,受到专家的影响越大;反之, $\sigma$ 越大,各备选方案间的比较越严格,受到自身属性的影响越大;当 $\sigma$ 取中间值时效果是最好的,此时各备选方案受到自身属性以及专家组评估的影响均

较为平衡,因此 $\sigma$ 优劣关系条件熵的区分性也更加明显. 决策者可根据需要适当调整 $\sigma$ 的值进行决策.

## 5 结论

考虑到传统的优势关系的条件过于苛刻,难以适用于多属性决策问题,且不同专家对事物的评价可能会有所不同,本文研究了一种基于 $\sigma$ 优劣关系的信息熵及其在多属性决策的应用. 首先,引入 $\sigma$ 优劣关系的概念,并定义了4种 $\sigma$ 优劣关系类;然后,在此基础上,提出了 $\sigma$ 优劣关系熵及其衍生熵,并探索一些重要性质以及它们之间的关系;最后,给出2种基于 $\sigma$ 优劣关系条件熵的多属性决策方法. 经过对比发现,本文方法的决策结果与WAA算子法、TOPSIS方法、Zhang等<sup>[34]</sup>的方法以及Ye等<sup>[35]</sup>的方法具有高度一致性,表明该决策算法是合理可行的. 同时,本文方法具有更广泛的适用性.

在未来的研究中,以下问题值得进一步考虑. 首先,在不同粒度层次上对动态信息的处理是个值得思考的问题;然后,在现实生活中许多数据往往是不完备的,如何在不完备信息系统中解决多属性决策问题也是一个值得思考的问题.

## 参考文献(References)

- [1] Pawlak Z. Rough sets[J]. *International Journal of Computer & Information Sciences*, 1982, 11(5): 341-356.
- [2] Pawlak Z. Rough sets and intelligent data analysis[J]. *Information Sciences*, 2002, 147(1/2/3/4): 1-12.
- [3] 李雪岩, 李学伟, 蒋君. 基于知识粒度特征的多目标粗糙集属性约简算法[J]. *控制与决策*, 2021, 36(1): 196-205.  
(Li X Y, Li X W, Jiang J. Multi objective rough set attribute reduction algorithm based on characteristics of knowledge granularity[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(1): 196-205.)
- [4] Huang Z H, Li J J, Qian Y H. Noise-tolerant fuzzy- $\beta$ -covering-based multigranulation rough sets and feature subset selection[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(7): 2721-2735.
- [5] Ding W P, Lin C T, Pedrycz W. Multiple relevant feature ensemble selection based on multilayer co-evolutionary consensus MapReduce[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(2): 425-439.
- [6] 王加阳, 帅勇, 张炜. 覆盖多粒度粗糙集的数值特征[J]. *控制与决策*, 2020, 35(1): 123-130.  
(Wang J Y, Shuai Y, Zhang W. Numerical characterization of multi-granular covering rough sets[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(1): 123-130.)
- [7] Zhan J M, Zhang X H, Yao Y Y. Covering based multigranulation fuzzy rough sets and corresponding applications[J]. *Artificial Intelligence Review*, 2020, 53(2): 1093-1126.
- [8] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation of a preference relation by dominance relations[J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 117(1): 63-83.
- [9] Zhang Y L, Li C Q. Relationships between relation-based rough sets and belief structures[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2020, 127: 83-98.
- [10] Sun B Z, Zhou X M, Lin N N. Diversified binary relation-based fuzzy multigranulation rough set over two universes and application to multiple attribute group decision making[J]. *Information Fusion*, 2020, 55: 91-104.
- [11] Yang L, Qin K Y, Sang B B, et al. Dynamic fuzzy neighborhood rough set approach for interval-valued information systems with fuzzy decision[J]. *Applied Soft Computing*, 2021, 111: 107679.
- [12] Sun L, Yin T Y, Ding W P, et al. Feature selection with missing labels using multilabel fuzzy neighborhood rough sets and maximum relevance minimum redundancy[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(5): 1197-1211.
- [13] Hu C X, Zhang L. Dynamic dominance-based multigranulation rough sets approaches with evolving ordered data[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2021, 12(1): 17-38.
- [14] Xin X W, Song J H, Xue Z N, et al. Multi-granular intuitionistic fuzzy three-way decision model based on the risk preference outranking relation[J]. *Cognitive Computation*, 2021, 14: 1826-1843.
- [15] Singh S, Shreevastava S, Som T, et al. A fuzzy similarity-based rough set approach for attribute selection in set-valued information systems[J]. *Soft Computing*, 2020, 24(6): 4675-4691.
- [16] Zhang X, Mei C L, Chen D G, et al. Active incremental feature selection using a fuzzy-rough-set-based information entropy[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(5): 901-915.
- [17] Yager R R. Uncertainty representation using fuzzy measures[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part B: Cybernetics*, 2002, 32(1): 13-20.
- [18] Hernández E, Recasens J. A reformulation of entropy in the presence of indistinguishability operators[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 128(2): 185-196.
- [19] Hu Q H, Yu D, Xie Z X, et al. Fuzzy probabilistic approximation spaces and their information measures[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(2):

- 191-201.
- [20] Qian Y H, Liang J Y. Combination entropy and combination granulation in rough set theory[J]. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2008, 16(2): 179-193.
- [21] Li Z W, Zhang P F, Ge X, et al. Uncertainty measurement for a fuzzy relation information system[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(12): 2338-2352.
- [22] 姚晟, 徐风, 吴照玉, 等. 基于邻域粗糙互信息熵的非单调性属性约简[J]. *控制与决策*, 2019, 34(2): 353-361.  
(Yao S, Xu F, Wu Z Y, et al. Non-monotonic attribute reduction based on neighborhood rough mutual information entropy[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(2): 353-361.)
- [23] Dai J H, Wang W T, Xu Q. An uncertainty measure for incomplete decision tables and its applications[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 43(4): 1277-1289.
- [24] Dai J H, Wang W T, Tian H W, et al. Attribute selection based on a new conditional entropy for incomplete decision systems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 39: 207-213.
- [25] Wang C Z, Huang Y, Shao M W, et al. Feature selection based on neighborhood self-information[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(9): 4031-4042.
- [26] Tan A H, Shi S W, Wu W Z, et al. Granularity and entropy of intuitionistic fuzzy information and their applications[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(1): 192-204.
- [27] Wang C Z, Huang Y, Shao M W, et al. Uncertainty measures for general fuzzy relations[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2019, 360: 82-96.
- [28] Wang C Z, Hu Q H, Wang X Z, et al. Feature selection based on neighborhood discrimination index[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(7): 2986-2999.
- [29] 刘培德, 滕飞. 基于共识模型和 ORESTE 的扩展概率语言多属性群决策方法[J]. *中国管理科学*, 2021, 29(3): 199-209.  
(Liu P D, Teng F. Multiple attribute group decision-making method based on consensus model and ORESTE method for extended probabilistic linguistic term set[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2021, 29(3): 199-209.)
- [30] 王泽林, 王应明. 基于后悔理论的考虑属性期望的随机多属性决策方法[J]. *系统工程学报*, 2020, 35(1): 48-59.  
(Wang Z L, Wang Y M. Stochastic multi-attribute decision making considering attribute aspirations based on regret theory[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2020, 35(1): 48-59.)
- [31] Zhan J M, Xu W H. Two types of coverings based multigranulation rough fuzzy sets and applications to decision making[J]. *Artificial Intelligence Review*, 2020, 53(1): 167-198.
- [32] Deng J, Zhan J M, Wu W Z. A three-way decision methodology to multi-attribute decision-making in multi-scale decision information systems[J]. *Information Sciences*, 2021, 568: 175-198.
- [33] Chen X H, Wu M J, Tan C Q, et al. A random intuitionistic fuzzy factor analysis model for complex multi-attribute large group decision-making in dynamic environments[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2021, 20(1): 101-127.
- [34] Zhang L, Zhan J M. Fuzzy soft  $\beta$ -covering based fuzzy rough sets and corresponding decision-making applications[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2019, 10(6): 1487-1502.
- [35] Ye J, Zhan J M, Xu Z S. A novel decision-making approach based on three-way decisions in fuzzy information systems[J]. *Information Sciences*, 2020, 541: 362-390.

### 作者简介

吴家明(1996—), 男, 硕士生, 从事粗糙集、不确定性分析及其应用等研究, E-mail: wjmuzzy@163.com;

黄哲煌(1980—), 男, 副教授, 博士, 从事粗糙集、粒计算等研究, E-mail: hqufuzzy@163.com;

李进金(1960—), 男, 教授, 博士, 从事一般拓扑学、粗糙集、概念格等研究, E-mail: jinjinlimnu@126.com;

刘丹玥(1997—), 女, 硕士生, 从事粗糙集、不确定性分析及其应用等研究, E-mail: dannyious@163.com.