

控制与决策

Control and Decision

基于自适应参考向量和参考点的高维多目标进化算法

覃灏, 李军华, 黎明, 徐三水

引用本文:

覃灏, 李军华, 黎明, 徐三水. 基于自适应参考向量和参考点的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(3): 759–767.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0640>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于向量角分解的高维多目标进化算法](#)

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

[基于弱关联的自适应高维多目标进化算法](#)

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for many-objective optimization

控制与决策. 2021, 36(8): 1804–1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

[基于多种群分解预测的动态多目标引力搜索算法](#)

Dynamic multi-objective gravitational searching algorithm based on multi-population decomposition prediction

控制与决策. 2021, 36(12): 2910–2918 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1002>

[一种求解约束多目标问题的协作进化算法](#)

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems

控制与决策. 2021, 36(11): 2656–2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

[基于迁移学习灰支持向量回归机的交互式进化计算](#)

Interactive evolutionary computation based on transfer learning grey support vector regression

控制与决策. 2021, 36(10): 2399–2408 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0420>

基于自适应参考向量和参考点的高维多目标进化算法

覃 灏, 李军华[†], 黎 明, 徐三水

(南昌航空大学 江西省图像处理与模式识别重点实验室, 南昌 330063)

摘要: 研究表明, 现有的多目标进化算法在处理具有不同 Pareto 前沿的优化问题时难以有效平衡种群的收敛性与多样性. 鉴于此, 提出一种基于自适应参考向量和参考点的高维多目标进化算法 (adaptive reference vector and reference point based many-objective evolutionary algorithm, ARVRPMEA). ARVRPMEA 主要利用种群稀疏性自适应调整参考向量和参考点以提高种群多样性, 首先, 生成均匀分布的参考向量子集和参考点子集, 并利用该参考向量子集分解种群; 然后, 根据规模最大子种群中解的分布情况生成新的参考向量和参考点, 直至满足参考向量集和参考点集规模; 最后, 为进一步提高种群收敛性, 该算法结合指标进行环境选择以保存收敛性较高的个体进入下一代种群. 实验结果表明, ARVRP 算法在求解具有不同 Pareto 前沿的问题方面具有良好的性能.

关键词: 进化算法; 高维多目标进化算法; 自适应参考向量和参考点; 分解种群

中图分类号: TP18

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0640

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 覃灏, 李军华, 黎明, 等. 基于自适应参考向量和参考点的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 759-767.

An adaptive reference vector and reference point based many-objective evolutionary algorithm

QIN Hao, LI Jun-hua[†], LI Ming, XU San-shui

(Key Laboratory of Jiangxi Province for Image Processing and Pattern Recognition, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract: The research shows that the existing multi-objective evolutionary algorithms are difficult to effectively balance the convergence and diversity of the population when dealing with optimization problems with different Pareto fronts. To address the above situation, this paper proposes an adaptive reference vector and reference point based many-objective evolutionary algorithm (ARVRPMEA), which mainly uses population sparsity to adaptively adjust reference vectors and reference points to improve population diversity. First, the ARVRPMEA generates a uniformly distributed subset of reference vectors and a subset of reference points, and uses this subset of reference vectors to decompose the population. Then, new reference vectors and reference points are generated according to the distribution of solutions in the largest subpopulation until the scale of the reference vector set and reference point set is satisfied. Finally, to further improve population convergence, the algorithm combines the metrics for environmental selection to preserve the individuals with higher convergence into the next generation of populations. The experimental results show that the ARVRPMEA has good performance in solving problems with different Pareto fronts.

Keywords: evolutionary algorithms; many-objective evolutionary algorithm; adaptive reference vector and reference point; decomposing population

0 引言

多目标进化算法(MOEA)已广泛应用于处理多目标优化问题(MOPs)^[2-3]. 在现实生活相关领域的优化问题通常包含 4 个以上目标, 这类优化问题被称为高维多目标优化问题(MaOPs)^[4-6]. 由于各目标

间具有冲突特性, 很难同时优化全部目标^[7], 在求解 MaOPs 时只能获得一组折衷解^[8].

近年来, 众多高维多目标进化算法 (MaOEAs) 被相继提出^[9]. 尽管这些 MaOEAs 表现出强大的性能^[10], 但是研究表明, 此类算法对 PF 的形状较为敏

收稿日期: 2022-04-18; 录用日期: 2022-09-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62066031, 61866025, 61866026); 南昌航空大学研究生创新基金项目(YC2020-030).

责任编辑: 巩敦卫.

[†]通讯作者. E-mail: jhlee126@126.com.

感^[11-13],尤其是在面对不规则PF问题^[14-15]和一些特殊形状的规则PF问题时,无法获得令人满意的解集.此外,处理不同类型PF^[16-17]的MaOPs时,现有方法大多需人为设定算法参数,会降低算法的鲁棒性.且计算产生的解集通常分布不均,导致使用参考点选择时无法根据解集分布选择合适的解.针对上述问题,本文提出一种基于自适应参考点的高维多目标进化算法ARVRP.主要内容如下.

1) 提出一种新的参考向量生成策略,有效提高种群的多样性.首先随机生成部分参考向量集;然后利用参考向量集分解种群,在解最多的子种群中筛选出与该子种群对应参考向量角度最大的解,以此解生成一个参考向量,放入参考向量集中.不断重复直至满足参考向量集规模.

2) 提出一种新的参考点生成策略.首先计算参考点与原点的平均欧氏距离;然后在自适应参考向量迭代更新的同时,在新参考向量的方向上,选取与原点具有平均距离的位置,生成新的参考点填充至参考点集.该方法有助于增强种群的多样性.

1 相关工作

当前,众多进化算法采用参考点或参考向量指导进化的策略来提高种群的收敛性和多样性.本节介绍相关算法中参考点方法或参考向量方法的使用情况.

现存的MaOEAs中有很多是基于分解的方法,该类方法利用参考向量^[18-19]将目标空间分解为若干子空间,并将一个复杂的高维多目标优化问题分解为一组单目标优化问题(SOPs)或易于处理的多目标优化问题^[20],能够提高算法的收敛性或多样性.如MOEA/D-DU^[21]、R2-IBEA^[22]、A-GWASF-GA^[23]和MOEA/D-AM2M^[24].针对使用聚合函数无法保持高维多目标空间多样性的问题,MOEA/D-DU利用解到目标空间中权重向量的垂直距离,在高维多目标优化过程中维持收敛性与多样性平衡,但是对参数敏感.

针对R2指标^[25-26]的固有偏差问题,R2-IBEA纠正R2指标的固有偏差,获得一组多样化良好的Pareto近似解.针对GWASF-GA^[27]在复杂PF无法有效逼近的问题,A-GWASF-GA遵循MOEA/D-AWA^[28]的思想,通过动态调整权重向量来提高算法的性能.针对不同目标的重要性,MOEA/D-AM2M自适应地调整子问题的子区域,避免将计算资源浪费在没有希望的区域.

IDMOPSO^[29]通过局部最优和全局最优的选择策略兼顾趋同性和多样性.MOPSO/DD^[30]通过对总

体中显性差的范数的研究,间接解决了目标空间中候选解判断优劣的可分辨性问题.ARVEA^[31]提出了一种参考向量自适应方法,通过调整参考向量的分布适应不同类型的PF.

所提出自适应参考向量策略,是分解种群后根据子种群中与对应参考向量角度最大的解的方向,而产生的新参考向量.因此,不同子种群可在决策空间中朝不同方向进化.该方法与现有方法的主要区别如下:1)初始生成的不是规模完整的参考向量集和参考点集,而是规模为 $N/3$ 的部分参考向量集和参考点集,其中 N 为种群规模;2)所提出方法对参考向量集和参考点集中个体不作调整,而是生成新的参考向量和参考点补充参考向量集和参考点集.这使得所提出方法相较其他最新算法能够更为高效地处理高维多目标优化问题,特别是在提高种群的收敛性和多样性方面.

2 ARVRP

2.1 ARVRP 框架

所提出基于自适应参考向量的高维多目标进化算法具有较为简单的计算框架.算法1为具体实现过程.

算法1 ARVRP算法.

输入: N (种群规模), t_{\max} (最大进化代数);

输出: P (最终种群).

1. $P_0 = \text{InitializePopulation}(N)$;
2. While $t < t_{\max}$ do
3. $Q_t = \text{OffspringCreation}(P_t)$;
4. $P_t = P_t \cup Q_t$;
5. $P_{t+1} = \text{EnvironmentalSelection}(P_t, N)$;
6. $t = t + 1$;
7. end

与大部分现有MaOEAs框架相似,首先,生成一组规模为 N 的种群 P_t (t 为种群当前进化代数);然后,由父代 P_t 随机生成子代 Q_t ,合并到父代中进行环境选择;最后,在组合种群中选择 N 个候选解组成下一代种群.在后续章节中将着重介绍环境选择和自适应参考向量以及参考点.

2.2 环境选择

如算法2所示,环境选择中先后使用了解和指标两种方法.分解方法能够有效提高种群的多样性,指标方法则有助于种群的收敛性.在基于分解的方法中,首先,利用组合种群 P_t 和种群规模 N 自适应生成参考向量 V_i 和参考点 R_t ,并利用种群中所有个体计算理想点 $z^{\min} = (z_1^{\min}, z_2^{\min}, \dots, z_M^{\min})$ 和最差点 $z^{\max} = (z_1^{\max}, z_2^{\max}, \dots, z_M^{\max})$.其中: $z_i^{\min} = \min(f_{t,i}(p))$,

$z_i^{\max} = \max(f_{t,i}(p))$, $f_{t,i}(p)$ 为个体 p 在第 i 维目标上的函数值, 归一化后的目标值为 $f'_{t,i}(p)$, 并计算种群中解之间的欧氏距离 Dis_t ; 然后, 计算解与参考向量的角度, 并将种群划分为若干个子种群; 最后, 利用角度和欧氏距离 Dis_t 选择解组合成解集 $P_{t+1,1}$, 未选中个体放入集合 \bar{P}_t .

算法2 环境选择.

输入: P_t (组合种群), N (种群规模);

输出: P_{t+1} (下一代种群).

1. /* 自适应参考向量和参考点 */;
2. $[V_t, R_t] = \text{UpRefVec_Ada}(P_t, N)$;
3. /* 归一化 */;
4. for $i = 1$ to M do
5. 理想点: $z_i^{\min} = \min_{p \in P_t} f_{t,i}(p)$;
6. 最差点: $z_i^{\max} = \max_{p \in P_t} f_{t,i}(p)$;
7. end
8. 归一化: $f'_{t,i}(p) = \frac{f_{t,i}(p) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}$;
9. $\text{Dis}_t = \frac{\min(\text{pdist2}(p, P))}{\max(\text{pdist2}(p, P))}$;
10. 分解种群: $\theta_t = \arccos \frac{f'_{t,i}(p)v_i}{\|f'_{t,i}(p)\|}$;
11. 精英选择: $P_{t+1,1} = \arg \min(f'_{t,i}(p), \theta_t, \text{Dis}_t)$;
12. $\bar{P}_t = P_t - P_{t+1,1}$;
13. $K = N - |P_{t+1,1}|$;
14. /* 选中前 $k - 1$ 层解 */;
15. k 的取值满足 $\left| \bigcup_{i=1}^k \bar{P}_t \right| \geq K$ 的最小值;
16. $P_{t+1,2} = \bigcup_{i=1}^k \bar{P}_t$;
17. $[\text{dis}_t, \text{Ag}_t] = \text{CalDistance}(\bar{P}_{t,k}, R_t)$;
18. While $|\bar{P}_{t,k}| > K - |P_{t+1,2}|$ do
19. $p = \arg \min(\bar{P}_{t,k}, R_t, \text{Ag}_t)$;
20. $P_{t+1,2} = P_{t+1,2} \cup p$;
21. end
22. $P_{t+1} = P_{t+1,1} + P_{t+1,2}$.

在指标方法中, 首先, 将 \bar{P}_t 按照非支配关系分层排序, 取前 $k - 1$ 层的非支配解添加至解集 $P_{t+1,2}$, 其中 k 的取值为满足 $\left| \bigcup_{i=1}^k \bar{P}_t \right| \geq K$ 的最小值, K 为种群规模与解集 $P_{t+1,1}$ 规模的差值; 然后, 将 \bar{P}_t 中第 k 层非支配层中的解集 $\bar{P}_{t,k}$ 使用自适应参考点集 R_t 计算解与参考点的距离 dis_t 和角度 Ag_t ; 最后, 在第 k 层非支配层中选择合适的解加入解集 $P_{t+1,2}$ 中, 令解集 $P_{t+1,2}$ 的规模为 K , 组合解集 $P_{t+1,1}$ 与解集 $P_{t+1,2}$ 成为下一代种群 P_{t+1} .

在大部分情况下, 利用分解方法不能满足种群规模, 需利用指标的方法以满足种群规模.

2.3 自适应参考向量和参考点

自适应参考向量策略是利用种群的分布特性, 自适应生成完整参考向量的方法, 自适应参考点策略以自适应参考向量为基础. 自适应参考向量和参考点生成均匀分布的部分参考向量, 将种群划分为多个子种群, 自适应生成新参考向量, 同时生成新参考点.

自适应参考向量和参考点的步骤如算法3所示. 首先, 生成部分均匀参考向量 V_t 和部分均匀参考点集 R_t , 并根据 R_t 中参考点计算参考点到原点的平均欧氏距离 (mean euclidean distance, MED); 然后, 根据各解的归一化目标值 $f'_{t,i}(p)$ 和各参考向量 $v_{i,j}$ 计算角度 $\theta_{i,j}$, 将种群划分为多个子种群, 选择解数量最多的子种群 S , 根据角度集合 θ_i , 选取与该参考向量角度最大的解, 以该解表示的方向生成新参考向量 $v_{i+|V_t|}$, 并根据平均欧氏距离 MED 生成新参考点 $r_{i+|V_t|}$, 将新参考向量和新参考点分别加入 V_t 和 R_t , 重复上述操作, 直至参考向量集和参考点集的规模满足要求; 最后, 返回完整自适应参考向量和自适应参考点. 参考向量的方向不同, 将影响参考点的位置, 造成选择的解的多样性不同, 影响种群的多样性与收敛性平衡.

算法3 自适应参考向量和参考点.

输入: P_t (种群), N (种群规模);

输出: V_t (参考向量集), R_t (参考点集).

1. $V_t = \text{UniformRefVector}(N/3)$;
2. $R_t = \text{UniformReferencePoint}(N/3)$;
3. /* 计算 R_t 中参考点到原点平均距离 */;
4. $\text{MED} = \sum_{i=1}^{|R_t|} \text{dis}(r_{t,i}, 0) / |R_t|$;
5. $K = N - |V_t|$;
6. for $i = 1$ to K do
7. /* 种群划分 */;
8. for $j = 1$ to $|V_t|$ do
9. $\theta_{i,j} = \arccos[f'_{t,i}(p) \cdot v_{i,j} / \|f'_{t,i}(p)\|]$;
10. end
11. 选出个体数量最多的子种群, 记为 S ;
12. 在 S 中选择与对应参考向量角度最大个体 p ;
13. 生成新参考向量: $v_{i+|V_t|} \leftarrow p$;
14. 生成新参考点: $r_{i+|V_t|} \leftarrow (v_{i+|V_t|}, \text{MED})$;
15. $V_t = V_t \cup v_{i+|V_t|}$;
16. $R_t = R_t \cup r_{i+|V_t|}$;
17. end

图1为自适应参考向量和参考点示意图. 第2个子空间的解数目最多, 将 a 、 b 、 c 、 d 和 e 五个解与对应的参考向量 B 进行角度计算, 解 a 与参考向量间夹

角最大,则以解 a 为基础确定新参考向量 D ,并根据MED在该新参考向量上生成新参考点 ε .

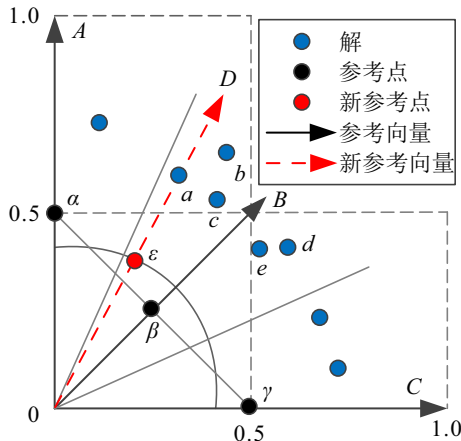


图1 自适应参考向量和参考点示意图

2.4 时间复杂度分析

所提出方法的时间复杂度主要可分为自适应参考向量、自适应参考点和种群分解3部分.

在自适应参考向量中:计算平均欧氏长度的时间复杂度为 $O((1/3)N)$,搜索最大子空间在最坏情况下的时间复杂度为 $O(N^2)$,生成新参考向量在最坏情况下的时间复杂度为 $O(N)$.自适应参考点中:归一化的时间复杂度为 $O(N)$,存档更新的时间复杂度为 $O(N^2)$,参考点调整的时间复杂度为 $O(N^2)$.在种群选择中,种群分解部分划分种群的时间复杂度为 $O(2MN^2)$.指标部分的参考点关联的时间复杂度为 $O(MN)$,精英选择的时间复杂度为 $O(N^2)$.

由上述分析可知,所提出算法的时间复杂度为 $O[(2M+4)N^2]$.

3 结果和分析

为了对算法的具体性能进行验证,现将所提出算法与4个具有代表性的高维多目标进化算法进行对比实验,这些算法分别为:MOEA/D-DU^[21]、IDMOPSO^[29]、MOPSO/DD^[30]和ARVEA^[31].在实验的过程中采用WFG^[32]测试集和MaF^[33]测试集.使用多目标进化算法平台PlatEMO^[34]进行对比实验.下面介绍实验中的相关设置并将各算法在测试集上的实验结果进行分析比较.

3.1 实验设置

1) 基准测试问题:WFG 1~WFG 9和MaF 1~MaF 13等测试问题已广泛用于算法的性能评估.为了验证算法在高维情况下的性能情况,测试问题的目标数设置为8、15和20.

2) 种群规模:在算法MOEA/D-DU、IDMOPSO、MOPSO/DD、ARVEA和ARVRP中选择的种群规模

与参考点的数量密切相关.详细数据如表1所示.

表1 种群规模

M	(P_1, P_2)	种群规模
8	(3, 2)	156
15	(2, 1)	135
20	(2, 1)	230

3) 运行代数:每次运行的终止条件为最大代数.每个算法在所有测试问题的最大代数均设置为500.

4) 评价指标:本文使用反世代距离(IGD^[35])和超体积(HV^[36])评价算法的收敛性和多样性.

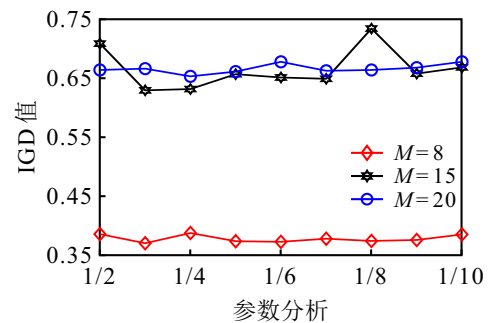
5) 算法参数设置:在ARVRP算法的部分参考向量和部分参考点均取种群规模的1/3.

6) 统计方法:在每个测试问题上,每种算法均独立运行20次,采用Wilcoxon秩和检验方法对实验结果进行比较,实验结果用均值表示.

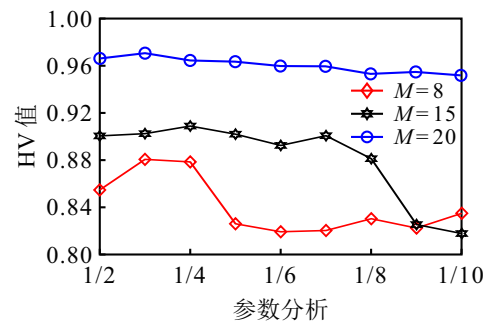
3.2 参数分析

在实验的自适应参考向量和参考点策略中,将生成的部分均匀参考向量和均匀参考点规模设定为 $N/3$.为分析参数对算法性能的影响,采用测试问题DTLZ3独立运行20次,进行定量分析.

图2(a)为ARVRP在DTLZ3测试实例上不同的参数设置IGD值变化折线.图2(b)为ARVRP在DTLZ3测试实例上不同的参数设置HV值变化折线.



(a) IGD折线



(b) HV折线

图2 ARVRP在DTLZ3测试实例的折线

由图2可见,生成的部分均匀参考向量和均匀参考点规模取 $N/3$ 时,是保证ARVRP获得最佳性能的综合考量.

3.3 参考向量和参考点调整过程

为使得参考向量和参考点自适应调整的中间过程更加直观,图3为算法在3维DTLZ2测试问题上自适应调整的过程.其中:图3(a)为初始的参考向量和参考点以及种群中个体的分布情况;图3(b)为参考向量和参考点第1次调整后的分布情况,由图3(b)可见,在原种群个体分布密集的区域,生成了较多的参考向

量和参考点;图3(c)为第2代种群和第1次调整后的参考向量以及参考点,由图3(c)可见,种群中部分个体附近缺少参考向量和参考点;图3(d)为参考向量和参考点经过第2次调整后,第2代种群的分布情况,由图3(d)可见,新生成的参考向量和参考点弥补了上一代的缺失.图3中参考向量和参考点的调整过程,表明所提出自适应调整策略是有效的.

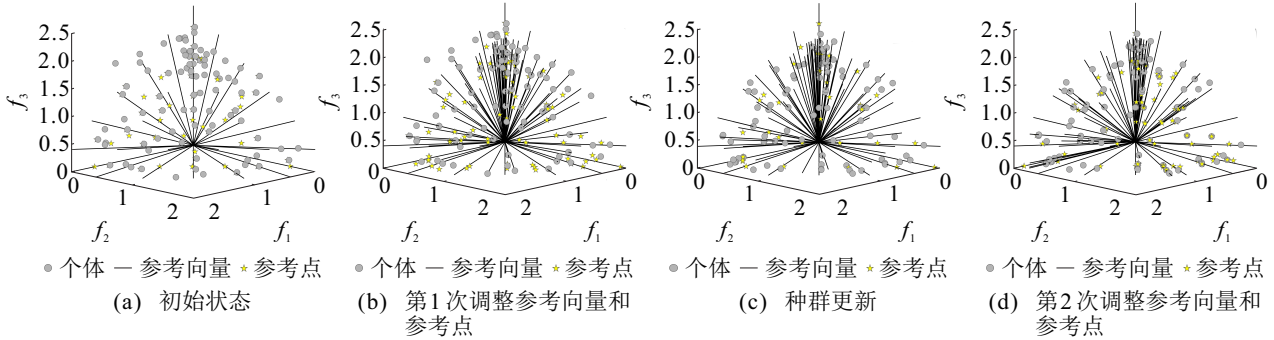


图3 参考点和参考向量调整过程示意图

3.4 算法在WFG测试集的对比分析

为探讨算法在WFG测试集上的性能表现,本节对ARVRP和相关算法在WFG测试集上的实验数据

进行分析.

表2和表3分别为算法在测试问题WFG1~WFG9上IGD值和HV值的实验统计结果.WFG1

表2 MOEA/D-DU、IDMOPSO、MOPSO/DD、ARVEA和ARVRP在WFG1~WFG9上获得的8、15、20目标IGD值统计结果

problem	M	MOEA/D-DU	IDMOPSO	MOPSO/DD	ARVEA	ARVRP
WFG 1	8	1.058 6e+0(3.09e-2) +	2.643 0e+0 (6.28e-2) -	2.847 0e+0 (1.32e-1) -	1.069 2e+0 (5.03e-2) +	1.287 7e+0 (8.39e-2)
	15	2.325 6e+0 (1.19e-1) -	4.089 0e+0 (1.35e-1) -	3.922 3e+0 (1.67e-1) -	2.019 7e+0 (4.74e-2) +	2.150 9e+0 (7.40e-2)
	20	4.689 4e+0 (1.83e-1) -	5.322 9e+0 (1.05e-1) -	5.389 1e+0 (1.67e-1) -	4.316 1e+0 (1.11e-1) =	4.365 7e+0 (1.29e-1)
WFG 2	8	1.145 2e+0 (3.48e-2) -	1.149 8e+0 (4.84e-2) -	2.045 5e+0 (7.74e-1) -	1.284 6e+0 (2.82e-2) -	1.044 6e+0 (3.56e-2)
	15	2.341 6e+0 (1.59e-1) -	2.473 8e+0 (3.30e-1) -	8.304 5e+0 (2.94e+0) -	2.057 7e+0 (6.03e-2) =	2.051 0e+0 (1.07e-1)
	20	4.355 7e+0 (2.07e-1) -	3.881 0e+0 (4.34e-1) +	9.947 1e+0 (2.90e+0) -	4.150 1e+0 (1.33e-1) =	4.111 7e+0 (1.35e-1)
WFG 3	8	1.014 0e+0 (6.70e-2) +	8.121 0e-1 (1.01e-1) +	2.043 2e+0 (7.22e-1) -	3.860 0e+0 (7.65e-1) -	1.245 0e+0 (1.10e-1)
	15	2.107 5e+0 (1.11e-1) +	1.012 2e+0 (3.81e-1) +	3.142 0e+0 (1.86e+0) +	9.652 9e+0 (1.21e+0) -	4.125 3e+0 (5.53e-1)
	20	2.453 8e+0 (9.62e-2) +	9.819 2e-1 (2.42e-1) +	4.387 8e+0 (3.55e+0) +	1.397 4e+1 (2.04e+0) -	6.176 7e+0 (9.57e-1)
WFG 4	8	3.429 0e+0 (3.52e-2) -	3.115 1e+0 (2.42e-2) +	5.388 0e+0 (1.68e-1) -	3.469 0e+0 (7.34e-2) -	3.174 4e+0 (4.26e-2)
	15	1.305 6e+1 (5.62e-1) -	9.064 5e+0 (1.95e-1) +	1.295 6e+1 (1.03e+0) -	1.095 8e+1 (2.58e-1) =	1.082 4e+1 (9.43e-1)
	20	1.908 4e+1 (1.14e+0) -	1.310 0e+1 (4.41e-1) +	1.823 9e+1 (1.74e+0) -	1.470 8e+1 (2.43e-1) -	1.399 9e+1 (2.93e-1)
WFG 5	8	3.447 1e+0 (3.62e-2) -	3.215 2e+0 (4.42e-2) -	6.334 0e+0 (8.01e-1) -	3.407 0e+0 (5.82e-2) -	3.163 4e+0 (4.66e-2)
	15	1.200 1e+1 (8.18e-1) -	1.053 0e+1 (4.37e-1) -	2.086 1e+1 (3.15e+0) -	1.094 2e+1 (2.21e-1) -	1.028 6e+1 (7.02e-1)
	20	1.659 0e+1 (4.56e-1) -	1.769 7e+1 (6.86e-1) -	3.123 9e+1 (2.22e+0) -	1.491 8e+1 (1.99e-1) -	1.375 2e+1 (2.66e-1)
WFG 6	8	3.531 5e+0 (5.04e-2) -	3.434 2e+0 (4.94e-2) -	6.538 2e+0 (8.96e-1) -	4.384 2e+0 (1.05e+0) -	3.307 9e+0 (5.41e-2)
	15	1.230 8e+1 (2.75e-1) -	1.212 4e+1 (1.00e+0) -	1.962 5e+1 (3.35e+0) -	1.342 0e+1 (1.60e+0) -	1.108 7e+1 (7.64e-1)
	20	1.684 9e+1 (4.97e-1) -	1.907 8e+1 (1.56e+0) -	3.011 7e+1 (4.49e+0) -	1.683 7e+1 (1.53e+0) -	1.512 8e+1 (2.01e-1)
WFG 7	8	3.522 6e+0 (3.93e-2) -	3.292 8e+0 (8.15e-2) =	6.275 3e+0 (8.33e-1) -	3.420 2e+0 (6.74e-2) -	3.345 7e+0 (6.04e-2)
	15	1.249 3e+1 (5.26e-1) -	1.255 9e+1 (1.09e+0) -	1.946 7e+1 (3.07e+0) -	9.763 9e+0 (7.15e-1) +	1.053 9e+1 (1.10e+0)
	20	1.779 1e+1 (8.00e-1) -	2.075 0e+1 (1.43e+0) -	3.000 0e+1 (3.57e+0) -	1.237 7e+1 (7.44e-1) +	1.416 0e+1 (2.39e-1)
WFG 8	8	3.652 0e+0 (3.77e-2) -	3.613 8e+0 (6.65e-2) -	6.400 0e+0 (7.20e-1) -	3.648 0e+0 (1.80e-1) -	3.518 5e+0 (3.71e-2)
	15	1.220 4e+1 (2.45e-1) -	1.259 8e+1 (9.14e-1) -	2.066 5e+1 (2.40e+0) -	1.141 1e+1 (7.14e-1) =	1.142 0e+1 (5.75e-1)
	20	1.833 3e+1 (2.01e-1) -	1.977 8e+1 (1.59e+0) -	3.232 3e+1 (3.08e+0) -	1.529 0e+1 (1.48e+0) =	1.580 2e+1 (6.46e-1)
WFG 9	8	3.466 4e+0 (3.82e-2) -	3.179 8e+0 (3.24e-2) =	6.660 2e+0 (8.96e-1) -	3.407 0e+0 (7.55e-2) -	3.183 3e+0 (4.28e-2)
	15	1.114 1e+1 (4.03e-1) -	1.026 0e+1 (7.57e-1) -	2.063 6e+1 (2.49e+0) -	9.876 9e+0 (3.96e-1) =	9.652 3e+0 (7.36e-1)
	20	1.703 6e+1 (5.86e-1) -	1.720 1e+1 (8.58e-1) -	3.312 5e+1 (3.00e+0) -	1.258 1e+1 (7.69e-1) =	1.294 1e+1 (4.40e-1)
+ / - / =		4 / 23 / 0	7 / 18 / 2	2 / 25 / 0	4 / 15 / 8	

注:“+”、“-”和“=”分别表示所获得的结果与MaOEA/PAS-ESC相比更好、更差和相似.

表3 MOEA/D-DU、IDMOPSO、MOPSO/DD、ARVEA和ARVRP在WFG 1~WFG 9上获得的8、15、20目标HV值统计结果

problem	M	MOEA/D-DU	IDMOPSO	MOPSO/DD	ARVEA	ARVRP
WFG 1	8	9.824 9e-1 (2.71e-2) +	2.762 5e-1 (1.27e-2) -	2.574 0e-1 (2.01e-2) -	8.406 5e-1 (6.54e-2) =	8.212 6e-1 (4.92e-2)
	15	9.649 0e-1 (6.77e-2) +	2.084 6e-1 (1.56e-2) -	2.563 0e-1 (3.11e-2) -	9.584 4e-1 (7.30e-2) =	9.517 1e-1 (5.76e-2)
	20	9.796 2e-1 (5.25e-2) -	1.980 9e-1 (1.11e-2) -	2.980 0e-1 (4.17e-2) -	9.906 4e-1 (2.78e-2) -	9.987 5e-1 (3.25e-4)
WFG 2	8	9.985 5e-1 (1.01e-3) +	9.486 1e-1 (3.99e-3) -	9.775 3e-1 (2.27e-2) -	9.611 3e-1 (8.98e-3) -	9.906 9e-1 (1.86e-3)
	15	9.943 9e-1 (3.01e-3) =	9.722 6e-1 (6.62e-3) -	9.184 4e-1 (8.09e-2) -	9.472 3e-1 (1.17e-2) -	9.940 0e-1 (1.70e-3)
	20	9.956 5e-1 (1.69e-3) =	9.844 9e-1 (3.04e-3) -	9.440 5e-1 (5.78e-2) -	9.762 7e-1 (7.38e-3) -	9.954 2e-1 (1.85e-3)
WFG 3	8	2.808 6e-3 (1.26e-2) -	3.246 0e-3 (1.07e-2) -	1.513 7e-1 (1.35e-2) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) -	1.037 9e-2 (1.01e-2)
	15	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0)
	20	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0) =	0.000 0e+0 (0.00e+0)
WFG 4	8	8.833 6e-1 (5.37e-3) +	6.786 3e-1 (1.51e-2) -	5.751 5e-1 (3.48e-2) -	8.411 3e-1 (9.18e-3) =	8.413 9e-1 (7.55e-3)
	15	7.203 7e-1 (4.13e-2) -	6.279 6e-1 (3.16e-2) -	6.898 0e-1 (5.77e-2) -	8.459 2e-1 (2.75e-2) -	8.671 1e-1 (2.44e-2)
	20	7.570 3e-1 (4.54e-2) -	7.185 5e-1 (3.71e-2) -	7.308 7e-1 (7.00e-2) -	8.912 0e-1 (2.96e-2) -	9.260 6e-1 (1.15e-2)
WFG 5	8	8.188 5e-1 (5.79e-3) +	6.169 6e-1 (3.01e-2) -	3.750 6e-1 (6.59e-2) -	8.187 7e-1 (3.35e-3) +	7.884 2e-1 (7.59e-3)
	15	7.028 5e-1 (1.72e-2) -	6.368 0e-1 (2.10e-2) -	2.861 1e-1 (6.95e-2) -	8.431 8e-1 (1.23e-2) +	8.000 6e-1 (2.92e-2)
	20	7.474 9e-1 (2.24e-2) -	7.102 7e-1 (1.37e-2) -	3.048 6e-1 (4.94e-2) -	8.760 8e-1 (6.41e-3) +	8.489 8e-1 (1.00e-2)
WFG 6	8	7.834 0e-1 (1.98e-2) +	6.779 8e-1 (1.83e-2) -	3.824 6e-1 (8.38e-2) -	5.904 2e-1 (1.70e-1) -	7.587 4e-1 (2.01e-2)
	15	6.621 8e-1 (3.08e-2) -	6.369 2e-1 (2.33e-2) -	3.698 7e-1 (1.11e-1) -	3.936 2e-1 (1.74e-1) -	7.774 8e-1 (2.81e-2)
	20	7.505 4e-1 (3.15e-2) -	7.042 3e-1 (2.14e-2) -	3.926 3e-1 (1.33e-1) -	4.882 1e-1 (1.58e-1) -	8.225 6e-1 (2.24e-2)
WFG 7	8	8.705 5e-1 (7.15e-3) +	7.036 0e-1 (2.31e-2) -	4.583 4e-1 (8.88e-2) -	8.489 4e-1 (1.38e-2) =	8.447 6e-1 (7.14e-3)
	15	7.593 0e-1 (5.36e-2) -	7.162 3e-1 (1.87e-2) -	4.127 9e-1 (1.55e-1) -	6.665 9e-1 (2.81e-1) -	8.927 7e-1 (3.91e-2)
	20	8.035 4e-1 (4.52e-2) -	7.619 7e-1 (1.93e-2) -	4.100 1e-1 (1.21e-1) -	5.365 5e-1 (2.24e-1) -	9.169 5e-1 (1.54e-2)
WFG 8	8	7.610 7e-1 (7.33e-3) +	6.069 9e-1 (1.62e-2) -	3.550 3e-1 (5.98e-2) -	5.905 0e-1 (7.95e-2) -	6.424 6e-1 (1.42e-2)
	15	6.240 9e-1 (6.34e-3) -	6.568 6e-1 (2.24e-2) -	3.267 2e-1 (9.09e-2) -	4.178 0e-1 (2.02e-1) -	8.107 1e-1 (2.01e-2)
	20	7.189 9e-1 (1.20e-2) -	7.366 0e-1 (2.28e-2) -	3.597 1e-1 (9.85e-2) -	5.845 7e-1 (1.82e-1) -	8.543 9e-1 (1.75e-2)
WFG 9	8	8.281 7e-1 (6.42e-3) +	6.175 5e-1 (1.60e-2) -	2.951 1e-1 (6.80e-2) -	7.740 2e-1 (1.18e-2) +	7.530 4e-1 (1.36e-2)
	15	6.773 4e-1 (3.11e-2) -	6.189 6e-1 (5.94e-2) -	3.307 8e-1 (1.05e-1) -	7.470 8e-1 (3.56e-2) -	7.940 8e-1 (4.08e-2)
	20	7.146 0e-1 (4.82e-2) -	7.128 0e-1 (3.16e-2) -	3.214 1e-1 (9.92e-2) -	7.498 4e-1 (5.44e-2) -	8.196 2e-1 (2.85e-2)
+ / - / =		9 / 14 / 4	0 / 25 / 2	1 / 24 / 2	4 / 17 / 6	

注：“+”、“-”和“=”分别表示所获得的结果与MaOEA/PAS-ESC相比更好、更差和相似。

的PF为凸形和混合结构;WFG 2的PF为凸形和断开;WFG 3的PF具有线性和退化特性;WFG 4~WFG 9的PF均为凹形规则结构.表2中,ARVRP在除WFG 3、WFG 4和WFG 7的其他测试实例均获得了良好的性能;表3中,ARVRP在除WFG 2和WFG 5的其他测试实例上表现较优.总体上ARVRP的性能优于其他几种算法.由ARVRP在WFG测试集与其他几种算法的对比可见,ARVRP的收敛性和多样性均表现较优,这是由于在ARVRP中不仅采用自适应参考向量,通过角度产生新的参考向量,增强了参考向量的多样性,使得ARVRP能够选择多样性良好的解,而且生成自适应参考点中,加入MED,加强了收敛性.

3.5 算法在MaF测试集的对比分析

为探讨ARVRP处理不同PF形状的性能表现,表4给出了相关算法在MaF测试集上的IGD值的实验统计数据.

表4为相关算法在测试问题MaF 1~MaF 13上的IGD值统计实验结果,ARVRP在MaF 4、MaF 8、MaF 9、MaF 11和MaF 12中均取得了良好的性能.在这些测试问题中MaF 8和MaF 9的PF形状均具有线性结构和退化特性,实验结果表明,ARVRP能够有效对线性PF形状和具有退化特性PF形状;MaF 11的PF形状为凸形,MaF 12的PF形状为凹形,可见ARVRP在线性、凸形和凹形问题上相比其他对比方

法取得了最佳的IGD值和HV值,这得益于自适应参考向量策略和自适应参考点策略,加强了环境选择

中的多样性,使得多样性与收敛性能够形成有效的平衡.

表 4 MOEA/D-DU、IDMOPSO、MOPSO/DD、ARVEA 和 ARVRP 在 MaF 1 ~ MaF 13 上获得的 8、15、20 目标 IGD 值统计结果

problem	M	MOEA/D-DU	IDMOPSO	MOPSO/DD	ARVEA	ARVRP
MaF 1	8	5.063 6e-1 (3.67e-2) -	2.763 6e-1 (1.11e-2) -	3.743 1e-1 (2.52e-2) -	6.706 6e-1 (4.70e-2) -	2.426 3e-1 (5.97e-3)
	15	6.851 6e-1 (3.32e-2) -	3.461 2e-1 (2.35e-2) +	3.587 3e-1 (3.26e-2) +	7.948 6e-1 (6.23e-2) -	3.833 3e-1 (3.69e-2)
	20	7.598 1e-1 (3.98e-2) -	4.543 9e-1 (1.39e-2) =	4.393 0e-1 (3.17e-2) =	9.021 2e-1 (4.55e-2) -	4.393 7e-1 (2.62e-2)
MaF 2	8	2.387 0e-1 (2.55e-2) +	2.829 9e-1 (3.14e-2) =	6.021 9e-1 (7.50e-2) -	4.706 9e-1 (1.92e-1) -	2.742 1e-1 (2.29e-2)
	15	4.295 7e-1 (2.83e-2) =	3.928 0e-1 (3.64e-2) +	8.949 6e-1 (5.60e-3) -	7.921 0e-1 (3.99e-2) -	4.278 4e-1 (3.33e-2)
	20	4.403 2e-1 (2.31e-2) -	3.948 9e-1 (3.82e-2) -	8.610 8e-1 (1.19e-1) -	7.553 3e-1 (1.30e-1) -	3.627 3e-1 (1.20e-2)
MaF 3	8	1.412 6e-1 (1.62e-1) +	1.922 7e+4 (4.33e+4) -	4.847 9e+7 (6.93e+7) -	9.309 2e-2 (5.35e-3) +	3.406 5e+1 (5.22e+1)
	15	7.766 1e-1 (2.13e+0) +	1.022 6e+5 (3.64e+5) -	1.103 4e+8 (1.44e+8) -	1.915 2e-1 (1.90e-1) +	4.788 1e+2 (5.33e+2)
	20	2.706 1e-1 (2.65e-1) +	1.662 1e+6 (5.68e+6) -	4.194 9e+7 (6.98e+7) -	1.614 5e-1 (8.79e-2) +	3.044 7e+2 (4.01e+2)
MaF 4	8	1.553 8e+3 (7.37e+2) -	9.527 1e+3 (5.72e+3) -	1.179 0e+4 (5.13e+3) -	5.219 3e+1 (3.03e+0) -	2.027 7e+1 (1.18e+0)
	15	2.682 5e+5 (1.21e+5) -	9.124 3e+5 (7.32e+5) -	1.263 1e+6 (5.65e+5) -	1.057 5e+4 (8.88e+1) -	3.260 4e+3 (3.00e+2)
	20	8.683 9e+6 (4.31e+6) -	3.189 1e+7 (1.95e+7) -	3.190 8e+7 (1.36e+7) -	3.779 8e+5 (3.35e+3) -	9.532 8e+4 (1.22e+4)
MaF 5	8	2.197 4e+1 (4.78e-1) =	2.236 8e+1 (2.67e+0) =	5.310 6e+1 (1.21e+1) -	6.678 5e+1 (6.78e+0) -	2.202 5e+1 (1.73e+0)
	15	3.8374e+3 (4.04e+2) -	2.260 9e+3 (2.86e+2) +	5.615 1e+3 (8.61e+2) -	7.318 3e+3 (2.21e+0) -	2.661 8e+3 (3.53e+2)
	20	6.930 6e+4 (7.22e+3) =	3.207 9e+4 (9.14e+3) +	1.270 1e+5 (2.24e+4) -	1.709 4e+5 (3.82e+0) -	7.883 6e+4 (1.57e+4)
MaF 6	8	5.304 9e-2 (4.29e-3) -	1.404 8e-2 (8.01e-3) -	6.397 0e-1 (5.35e-2) -	1.201 5e-1 (3.25e-4) -	4.320 4e-3 (7.40e-4)
	15	1.345 5e-1 (6.93e-3) +	4.152 2e-2 (4.75e-2) +	7.165 1e-1 (4.99e-2) -	1.6313e-1 (3.00e-4) +	3.002 2e-1 (1.19e-1)
	20	1.499 6e-1 (8.94e-3) +	8.312 0e-2 (8.52e-2) +	7.275 0e-1 (2.26e-2) -	1.660 8e-1 (1.24e-3) +	3.728 6e-1 (1.20e-1)
MaF 7	8	1.374 2e+1 (1.71e+0) -	3.370 8e+0 (5.19e-1) -	2.169 2e+0 (8.18e-1) -	1.830 0e+0 (3.22e-1) -	9.558 7e-1 (4.71e-2)
	15	4.683 7e+1 (3.48e+0) -	9.981 8e+0 (3.96e-1) -	3.510 4e+0 (7.68e-1) =	2.519 1e+0 (1.22e-1) +	4.037 7e+0 (1.18e+0)
	20	6.189 6e+1 (4.52e+0) -	1.392 0e+1 (7.40e-1) -	4.178 7e+0 (1.52e+0) =	3.322 7e+0 (4.76e-1) =	3.498 9e+0 (7.92e-1)
MaF 8	8	9.443 8e-1 (3.79e-1) -	2.474 3e+0 (9.46e-1) -	5.555 0e+0 (2.97e+0) -	7.799 1e-1 (1.13e-1) -	1.866 1e-1 (7.60e-3)
	15	1.912 3e+0 (8.10e-1) -	3.688 6e+0 (1.57e+0) -	8.610 1e+0 (6.51e+0) -	1.288 4e+0 (1.63e-1) -	2.934 6e-1 (1.52e-2)
	20	1.515 8e+0 (5.25e-1) -	3.071 0e+0 (1.15e+0) -	5.729 7e+0 (3.49e+0) -	1.317 8e+0 (2.52e-1) -	2.384 1e-1 (6.74e-3)
MaF 9	8	8.348 4e-1 (5.38e-1) -	4.697 1e+0 (1.69e+0) -	6.759 0e+0 (2.01e+0) -	5.229 6e-1 (1.17e-1) -	2.160 0e-1 (1.27e-2)
	15	5.430 7e+0 (5.62e+0) -	1.415 3e+1 (4.69e+0) -	1.634 9e+1 (6.82e+0) -	9.546 9e-1 (3.61e-1) -	2.322 9e-1 (1.12e-2)
	20	1.620 0e+1 (5.07e+0) -	1.351 1e+1 (8.23e+0) -	1.921 7e+1 (7.61e+0) -	9.430 5e-1 (2.04e-1) +	1.192 6e+0 (3.51e+0)
MaF 10	8	1.050 9e+0 (6.14e-2) +	2.623 4e+0 (5.74e-2) -	2.828 6e+0 (9.53e-2) -	1.062 4e+0 (4.39e-2) +	1.276 3e+0 (5.60e-2)
	15	2.319 5e+0 (7.12e-2) -	4.084 7e+0 (9.24e-2) -	3.926 6e+0 (2.20e-1) -	1.984 5e+0 (6.86e-2) +	2.145 8e+0 (6.46e-2)
	20	4.686 6e+0 (1.61e-1) -	5.336 8e+0 (1.02e-1) -	5.376 3e+0 (1.23e-1) -	4.328 5e+0 (1.16e-1) =	4.326 4e+0 (1.12e-1)
MaF 11	8	1.148 8e+0 (2.85e-2) -	1.160 2e+0 (4.53e-2) -	2.143 9e+0 (8.06e-1) -	1.286 4e+0 (3.95e-2) -	1.032 6e+0 (3.13e-2)
	15	2.320 1e+0 (1.24e-1) -	2.576 2e+0 (2.98e-1) -	8.998 2e+0 (1.92e+0) -	2.056 7e+0 (5.08e-2) =	2.032 7e+0 (9.19e-2)
	20	4.300 8e+0 (1.41e-1) -	3.997 1e+0 (2.57e-1) +	1.126 0e+1 (3.67e+0) -	4.205 5e+0 (1.25e-1) =	4.184 3e+0 (1.85e-1)
MaF 12	8	3.455 1e+0 (2.13e-2) -	3.194 2e+0 (3.74e-2) =	6.241 6e+0 (8.20e-1) -	3.409 8e+0 (4.04e-2) -	3.189 3e+0 (5.28e-2)
	15	1.102 7e+1 (3.76e-1) -	9.894 5e+0 (5.33e-1) =	2.076 7e+1 (1.99e+0) -	9.926 5e+0 (4.57e-1) =	9.642 0e+0 (6.63e-1)
	20	1.683 1e+1 (6.54e-1) -	1.713 6e+1 (6.25e-1) -	3.246 8e+1 (2.78e+0) -	1.271 1e+1 (9.38e-1) =	1.313 5e+1 (3.30e-1)
MaF 13	8	2.980 9e-1 (2.19e-2) -	1.039 9e-1 (8.88e-3) +	5.167 0e-1 (1.67e-1) -	7.335 6e-1 (8.02e-2) -	1.318 2e-1 (7.91e-3)
	15	3.977 3e-1 (5.38e-2) -	1.551 0e-1 (3.10e-2) +	5.930 2e-1 (2.68e-1) -	8.315 9e-1 (1.36e-1) -	1.788 6e-1 (9.94e-3)
	20	4.229 4e-1 (5.25e-2) -	1.180 5e-1 (1.34e-2) +	4.589 4e-1 (1.51e-1) -	9.386 1e-1 (1.78e-1) -	1.591 9e-1 (8.52e-3)
+ / - / =		7 / 29 / 3	10 / 24 / 5	1 / 35 / 3	9 / 24 / 6	

注: “+”、“-”和“=”分别表示所获得的结果与MaOEA/PAS-ESC相比更好、更差和相似。

4 结论

采用均匀分布的参考向量和参考点能够有效处理具有常规PF形状的优化问题,但是对具有特殊PF形状的优化问题效果不明显.为有效处理具有不同PF形状的MOPs和MaOPs,本文提出了一种基于自适应参考向量的高维多目标进化算法ARVRP.首先,采用自适应参考向量和参考点方法,生成完整参考向量集合参考点集,并利用参考向量集进行种群分解,以获得多样性良好的解;然后,使用参考点集指导指标选择收敛性良好的解;最后,合并两次选择的解,组合为下一代种群.采用自适应参考向量和参考点的方式,使得ARVRP能够适应不同的PF形状,有效处理具有不同PF的优化问题.自适应参考向量和参考点方法,不仅可增强种群的多样性,且对具有不同PF的优化问题具有良好的性能.

上述实验结果表明,与其他几种算法相比,ARVRP在不同PF形状的MOPs和MaOPs中均具有良好的性能.采用自适应参考向量和参考点方法,使得参考向量和参考点具有与需处理问题相似的分布,能够有效处理不同PF形状的优化问题.ARVRP在处理具有断开PF的问题时,性能表现不佳.同时,由于算法在每代均需进行参考向量和参考点自适应,使得计算复杂度极大地增加.因此,下一步工作主要在2个方面进行改进:一是针对具有断开PF的问题进行改进,使得算法能够处理具有断开PF的MOPs和MaOPs,以进一步提高算法的普适性;二是降低算法的计算复杂度并引入约束指标^[37],以满足实际工程应用的需要.

参考文献(References)

- [1] He C, Li M, Zhang C X, et al. A competitive swarm optimizer with probabilistic criteria for many-objective optimization problems[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2022, 8(6): 4697-4725.
- [2] Lei H T, Wang R, Zhang T, et al. A multi-objective co-evolutionary algorithm for energy-efficient scheduling on a green data center[J]. *Computers & Operations Research*, 2016, 75: 103-117.
- [3] Gaspar-Cunha A, Covas J A. Robustness in multi-objective optimization using evolutionary algorithms[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2008, 39(1): 75-96.
- [4] Zhang J W, Xing L N. A survey of multiobjective evolutionary algorithms[C]. *IEEE International Conference on Computational Science and Engineering and IEEE International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing*. Guangzhou, 2017: 93-100.
- [5] Fleming P J, Purshouse R C, Lygoe R J. Many-objective optimization: An engineering design perspective[C]. *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Heidelberg, 2005: 14-32.
- [6] 刘建昌, 李飞, 王洪海, 等. 进化高维多目标优化算法研究综述[J]. *控制与决策*, 2018, 33(5): 879-887. (Liu J C, Li F, Wang H H, et al. Survey on evolutionary many-objective optimization algorithms[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(5): 879-887.)
- [7] Laware A R, Talange D B, Bandal V S. Evolutionary optimization of sliding mode controller for level control system[J]. *ISA Transactions*, 2018, 83: 199-213.
- [8] Hu Z Y, Yang J M, Cui H H, et al. MOEA3D: A MOEA based on dominance and decomposition with probability distribution model[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(4): 1219-1237.
- [9] Hussien A G, Amin M, Wang M J, et al. Crow search algorithm: Theory, recent advances, and applications[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 173548-173565.
- [10] Abualigah L, Elaziz M A, Hussien A G, et al. Lightning search algorithm: A comprehensive survey[J]. *Applied Intelligence*, 2021, 51(4): 2353-2376.
- [11] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [12] Wei Z H, Yang J M, Hu Z Y, et al. An adaptive decomposition evolutionary algorithm based on environmental information for many-objective optimization[J]. *ISA Transactions*, 2021, 111: 108-120.
- [13] Li M Q, Yang S X, Liu X H. Pareto or non-Pareto: Bi-criterion evolution in multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 645-665.
- [14] 华一村. 非规则Pareto前沿面的多目标进化算法研究[D]. 上海: 东华大学, 2020: 15-16. (Hua Y C. Evolutionary algorithms for multi-and many-objective optimization problems with irregular Pareto fronts[D]. Shanghai: Donghua University, 2020: 15-16.)
- [15] Hua Y C, Liu Q Q, Hao K R, et al. A survey of evolutionary algorithms for multi-objective optimization problems with irregular Pareto fronts[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, 8(2): 303-318.
- [16] 邓武, 蔡幸, 周永权, 等. 一种基于多策略差分进化的分解多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(2): 387-392. (Deng W, Cai X, Zhou Y Q, et al. A novel decomposition multi-objective evolutionary algorithm based on differential evolution model with multi-strategy[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(2): 387-392.)
- [17] Zhou J J, Yao X F, Chan F T S, et al. A decomposition based evolutionary algorithm with direction vector adaption and selection enhancement[J]. *Information Sciences*, 2019, 501: 248-271.
- [18] Xiang Y, Zhou Y R, Li M Q, et al. A vector angle-based

- evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131-152.
- [19] Liu Z Z, Wang Y, Huang P Q. AnD: A many-objective evolutionary algorithm with angle-based selection and shift-based density estimation[J]. *Information Sciences*, 2020, 509: 400-419.
- [20] 孔维健, 丁进良, 柴天佑. 高维多目标进化算法研究综述[J]. *控制与决策*, 2010, 25(3): 321-326.
(Kong W J, Ding J L, Chai T Y. Survey on large-dimensional multi-objective evolutionary algorithms[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(3): 321-326.)
- [21] Yuan Y, Xu H, Wang B, et al. Balancing convergence and diversity in decomposition-based many-objective optimizers[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 180-198.
- [22] Phan D H, Suzuki J. R2-IBEA: R2 indicator based evolutionary algorithm for multiobjective optimization[C]. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Cancun, 2013: 1836-1845.
- [23] Luque M, Gonzalez-Gallardo S, Saborido R, et al. Adaptive global WASF-GA to handle many-objective optimization problems[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2020, 54: 100644.
- [24] Liu H L, Chen L, Zhang Q F, et al. Adaptively allocating search effort in challenging many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(3): 433-448.
- [25] Gómez R H, Coello C A C. MOMBI: A new metaheuristic for many-objective optimization based on the R2 indicator[C]. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Cancun, 2013: 2488-2495.
- [26] Li F, Cheng R, Liu J C, et al. A two-stage R2 indicator based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 67: 245-260.
- [27] Saborido R, Ruiz A B, Luque M. Global WASF-GA: An evolutionary algorithm in multiobjective optimization to approximate the whole Pareto optimal front[J]. *Evolutionary Computation*, 2017, 25(2): 309-349.
- [28] Qi Y T, Ma X L, Liu F, et al. MOEA/D with adaptive weight adjustment[J]. *Evolutionary Computation*, 2014, 22(2): 231-264.
- [29] Luo J P, Huang X W, Yang Y, et al. A many-objective particle swarm optimizer based on indicator and direction vectors for many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2020, 514: 166-202.
- [30] Li L, Chang L, Gu T L, et al. On the norm of dominant difference for many-objective particle swarm optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(4): 2055-2067.
- [31] Li J H, Chen G Y, Li M, et al. An adaptive reference vector based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 80506-80518.
- [32] Huband S, Barone L, While L, et al. A scalable multi-objective test problem toolkit[C]. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Guanajuato, 2005: 280-295.
- [33] Cheng R, Li M Q, Tian Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3(1): 67-81.
- [34] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. PlatEMO: A Matlab platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87.
- [35] Ma X L, Zhang Q F, Tian G D, et al. On tchebycheff decomposition approaches for multiobjective evolutionary optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(2): 226-244.
- [36] Dai G M, Zhou C, Wang M C, et al. Indicator and reference points co-guided evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 140: 50-63.
- [37] He C, Li M, Zhang C X, et al. A self-organizing map approach for constrained multi-objective optimization problems[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2022: 1-21.

作者简介

覃灏(1995—), 男, 硕士生, 从事进化计算的研究, E-mail: qin95117@163.com;

李军华(1974—), 男, 教授, 博士, 从事进化计算、智能控制等研究, E-mail: jhlee126@126.com;

黎明(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事图像处理、模式识别、进化算法等研究, E-mail: liming@nchu.edu.cn;

徐三水(1998—), 男, 硕士生, 从事进化算法的研究, E-mail: 2542962464@qq.com.