控制与决策
Control and Decision

收缩理论在系统控制中的发展及应用

刘艳红, 李孟琪, 李方圆

引用本文:
刘艳红,李孟琪,李方圆. 收缩理论在系统控制中的发展及应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 719-727.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0018

收缩理论在系统控制中的发展及应用

刘艳红[1,2], 李孟琪[1,2], 李方圆[1,2†]

(1. 郑州大学 电气与信息工程学院，郑州 450001；
2. 郑州大学 河南省机器人感知与控制工程研究中心，郑州 450001)

摘　要: 收缩理论作为一种区别于Lyapunov理论的非线性系统分析方法,它主要基于微分几何和流体力学的知识发展而来,为系统控制提供了新颖视角和理论工具. 首先,介绍收缩理论的一些基础知识,以及收缩系统的联合、部分收缩理论和控制收缩度量等重要结果;然后,综述收缩理论在分析系统稳定性、跟踪控制、协同控制、状态估计以及学习控制等领域的应用现状;最后,对收缩理论的未来发展趋势进行展望.

关键词: 非线性系统；收缩理论；控制收缩度量；跟踪控制；协同控制；状态估计；学习控制

中图分类号: TP273　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0018

引用格式: 刘艳红,李孟琪,李方圆. 收缩理论在系统控制中的发展及应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 719-727.

Development of contraction theory in system control and its applications

LIU Yan-hong[1,2], *LI Meng-qi*[1,2], *LI Fang-yuan*[1,2†]

(1. School of Electrical and Information Engineering，Zhengzhou University，Zhengzhou 450001，China；2. Henan Province Robot Sensing and Control Engineering Research Center，Zhengzhou University，Zhengzhou 450001，China)

Abstract: As a nonlinear system analysis method different from the Lyapunov theory, contraction theory is developed mainly based on the differential geometry and fluid dynamics, providing novel aspects and tools for the system control. In this paper, we introduce some basics of the contraction theory, including the combinations of contracting systems, partial contraction theory and control contraction metrics. Then we review some applications of the contraction theory, such as analyzing system stability, tracking control, cooperative control, state estimation and learning control. The prospect of the future development trend of the contraction theory is presented finally.

Keywords: nonlinear system；contraction theory；control contraction metrics；tracking control；cooperative control；state estimation；learning control

0　引　言

由于不满足齐次性和叠加性,非线性系统的性态比线性系统要丰富得多也复杂得多[1],其稳定性不仅取决于系统的结构以及参数,还与初始条件有关. 非线性系统的分析方法发展至今,经历了相平面法、描述函数法、Lyapunov方法等. 现今最广泛应用的是Lyapunov方法,它是一种分析平衡点稳定性的方法,即系统受到影响偏离平衡点后恢复的能力,强调的是对系统初始条件的连续性. 在控制理论的发展过程中,增量稳定性逐渐代替常规的稳定性,也就是说特定目标解的收敛渐渐被任意解之间的收敛所取代,如跟踪问题、同步问题等. 增量稳定性问题常常被转化为适当误差系统的常规稳定性问题来解决,然而,这种思路在面对时变问题或者涉及到如何构造轨迹间合适的误差问题时,存在一定的不足[2-3].

伴随着代数分析方法的发展,借助微分几何工具分析非线性系统性质的控制方法取得了很多进展,代表性的方法有精确线性化、反步法等. 收缩理论基于流体力学和微分几何的相关知识提出[4],其利用虚位移的概念来研究系统在变分形式下的稳定性. Lohmiller 等[4] 在 1998 年正式提出收缩理论, Wang 等[5] 在此基础上进一步提出了部分收缩理论. 随后, Manchester等[6-7] 进而提出了控制收缩度量(control contraction metric, CCM)的概念,将收缩理论从稳定性分析扩展到了构造性的非线性控制设计中. 收缩理论的基本思想是,如果存在一个区域,且在

收稿日期: 2023-01-05；**录用日期:** 2023-06-28.

基金项目: 国家重点研发计划项目(2020YFB1313700)；国家自然科学基金项目(62203397)；河南省外国专家项目(GZS2019008)；中国博士后科学基金项目(2020M682346).

责任编委: 王燕舞.

[†]通讯作者. E-mail: fylimas@zzu.edu.cn.

该区域内系统的初始条件或暂时扰动能够被“遗忘”,即系统的最终行为与初始条件无关,则系统在该区域就是收缩的[4],即利用收缩理论来讨论稳定性并不需要知道系统的标称状态或平衡点信息. 收缩理论的提出意味着分析系统的收敛性不再需要明确构造轨迹间彼此收敛的距离,可以用无穷小的收缩量即虚位移的积分来代替,也就是说,通常情况下,难以处理的全局分析所需的距离构造可以用局部构造来代替. 另外,收缩理论意义下的稳定性本质上是一种增量稳定性[7-8].

在收缩理论的发展过程中,不断结合其他方法,其内涵和外延都变得更加充实;而在其他方法中引入收缩理论,也不断产生新的活力. 本文介绍了收缩理论的发展历程,阐述了其基本定义与理论,并分析了收缩理论在稳定性分析、跟踪控制、协同控制、状态估计等领域的应用现状.

1 发展历程

1.1 基础理论

Lohmiller等[4]在Automatica上发表了文章“On contraction analysis for nonlinear systems”,标志着收缩理论的正式提出. 从历史上看,收缩理论的源头可追溯到更早Lewis关于Finsler度量的研究结果[9]以及Hartman对偏微分方程的研究结论[10]. 考虑一个一般的确定性非线性系统

$$\dot{x}=f(x,t). \tag{1}$$

其中: f是一个$n\times 1$线性向量函数, x是一个$n\times 1$维的状态向量. 假设所有的变量都是光滑的,即其各阶偏导数都是存在且连续的.

虚位移定义为固定时间处的无穷小位移,对于系统流场中的两条相邻轨迹,它们之间的虚位移记为δx,那么它随时间的变化率可计算为

$$\delta\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\delta x, \tag{2}$$

其中$\partial f/\partial x$称作系统(1)的Jacobian矩阵. 根据微分几何相关知识可知,这两条相邻轨迹间的平方距离可以定义为$\delta x^{\mathrm{T}}\delta x$,它随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\mathrm{T}}\delta x)=2\delta x^{\mathrm{T}}\delta\dot{x}=2\delta x^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x. \tag{3}$$

用$\lambda_{\max}(x,t)$表示雅可比矩阵$\partial f/\partial x$对称部分的最大特征值,即$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}^{\mathrm{T}}\Big)$的最大特征值,那么可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\mathrm{T}}\delta x)\leqslant 2\lambda_{\max}\delta x^{\mathrm{T}}\delta x, \tag{4}$$

进而可得

$$\|\delta x\|\leqslant\|\delta x_0\|\mathrm{e}^{\int_0^t\lambda_{\max}(x,t)\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

其中$\|\cdot\|$表示2-范数. 假设$\lambda_{\max}(x,t)$是严格一致负定的,则任意无穷小位移$\|\delta x\|$都指数收敛于0. 进一步,对$\|\delta x\|$进行路径积分可知,任意有限路径长度也都指数收敛到0. 由此,有如下收缩域定义和收缩定理.

定义1 (收缩域[4]) 已知系统方程$\dot{x}=f(x,t)$,如果在状态空间的某区域雅克比矩阵$\partial f/\partial x$是一致负定的$\Big($即$\exists\beta>0,\forall x,\forall t\geqslant 0,\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}^{\mathrm{T}}\Big)\leqslant -\beta I<0\Big)$,则该区域称为收缩区域.

定理1 (收缩定理[4]) 已知系统方程$\dot{x}=f(x,t)$,考虑存在一个球心在给定轨迹上、半径恒定且始终在收缩区域内的球,则任意起始于球内的轨迹都将始终保持在该球内,并且指数收敛到给定轨迹. 如果整个状态空间都是收缩区域,则可以保证系统状态对给定轨迹的全局指数收敛性.

考虑更一般的情形,首先定义如下微分长度:

$$\delta z=\Theta\delta x, \tag{6}$$

其中$\Theta(x,t)$是一个连续可微的可逆方阵. 接着平方长度可以表示为

$$\delta z^{\mathrm{T}}\delta z=\delta x^{\mathrm{T}}M\delta x, \tag{7}$$

其中$M(x,t)=\Theta^{\mathrm{T}}\Theta$表示一个对称且连续的可微度量. 通常情况下,式(6)是不可积的,所以无法得到明确的坐标$z(x,t)$. 然而, δz和$\delta z^{\mathrm{T}}\delta z$总是可定义的,如果假设$M$是一致正定的,则$\delta z$指数收敛到0就意味着$\delta x$也是指数收敛到0的.

根据式(6),虚位移δz随时间变化速率计算为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta z=\dot{\Theta}\delta x+\Theta\delta\dot{x}=\Big(\dot{\Theta}+\Theta\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Theta^{-1}\delta z, \tag{8}$$

其中广义雅可比矩阵为

$$F=\Big(\dot{\Theta}+\Theta\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Theta^{-1}. \tag{9}$$

此时平方长度的时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta z^{\mathrm{T}}\delta z)=2\delta z^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta z=2\delta z^{\mathrm{T}}F\delta z,$$

则在一致负定的区域F中,可知δz指数趋近于0.

进而, $\delta x^{\mathrm{T}}M\delta x$的时间导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\mathrm{T}}M\delta x)=\delta x^{\mathrm{T}}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}^{T}M+\dot{M}+M\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\delta x,$$

那么在区域

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}^{\mathrm{T}}+\dot{M}+M\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\leqslant-\beta_M M$$

内就可以得到系统所有状态指数收缩到单个轨迹的结论,其中β_M是一个严格的正常数. 针对该指数收敛性,有如下广义收缩域定义和广义收缩定理.

定义2 (广义收缩域[4]) 已知系统方程$\dot{x}=f(x,t)$,如果在方程(9)中的等效F或$\frac{\partial f}{\partial x}^{\mathrm{T}}+\dot{M}+M\frac{\partial f}{\partial x}$在

状态空间的某区域内一致负定时,则该区域就是相对于一致正定度量$M(x,t)=\Theta^{\mathrm{T}}\Theta$的收缩区域.

定理2 (广义收缩定理[4]) 已知系统方程$\dot{x}=f(x,t)$,考虑一个球心在给定轨迹上、半径相对于度量$M(x,t)$恒定且始终包含在相对于度量$M(x,t)$的收缩区域内的球,则任意起始于球内的轨迹都将始终保持在该球内,并且指数收敛于该轨迹. 如果整个状态空间是相对于度量$M(x,t)$的收缩区域,则可保证系统状态对给定轨迹的全局指数收敛性.

1.2 收缩系统的联合

将多个收缩子系统联合起来可得到全局的收缩系统[4],那么,通过研究子系统的收缩行为可以证明整个系统的全局收缩性.

1.2.1 并行联合

已知两个相同维度的系统

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,t),\ \dot{x}_2=f_2(x_2,t),$$

及其虚拟动力学

$$\delta\dot{z}_1=F_1\delta z,\ \delta\dot{z}_2=F_2\delta z,$$

并将它们以平行的组合连接起来. 如果这两个系统在同一度量中收缩,则可以进行一致正定的叠加,即

$$\alpha_1(t)\delta\dot{z}_1+\alpha_2(t)\delta\dot{z}_2,\ \exists\alpha>0,\ \forall t\geqslant 0,\ \alpha_i(t)\geqslant\alpha.$$

1.2.2 反馈联合

已知两个可能不同维度的系统

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,t), \tag{10}$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,t), \tag{11}$$

并以反馈联合的形式连接起来,可得虚拟动力学为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\delta z_1\\ \delta z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1 & G\\ -G^{\mathrm{T}} & F_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta z_1\\ \delta z_2\end{bmatrix}. \tag{12}$$

根据其Jacobian矩阵的反对称性,若F_1和F_2是一致负定的,则其对应的平方距离函数满足式(4),那么此时系统就是指数收缩的.

1.2.3 分层联合

考虑系统(10)和(11),通过分层联合形式连接起来,可得其虚拟动力学为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\delta z_1\\ \delta z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{11} & 0\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta z_1\\ \delta z_2\end{bmatrix}, \tag{13}$$

并假设F_{21}是有界的. 由于式(13)的第1行方程不依赖于第2行方程,当F_{11}一致负定时,δz_1可指数收敛到零. $F_{21}\delta z_1$可视作第2行方程中的指数衰减扰动,那么一致负定的F_{22}意味着δz_2可指数收敛到一个指数衰减球,进而可得整个系统的状态都全局指数收敛到一个单一轨迹.

1.3 部分收缩理论

部分收缩理论[5]是收缩理论的进一步扩展,通过引入虚拟辅助系统的概念,为研究大规模系统的稳定性提供了一个非常通用的分析工具.

定理3 如果非线性系统可以写为

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t),t), \tag{14}$$

并假设存在辅助系统

$$\dot{y}(t)=f(y(t),x(t),t), \tag{15}$$

且其关于y是收缩的. 如果可以验证辅助系统的一个特解具有一个平滑的特定性质(特定性质可以是状态变量之间的关系,或者仅仅是特定轨迹之间的关系),则该非线性系统的所有轨迹都会指数收敛到该特解,因此也具有这一特定的平滑性质. 这样原始系统可称为是部分收缩的.

该定理的特别之处在于,可以只分析系统(14)中某些特定部分的收缩性,而将其余部分视作时变参数$x(t)$的函数. 所以严格来说,原始系统是部分收缩的. 部分收缩分析扩展了收缩分析的应用范围,所以收缩也可以视为部分收缩的一部分.

1.4 控制收缩度量

Manchester等[6-7]正式提出CCM的概念,将收缩分析扩展到了构造性的非线性控制设计中. CCM可以作为给定非线性系统所有可行轨迹指数稳定的充分条件,这些条件都有简单的几何解释: 与控制输入范围正交的方向上的小位移必须是“自然”收缩的. 另外,这些条件可以写成一个凸的可行性问题,且在坐标变换下是不变的. CCM的概念类似于非线性系统线性调节的控制Lyapunov函数(control Lyapunov function, CLF),它的主要用途可以通过计算合适的δ_u的路径积分来构造稳定控制器.

在系统(1)中加入一个控制仿射项可得一个仿射非线性系统

$$\dot{x}=f(x,t)+B(x,t)u. \tag{16}$$

其中: u为一个$m\times 1$维的控制向量; $B(x,t)$为一个$n\times m$维的光滑矩阵函数,且定义其第i列向量表示为$b_i(x,t)\neq 0, i=1,2,\dots,m$. 接下来可写出式(16)对应的微分动力学(沿解$x(t),u(t)$)方程

$$\delta\dot{x}=A(x,u,t)\delta x+B(x,t)\delta u, \tag{17}$$

其中$A=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial b_i}{\partial x}u_i$.

定理4 假设存在一个微分反馈控制律$\delta u=K(x,u,t)\delta x$,可使闭环系统对于度量$M(x,t)$以速率$\lambda$严格指数收缩,则对于所有的$x,u,t$和$\delta x\neq 0$,都有

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\mathrm{T}}M(x,t)\delta x) < -2\lambda\delta x^{\mathrm{T}}M(x,t)\delta x$,即有:

1) 如果$\delta x \neq 0$满足$\delta x^{\mathrm{T}}MB = 0$,则

$$\delta x^{\mathrm{T}}\Big(\dot{M} + \frac{\partial f}{\partial x}\ M + M\frac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda M\Big)\delta x < 0, \tag{18}$$

其中$\dot{M} = \frac{\partial M}{\partial t} + \partial_f M$,方向导数$\partial_f M = \sum_i \frac{\partial M}{\partial x_i} f_i$.

2) 对于每个$i = 1, 2, \ldots, m$,有

$$\partial_{b_i}M + \frac{\partial b_i}{\partial x}^{\mathrm{T}} M + M\frac{\partial b_i}{\partial x} = 0. \tag{19}$$

条件(18)说明不受控系统在与控制输入范围正交的方向上是收缩的. 条件(19)则保证,即使u很大且符号未知,也不会导致$\|\delta x\|$的扩展,且在形式上它表示向量场b_i是度量$M(x,t)$的Killing向量场. 如果B为$[0, I]^{\mathrm{T}}$的形式,其中0和I分别是合适维数的零矩阵和单位矩阵,则条件(19)意味着M不依赖于后m个状态变量. 另外,若系统(16)为自治系统,则$\dot{M}$不包含其关于时间t的偏导数项,即$\dot{M} = \partial_f M$.

对于该定理,由于存在一个微分控制器δu可稳定变分动力学方程(17),所以函数$\delta x^{\mathrm{T}}M(x,t)\delta x \triangleq V(x,\delta x)$可以理解为一个微分的CLF. 更重要的是,通过在状态空间中逐点稳定变分动力学方程(17),即沿连接期望和实际状态轨迹的曲线对镇定微分控制器进行积分,就可以得到一个原非线性系统的稳定控制器. 对于该镇定微分控制器的求解,需首先利用Finsler定理[11],将条件(18)等价地转换为如下定理.

定理5 条件(18)等价于存在一个标量乘子$\rho(x,t)$,使得对于所有的x, t,都有

$$\dot{M} + \frac{\partial f}{\partial x}^{\mathrm{T}} M + M\frac{\partial f}{\partial x} - \rho MBB'M + 2\lambda M < 0. \tag{20}$$

由此可构造反馈控制增益为

$$K(x,t) = -\frac{1}{2}\rho(x,t)B(x,t)'M(x,t),$$

因其与u无关,所以是路径可积的.

为说明条件的凸性,考虑坐标变换$\eta = M(x,t)\delta x$和$W(x,t) = M(x,t)^{-1}$,这里W称作是对偶的CCM. 假设存在一个微分反馈$\delta u = K(x,u,t)\delta x$,式(20)可以等价地写为

$$-\dot{W} + W\frac{\partial f}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{\partial f}{\partial x}W - \rho BB' + 2\lambda W < 0, \tag{21}$$

其中:$\dot{W} = \partial W/\partial t + \partial_f W$,且式(21)对于$W$和$\rho$是联合凸的,进而可得微分反馈增益的显式构造. 参数W和ρ可通过求解该线性矩阵不等式(21)得到,当系统(16)是多项式动态或可近似为多项式动态时,可采用平方和(sum-of-squares, SOS)规划方法[12]来求解.

收缩理论在发展过程中不断与其他方法相结合,如鲁棒控制[13]、凸优化[8,14]、自适应控制[15-16]、强化学习[17]、反步控制[18-19]、动态面控制[20-21]等,使其理论更加充实.

2 应用分析

这一部分主要介绍收缩理论在近年来的应用,重点说明收缩理论在分析闭环系统的稳定性、跟踪控制、协同控制等领域的应用方法和思路. 收缩理论作为一个分析非线性系统稳定性的新视角,主要是利用微分几何知识来分析系统变分形式下的稳定性,与传统的Lyapunov方法有着明显的区别. Lyapunov方法研究的是系统相对于平衡点的稳定性,而收缩理论研究的是系统的增量稳定性.

例1 收缩理论研究轨迹间的增量稳定性,也就是说不需要系统具有一个稳定的点. 考虑如下系统:

$$\dot{x} = -x + \mathrm{e}^t,$$

其Jacobian矩阵是一致负定的,所以该系统是指数收缩的. 然而,该系统只有一个唯一解为

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \Big(x(0) - \frac{1}{2}\Big)\mathrm{e}^{-t},$$

显然系统是不稳定的. 这说明对于某些系统,虽然系统是不稳定的,但却可以证明是收缩的.

2.1 稳定性分析

收缩系统的反馈联合(12)和分层联合(13)结构有着显著的“下三角”特征[22],可代替Lyapunov理论作为反步控制中的稳定性准则,这种方法称为收缩反步法,不仅无需构造合适的Lyapunov函数,在一定程度上也可降低问题的复杂性. Jouffryo等[19]通过引入积分器研究了基于收缩理论的反步控制. Sharma等[23]针对非线性参数严反馈系统设计了收缩反步控制器,并进行了系统的分析与阐述; Zamani等[24]进一步将其扩展到了更一般的系统情形,并分析了其增量稳定性. 通过与自适应控制相结合,收缩反步法也可以用于解决含有不确定性的系统分析中[18].

以反馈联合形式的收缩反步法为例,具体分析过程如下.

例2 考虑一个非线性参数严反馈系统[23]

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1 x_2, \tag{22}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2 x_3, \tag{23}$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + u. \tag{24}$$

其中:x_1, x_2, x_3为系统状态;f_1, f_2, f_3是光滑的非线性函数;g_1, g_2是非零常数;u为控制输入.

step 1: 设$\alpha_1(x_1)$为一个虚拟控制输入,可使第1个子系统(22)关于x_1收缩. 定义一个辅助变量$z_1 =$

$x_2 - \alpha_1(x_1)$,则该子系统可写为

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1\alpha_1(x_1) + g_1 z_1. \tag{25}$$

在等号两边对时间求变分可得

$$\delta\dot{x}_1 = J_{11}\delta x_1 + g_1\delta z_1. \tag{26}$$

其中: J_{11} 为一个 1×1 维的Jacobian矩阵,具体为

$$J_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}[f_1(x_1) + g_1\alpha_1(x_1)]. \tag{27}$$

通过适当选择 α_1,并将 $g_1\delta z_1$ 视作有界外部输入,即可使 J_{11} 是一致负定的.

step 2: 对 z_1 求时间导数,并利用式(23),可得

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1(x_1) = f_2(x_1, x_2) + g_2 x_3 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1. \tag{28}$$

设一个新的虚拟控制输入 $\alpha_2(x_1, z_1)$,可使式(28)关于 z_1 是收缩的,也就是第2个子系统是收缩的,且保证子系统(25)和(28)是反馈互联的. 定义新的辅助变量 $z_2 = x_3 - \alpha_2(x_1, z_1)$,则式(28)可表示为

$$\dot{z}_1 = f_2(x_1, x_2) + g_2 z_2 + g_2\alpha_2(x_1, z_1) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1. \tag{29}$$

将前两个子系统组合起来,可得其变分形式为

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{z}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta z_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ g_2\end{bmatrix}\delta z_2. \tag{30}$$

其中

$$J_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big[f_2(x_1, x_2) + g_2\alpha_2(x_1, z_1) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1\Big],$$

$$J_{22} = \frac{\partial}{\partial z_1}\Big[g_2\alpha_2(x_1, z_1) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1\Big],\ J_{12} = g_1.$$

同样,通过选择合适的 $\alpha_2(x_1, z_1)$,并将 δz_2 视为有界外部输入,即可使 J 是一致负定的.

step 3: 对 z_2 求时间导数并利用式(24)可得

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2(x_1, z_1) =$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) + u - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial\alpha_2}{\partial z_1}\dot{z}_1. \tag{31}$$

通过选择合适的控制输入 u,可以确保最后一个子系统(24)关于 z_2 是收缩的. 则整个系统的变分形式可以表示为

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{z}_1\\ \delta\dot{z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}J_{11} & J_{12} & J_{13}\\ J_{21} & J_{22} & J_{23}\\ J_{31} & J_{32} & J_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta z_1\\ \delta z_2\end{bmatrix}. \tag{32}$$

其中

$$J_{13} = 0,\ J_{23} = g_2,\ J_{33} = \frac{\partial}{\partial z_2}\Big[u - \frac{\partial\alpha_2}{\partial z_1}\dot{z}_1\Big],$$

$$J_{31} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big[f_3(x_1, x_2, x_3) + u - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial\alpha_2}{\partial z_1}\dot{z}_1\Big],$$

$$J_{32} = \frac{\partial}{\partial z_1}\Big[u - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial\alpha_2}{\partial z_1}\dot{z}_1\Big].$$

总的来说,只要选择合适的控制输入 u 和虚拟控制 α_1, α_2,使得整个系统的Jacobian矩阵是一致负定的且满足反馈联合结构,便可得到整个系统收缩的结论,也就意味着系统是指数稳定的.

与传统的反步法相比,利用基于反馈联合形式的收缩反步法不需要在反步法的每一步都构造合适的Lyapunov函数来保证各子系统的稳定性,尤其是当该系统扩展到更多维的情形时,收缩反步方法具有较为统一的矩阵结构,如例2中的式(30)和(32),一定程度上可以降低问题的复杂性. 另外,由于收缩分析过程不依赖于系统平衡点的具体信息,在分析过程中只需保证各阶子系统的收缩性即可.

除了对一般非线性系统进行稳定性分析,将收缩理论用于特殊非线性系统也取得了一定成果,如重置混合非线性系统[25]、分数阶非线性系统等[26].

2.2 跟踪控制

跟踪控制是非线性控制领域中的一个经典问题. 收缩理论作为一种沿系统的解微分地研究非线性系统的方法,在研究时变系统的跟踪问题时具有独特的优势. Manchester等[27]将CCM用于机器人的跟踪控制器设计, Yi等[28]给出了基于收缩理论实现非线性系统在几种跟踪控制目标下的必要条件. 值得注意的是,由于收缩行为在某种程度上独立于吸引子,稳定和跟踪之间在概念上没有显著区别,进而上述的稳定性分析情形同样适用于跟踪控制.

例3 考虑如下的拉格朗日系统[29-30]:

$$\dot{q} = v, \tag{33}$$

$$H(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v + G(q) = u. \tag{34}$$

设跟踪的期望信号为 q_d.

step 1: 定义辅助变量 $\xi_1 = q - q_d$,求微分可得

$$\dot{\xi}_1 = \dot{q} - \dot{q}_d = v - \dot{q}_d. \tag{35}$$

设计虚拟控制量 v_r,使得第1个子系统对 ξ_1 是收缩的,再定义第2个辅助变量 $\xi_2 = v - v_r$,式(35)变为

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 + v_r - \dot{q}_d,$$

其变分形式可表示为

$$\delta\dot{\xi}_1 = h_{11}\delta\xi_1 + h_{12}\delta\xi_2. \tag{36}$$

其中: $h_{11} = \partial[v_r - \dot{q}_d]/\partial\xi_1$, h_{12} 为 $n\times n$ 维的单位矩阵. 为保证该子系统对 ξ_1 是收缩的,虚拟控制量 v_r 设计为

$$v_r = \dot{q}_d - a_1\xi_1, \tag{37}$$

其中 $a_1 > 0$ 是一个赫尔维茨常数矩阵.

step 2: 对第2个辅助变量 $\xi_2 = v - v_r$ 求时间的导

数,可得

$$\dot{\xi}_2 = \dot{v} - \dot{v}_r = H(q)^{-1}[u - C(q,\dot{q})v - G(q)] - \ddot{q}_d + a_1(v - \dot{q}_d). \tag{38}$$

联合两个子系统,整个系统的变分动态可写为

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{\xi}_1\\ \delta\dot{\xi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\xi_1\\ \delta\xi_2\end{bmatrix}. \tag{39}$$

为使式(39)满足反馈联合收缩系统的结构,可要求

$$h_{11} = -a_1,\ h_{12} = -h_{21}^{\mathrm{T}},\ h_{22} = -a_2,$$

其中$a_2 > 0$也是一个赫尔维茨常数矩阵. 由此,实际控制量可以设计为

$$u = C(q,\dot{q})v + G(q) + H(q)\ddot{q}_d - H(q)a_1(v - \dot{q}_d) - H(q)\xi_1 - H(q)a_2\xi_2. \tag{40}$$

利用收缩反步方法,通过使期望轨迹与实际轨迹间的虚位移趋于零,可得到轨迹跟踪控制器,同时通过收缩子系统的反馈联合结构保证了闭环系统的稳定性. 另外,该例系统中的变量和参数都不是标量,所以该设计方法也称作矢量收缩反步法[31]. 由于该例中系统是一个拉格朗日系统模型,很容易用于实际物理系统的控制器设计中.

CCM是给定非线性系统所有可行轨迹指数收敛的充分条件,所以式(21)可作为设计跟踪控制器的构造性条件. 为此,首先构造一个连接期望轨迹$x^*(t)$与实际轨迹$x(t)$的最短路径(测地线)$\gamma(s), s\in[0,1]$,即$\gamma(0) = x^*(t), \gamma(1) = x(t)$,且该测地线是关于度量$M$构造的. 然后对微分控制器$\delta u = K(x,u,t)\delta x$沿该路径求积分,可得实际控制器为

$$u(t,s) = u^*(t) + \int_0^s \delta u\Big(\gamma(\kappa), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(\kappa), \upsilon(t,\kappa)\Big)\mathrm{d}\kappa. \tag{41}$$

注意到: $s = 0$时$\upsilon(t,0) = u^*$, $s = 1$时$\upsilon(t,1) = u$. 根据定理5,式(41)可以进一步写为

$$u(t) = u^*(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 \rho(\gamma(s),t)B(t)^{\mathrm{T}}M(\gamma(s),t)\frac{\partial\gamma}{\partial s}\mathrm{d}s. \tag{42}$$

一般来说,该过程会涉及到在线优化来寻找测地线γ. 这种在线计算方法类似于非线性模型预测控制,但是没有动态约束,维数也比较低. 测地线的间接计算方法有相流法[32]、快速步进法[33]、图割法[34]等,缺点是收敛半径小. 直接方法是将一个最短路径或最优控制问题离散化,然后用一般方法求解由此产生的非线性问题. 典型的方法包括单次/多次拍摄[35]、全局伪谱法[36.37]、连续时间动态实现方法[38]等. 另外,如果非线性系统是全驱动的,则不等式(21)可以通过解析法求解[27].

如果度量M、ρ和B都与状态x无关,测地线就是直线,则得到的反馈控制器就是一个线性反馈控制器,即

$$u(t) = u^*(t) - \frac{1}{2}\rho B^{\mathrm{T}}M(x(t) - x^*(t)). \tag{43}$$

目前,收缩理论不仅应用于一般非线性系统的跟踪问题,也可以应用于各种特殊非线性系统,如哈密顿系统[39-40]、人类操纵[41]等.

运动规划作为跟踪控制前要完成的工作,近年来收缩理论也为其提供了新的解决思路. Singh等[8,14]、Zhao等[42]利用收缩理论开发了具有优化控制不变管状约束的轨迹跟踪反馈控制器,解决了有界外部干扰下的鲁棒运动规划问题. Tsukamoto等[43]利用收缩理论为基于机器学习的非线性运动规划器提供了鲁棒性和稳定性保证.

2.3 协同控制

收缩理论可应用于各种特定系统的分析,根据收缩理论研究相邻解轨迹之间的增量稳定性的本质,可以将其用于分布式系统[44]以及复杂网络[5]分析中,并自然地用于多智能体的协同控制[45-46].

Wang等[5]利用部分收缩理论得到了耦合的非线性系统的同步条件,且系统数量可以是任意的. 随后,他们又进一步证明了无论是对于无领导者还是领导跟随情形的多智能体系统,收缩理论对于具有时滞都有很好的鲁棒性,且不限制延迟已知或者相等[47]. 这里的控制设计思路大致如下.

考虑一个非线性的多智能体系统[48]

$$\dot{x}_{i1} = h_{i1}(x_{i1}) + x_{i2}, \tag{44}$$

$$\dot{x}_{i2} = h_{12}(x_{i1}, x_{i2}) + u_i,\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{45}$$

为使系统状态达到一致或者实现同步,首先定义误差,并将误差系统表示为微分形式

$$\delta\dot{e} = \frac{\partial g(e)}{\partial e}\delta e + B\delta\eta,\ \delta\dot{\eta} = \frac{\partial h(e)}{\partial e}\delta e; \tag{46}$$

然后设计Finsler-Lyapunov函数为

$$V(e_1,\delta e_1,\delta e_2,\delta\eta) = V_1(e_1,\delta e) + V_2(\delta\eta) = \delta e^{\mathrm{T}}P(e_1)\delta e + \delta\eta^{\mathrm{T}}\eta.$$

通过设计合适的控制器使函数满足$\dot{V} < 0$,进而实现一致性的控制目标.

2.4 状态估计

收缩理论的一大特点是其不依赖于系统的平衡点或标称状态信息,而Lyapunov方法则需要已知平衡点信息,然后用其构造观测误差的Lyapunov函

数. 该特点恰恰使得收缩分析特别适合观测器的设计.

考虑非线性系统(1),设系统输出为

$$y(t)=Cx(t). \tag{47}$$

其中: y为$r\times 1$维的向量函数, C为$r\times n$维的矩阵,代表可测量状态的可用性. 然后,其观测器可以设计为

$$\dot{\widehat{x}}=f(\widehat{x},t)+L(y-\widehat{y}). \tag{48}$$

其中: $\widehat{x}$为观测器状态, L为$n\times r$维的观测器增益矩阵,且$\widehat{y}=C\widehat{x}$. 接下来,非线性系统(1)和观测器(48)的虚拟系统的动力学可以写为

$$\dot{\eta}=f(\eta,t)+L(y-y_v). \tag{49}$$

此时,系统非线性系统(1)和观测器(48)都是该虚拟系统的特解. 由于该虚拟系统的输出为$y_v=C\eta$,则虚拟系统(49)可以进一步写为

$$\dot{\eta}=f(\eta,t)+LC(x-\eta). \tag{50}$$

对式(50)求时间变分可得

$$\delta\dot{\eta}=\Big[\frac{\partial f(\eta,t)}{\partial\eta}-LC\Big]\delta\eta=J\delta\eta=J_s\delta\eta, \tag{51}$$

其中J_s为Jacobian矩阵J的对称部分. 通过寻找合适的观测器增益L,即可保证J_s的一致负定性. 根据部分收缩理论,如果虚拟系统的Jacobian矩阵是一致负定的,即虚拟系统是收缩的,则它的特解会以指数形式相互收敛,进而使观测器的状态向量$\widehat{x}$指数收敛到实际系统的状态向量x.

在此领域, Sharma等[46]提出了一种基于收缩理论的自适应观测器设计方法,将观测器设计推广到了具有参数不确定性的非线性系统. 针对随机非线性系统[49-50],基于收缩理论可设计全局指数稳定的观测器,以克服非线性和随机不确定性的问题. Yi等[51]利用收缩分析和凸优化设计了使非线性系统全局收敛的降阶观测器,用来估计未知部分的系统状态.

2.5 学习控制

将收缩理论与基于学习的方法相结合,不仅可以强化基于学习和数据驱动的控制框架,还可以提供系统的形式最优性、稳定性和鲁棒性. Singh等[17]利用收缩理论、统计学习和凸优化,提出了一种通用且易于操作的半监督算法来学习可稳定的动力学框架,用于机器人的连续控制任务. 强化学习主要是从一小组采样轨迹中估计一个未知的动力学,即

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)), \tag{52}$$

然后将估计的动态模型与反馈策略配对,以在动态且不确定的环境下运动. 稳定性主要通过将CCM条件转化为一个凸线性矩阵不等式约束来保证.

Sun等[52]利用CCM的相关理论,设计了一个基于神经网络的学习框架,用以实现同时合成控制仿射系统的控制器以及CCM,不需额外的结构性假设,且避免了求解测地线和系统动力学为多项式方程或近似为多项式的要求. Tsukamoto等[53]提出了神经收缩度量的概念,即一个最优收缩度量和相应的微分Lyapunov函数的神经网络模型,该模型的存在是非自治非线性系统轨迹指数增量稳定的充要条件. 此外,针对随机系统和参数不确定性系统,还有对应的神经随机收缩度量[54]和自适应神经收缩度量[55].

3 结论与展望

本文主要介绍了收缩理论的一些基础知识及其应用. 收缩理论具有区别于Lyapunov理论的显著特征,其分析的是非线性系统在状态空间形式下任意的一对相邻轨迹间的指数收敛性,也是增量稳定性,不仅不需要已知系统的平衡点或标称状态信息,也无需构造合适的Lyapunov函数. 而部分收缩理论更是为稳定性的分析提供了新的角度和思路,即只分析系统中某些特定部分的收缩性. 收缩理论在过去几十年发展过程中,不断与其他方法相结合,也不断应用于各种系统和各种控制情形,已经取得了比较丰富的理论成果. 然而,收缩理论作为一种较为新颖的非线性控制方法,与微分几何理论具有相当深入的关联,以至于目前而言其理论应用仍然不够广泛,较少应用于实际工业和生产系统的控制过程,因此,值得进一步深入发展收缩理论,拓宽应用领域,以充分发挥其分析和应用的潜力和优势.

参考文献(References)

[1] 于霞, 刘建昌, 李鸿儒. 时变系统控制方法综述[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1281-1287.
(Yu X, Liu J C, Li H R. Survey on control of time-varying systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1281-1287.)

[2] Angeli D. A Lyapunov approach to incremental stability properties[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(3): 410-421.

[3] Forni F, Sepulchre R. A differential Lyapunov framework for contraction analysis[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 614-628.

[4] Lohmiller W, Slotine J J E. On contraction analysis for non-linear systems[J]. Automatica, 1998, 34(6): 683-696.

[5] Wang W, Slotine J J E. On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators[J]. Biological Cybernetics,

2005, 92(1): 38-53.
[6] Manchester I R, Slotine J J E. Control contraction metrics and universal stabilizability[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 8223-8228.
[7] Manchester I R, Slotine J J E. Control contraction metrics: Convex and intrinsic criteria for nonlinear feedback design[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(6): 3046-3053.
[8] Singh S, Landry B, Majumdar A, et al. Robust feedback motion planning via contraction theory[J]. The International Journal of Robotics Research, 2023, 42(9): 655-688.
[9] Lewis D C. Metric properties of differential equations[J]. American Journal of Mathematics, 1949, 71(2): 294-312.
[10] Hartman P. On stability in the large for systems of ordinary differential equations[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1961, 13: 480-492.
[11] Uhlig F. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: A survey[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1979, 25: 219-237.
[12] Aylward E M, Parrilo P A, Slotine J J E. Stability and robustness analysis of nonlinear systems via contraction metrics and SOS programming[J]. Automatica, 2008, 44(8): 2163-2170.
[13] Manchester I R, Slotine J J E. Robust control contraction metrics: A convex approach to nonlinear state-feedback H^∞ control[J]. IEEE Control Systems Letters, 2018, 2(3): 333-338.
[14] Singh S, Majumdar A, Slotine J J, et al. Robust online motion planning via contraction theory and convex optimization[C]. 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Singapore, 2017: 5883-5890.
[15] Lopez B T, Slotine J J E. Adaptive nonlinear control with contraction metrics[J]. IEEE Control Systems Letters, 2021, 5(1): 205-210.
[16] Lakshmanan A, Gahlawat A, Hovakimyan N. Safe feedback motion planning: A contraction theory and $\mathcal{L}_1$-adaptive control based approach[C]. The 59th IEEE Conference on Decision and Control. Jeju Island, 2020: 1578-1583.
[17] Singh S, Sindhwani V, Slotine J J E, et al. Learning stabilizable dynamical systems via control contraction metrics[C]. Springer Proceedings in Advanced Robotics. Cham: Springer International Publishing, 2020: 179-195.
[18] Sharma B, Kar I. Contraction based adaptive control of a class of nonlinear systems[C]. 2009 American Control Conference. St Louis, 2009: 808-813.
[19] Jouffryo J, Lottin J. Integrator backstepping using contraction theory: A brief methodological note[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2002, 35(1): 471-475.
[20] 胡超芳, 张志鹏. 基于收缩理论的一类非线性系统自适应动态面控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 769-775.
(Hu C F, Zhang Z P. Contraction theory-based adaptive dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 769-775.)
[21] Rayguru M M, Kar I N. A contraction theory approach for analysis of performance recovery in dynamic surface control[J/OL]. 2015, arXiv: 1511.00120.
[22] 孙刚, 王丹, 彭周华, 等. 一类严反馈非线性系统的神经网络控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 778-781.
(Sun G, Wang D, Peng Z H, et al. An approach to neural control of a class of strict-feedback nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2013, 28(5): 778-781.)
[23] Sharma B B, Kar I N. Contraction theory-based recursive design of stabilising controller for a class of non-linear systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(6): 1005-1018.
[24] Zamani M, Tabuada P. Backstepping design for incremental stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(9): 2184-2189.
[25] Rifai K E, Slotine J J E. Compositional contraction analysis of resetting hybrid systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(9): 1536-1541.
[26] González-Olvera M A, Tang Y. Contraction analysis for fractional-order nonlinear systems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2018, 117: 255-263.
[27] Manchester I R, Tang J Z, Slotine J J E. Unifying robot trajectory tracking with control contraction metrics[C]. Robotics Research. Cham: Springer, 2018: 403-418.
[28] Yi B W, Wang R G, Manchester I R. On necessary conditions of tracking control for nonlinear systems via contraction analysis[C]. The 59th IEEE Conference on Decision and Control. Jeju, 2021: 2000-2005.
[29] Slotine J J E, Li W P. Applied nonlinear control[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
[30] Jouffroy J, Slotine J J E. Methodological remarks on contraction theory[C]. The 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Nassau, 2005: 2537-2543.
[31] Fossen T I. Marine control systems: Guidance, navigation and control of ships, rigs and underwater vehicles[M]. Trondheim: Marine Cybernetics, 2002.
[32] Ying L X, Candès E J. Fast geodesics computation with the phase flow method[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 220(1): 6-18.
[33] Kimmel R, Sethian J A. Computing geodesic paths on manifolds[J]. Proceedings of the national academy of Sciences, 1998, 95(15): 8431-8435.

[34] Boykov, Kolmogorov. Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts[C]. IEEE International Conference on Computer Vision. Nice, 2008: 26-33.
[35] Houska B, Ferreau H J, Diehl M. An auto-generated real-time iteration algorithm for nonlinear MPC in the microsecond range[J]. Automatica, 2011, 47(10): 2279-2285.
[36] Garg D, Patterson M, Hager W W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods[J]. Automatica, 2010, 46(11): 1843-1851.
[37] Leung K, Manchester I R. Nonlinear stabilization via control contraction metrics: A pseudospectral approach for computing geodesics[C]. 2017 American Control Conference. Seattle, 2017: 1284-1289.
[38] Wang R G, Manchester I R. Continuous-time dynamic realization for nonlinear stabilization via control contraction metrics[C]. 2020 American Control Conference. Denver, 2020: 1619-1624.
[39] Yaghmaei A, Yazdanpanah M. Trajectory tracking for a class of contractive port Hamiltonian systems[J]. Automatica, 2017, 83: 331-336.
[40] Reyes-Báez R, van der Schaft A, Jayawardhana B, et al. A family of virtual contraction based controllers for tracking of flexible-joints port-Hamiltonian robots: Theory and experiments[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(8): 3269-3295.
[41] Bazzi S, Sternad D. Robustness in human manipulation of dynamically complex objects through control contraction metrics[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2020, 5(2): 2578-2585.
[42] Zhao P, Lakshmanan A, Ackerman K, et al. Tube-certified trajectory tracking for nonlinear systems with robust control contraction metrics[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(2): 5528-5535.
[43] Tsukamoto H, Chung S J. Learning-based robust motion planning with guaranteed stability: A contraction theory approach[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(4): 6164-6171.
[44] Shiromoto H S, Revay M, Manchester I R. Distributed nonlinear control design using separable control contraction metrics[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018, 6(4): 1281-1290.
[45] Yin H, Jayawardhana B, Reyes-Báez R. Pinning synchronization of heterogeneous multi-agent nonlinear systems via contraction analysis[J]. IEEE Control Systems Letters, 2022, 6: 157-162.
[46] Sharma B B, Kar I N. Observer-based synchronization scheme for a class ofchaotic systems using contraction theory[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 63(3): 429-445.
[47] Wang W, Slotine J J E. Contraction analysis of time-delayed communications and group cooperation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(4): 712-717.
[48] Li R R. Contraction theory based control law design for distributed optimization problem of nonlinear multi-agent systems: Beyond high-gain and backstepping[C]. 2019 Chinese Control Conference. Guangzhou, 2019: 5799-5804.
[49] Pham Q C, Tabareau N, Slotine J J. A contraction theory approach to stochastic incremental stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(4): 816-820.
[50] Dani A P, Chung S J, Hutchinson S. Observer design for stochastic nonlinear systems via contraction-based incremental stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 700-714.
[51] Yi B W, Wang R G, Manchester I R. Reduced-order nonlinear observers via contraction analysis and convex optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(8): 4045-4060.
[52] Sun D, Jha S, Fan C. Learning certified control using contraction metric[C]. Proceedings of the 2020 Conference on Robot Learning. Cambridge, 2021: 1519-1539.
[53] Tsukamoto H, Chung S J. Neural contraction metrics for robust estimation and control: A convex optimization approach[J]. IEEE Control Systems Letters, 2021, 5(1): 211-216.
[54] Tsukamoto H, Chung S J, Slotine J J E. Neural stochastic contraction metrics for learning-based control and estimation[J]. IEEE Control Systems Letters, 2021, 5(5): 1825-1830.
[55] Tsukamoto H, Chung S J, Slotine J J. Learning-based adaptive control using contraction theory[C]. The 60th IEEE Conference on Decision and Control. Austin, 2022: 2533-2538.

作者简介

刘艳红 (1970–), 女, 教授, 博士生导师, 博士, 从事非线性系统控制、机器人控制理论与应用等研究, E-mail: liuyh@zzu.edu.cn;

李孟琪 (1997–), 女, 硕士生, 从事非线性系统、收缩理论等研究, E-mail: meng.qi.li@foxmail.com;

李方圆 (1992–), 男, 副教授, 硕士生导师, 博士, 从事多智能体、协同控制等研究, E-mail: fylimas@zzu.edu.cn.