

# 控制与决策

Control and Decision

## 欠驱动TORA系统的自耦PID控制策略

熊屹林, 曾喆昭

引用本文:

熊屹林, 曾喆昭. 欠驱动TORA系统的自耦PID控制策略[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 853–860.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1382>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于能量分析的桥式起重机防摆控制方法

Anti-swing control method of bridge crane based on energy analysis

控制与决策. 2021, 36(12): 3091–3096 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0694>

#### 基于高阶滑模速度控制器的异步电机模型预测转矩控制

A model predictive torque control for induction motor based on high order sliding mode speed controller

控制与决策. 2021, 36(4): 953–958 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0650>

#### 基于高阶滑模速度控制器的异步电机模型预测转矩控制

A model predictive torque control for induction motor based on high order sliding mode speed controller

控制与决策. 2021, 36(4): 953–958 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0650>

#### 基于领航-跟随的有人/无人机编队队形保持控制

Formation keeping control for manned/unmanned aerial vehicle formation based on leader-follower strategy

控制与决策. 2021, 36(10): 2435–2441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0453>

#### 多采样率不确定离散时滞系统的鲁棒预见控制

Robust preview control for multirate uncertain discrete-time systems with input delay

控制与决策. 2017, 32(12): 2113–2126 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1352>

# 欠驱动 TORA 系统的自耦 PID 控制策略

熊屹林, 曾喆昭<sup>†</sup>

(长沙理工大学 电气与信息工程学院, 长沙 410076)

**摘要:** 针对欠驱动旋转激励平移振荡器 (translational oscillations with a rotational actuator, TORA) 系统的控制问题, 使用一种自耦 PID (self-coupling proportional-integral-differential, SCPID) 控制方法. 该方法首先利用坐标变换使 TORA 系统的质心映射为 Huygens 振动中心, 以实现新系统控制输入解耦, 避免零动态不稳定问题; 然后对 Huygens 振动中心设计平移位置的 SCPID 控制器, 同时获得小球偏转角度的虚拟指令, 进而设计小球偏转角度的 SCPID 控制器, 从而实现 TORA 系统的平衡点跟踪控制; 最后在复频域对闭环控制系统的稳定性进行严格的数学分析和证明. 仿真及与其他方法的结果对比表明, 所设计的控制算法简单高效, 在欠驱动控制系统领域具有实际的应用价值.

**关键词:** 欠驱动 TORA 系统; 坐标变换; Huygens 振动中心; 自耦 PID 控制; 鲁棒稳定性

**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2022.1382

**引用格式:** 熊屹林, 曾喆昭. 欠驱动 TORA 系统的自耦 PID 控制策略 [J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 853-860.

## Research on a self-coupling PID control strategy for an underactuated TORA system

XIONG Yi-lin, ZENG Zhe-zhao<sup>†</sup>

(School of Electrical & Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

**Abstract:** Aiming at the control problems of translational oscillations with a kind of rotational actuator (TORA) system, a self-coupling proportional-integral-differential (SCPID) control method is used. Firstly, the centroid of the TORA system is mapped to the vibration center of Huygens by coordinate transformation, so that the control input of the new system is decoupled and zero dynamic instability is avoided. Then the SCPID controller for the translation position is designed with the Huygens vibration center, the virtual command of the ball deflection angle is obtained at the same time, and the SCPID controller of the ball deflection angle is designed, so as to realize the equilibrium point tracking control of the TORA system. Finally, the stability of the closed-loop control system is analyzed and proved strictly in complex frequency domain. Simulation results and comparison with other methods show that the control algorithm designed is simple and efficient, and has practical application value in the field of underactuated control system.

**Keywords:** underactuated TORA system; coordinate transformation; Huygens vibration center; self-coupling PID control; robust stability

## 0 引言

欠驱动系统指一类控制量个数少于自由度个数的系统, 具有重量轻、能耗小、造价低、灵活性强等突出特点, 被广泛地应用于航空航天<sup>[1-5]</sup>、国防军工<sup>[6-8]</sup>、机械制造<sup>[9-10]</sup>等领域.

具有旋转激励的平移振荡器 (translational oscillations with a rotational actuator, TORA) 系统是一类典型的欠驱动系统, 具有强耦合、非线性、自然不

稳定等特点, 常被作为双自旋航天器的简化模型用于研究自振现象, 后来又被当作一种典型的非线性基准系统, 验证有关控制方法的控制性能. 对于 TORA 系统的控制而言, 现有的控制方法主要可分为两大类: 基于全状态反馈的控制策略<sup>[11-16]</sup>和基于输出反馈的控制策略<sup>[17-22]</sup>. 全状态反馈控制方法是依赖于模型信息的控制方法, 需要使用速度传感器检测位移速度和角速度信息, 在参数时变或存在外部扰动情况下,

收稿日期: 2022-08-01; 录用日期: 2022-11-10.

基金项目: 湖南省教育厅重点项目 (21A0183); 长沙理工大学研究生科研创新项目 (CX2021SS46).

责任编辑: 关新平.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: 508984293@qq.com.

还需要干扰观测器进行状态估计,使得控制系统更为复杂;基于输出反馈的控制策略尽管免去了速度传感器,但也利用了部分模型信息,而且控制器涉及参数较多,其数值大小对控制品质较为敏感,需要反复测试才能镇定,因而控制器的增益鲁棒性较差。

自耦PID (self-coupling proportional-integral-differential, SCPID) 控制理论<sup>[23-24]</sup>是一类新型的控制理论,与现有控制方法相比,主要的优势如下:

1) SCPID控制器不仅保留了传统PID控制器简单实用、不依赖于被控模型的优势,且比例、积分、微分3个增益由一个速度因子统一驱动,科学建立了基于速度因子的PID增益镇定规则(量纲换算规则),解决了传统PID增益镇定困难的问题。

2) 由过渡过程时间 $t_r$ 来镇定速度因子,简单实用<sup>[24]</sup>:① SCPID的速度因子镇定规则为 $z_c = 10\alpha/t_r$ ,  $1 < \alpha \leq 10$ ;② SCPD (self-coupling proportional-differential) 与 SCPI (self-coupling proportional-integral) 的速度因子镇定规则为 $z_c = 20\alpha/t_r$ ,  $1 < \alpha \leq 10$ 。

3) SCPID (包括 SCPD 与 SCPI) 控制系统都是临界阻尼系统,不仅保证了控制系统的稳定性,而且具有良好的动态响应特性。

4) 根据总扰动概念的定义, SCPID 控制理论可将任意复杂的非线性系统等价映射为线性扰动系统,因而基于 SCPID 理论的线性系统和非线性系统的控制是一致的。

本文的主要工作是将 SCPID 控制策略应用于欠驱动 TORA 系统,具体方法是:首先通过坐标变换将 TORA 系统的质心映射为 Huygens 振动中心,消除小球转矩对 Huygens 振动中心的影响,有效避免欠驱动 TORA 系统零动态不稳定的问题;然后对 Huygens 振动中心设计位置跟踪的 SCPID 控制器,同时获得小球旋转角度的虚拟指令;最后根据获得的角度虚拟指令和角度信息设计小球旋转角度的 SCPD 控制器,实现欠驱动 TORA 系统的平衡点跟踪控制。在相同模型参数、初始条件下与其他方法进行对比,验证了本文控制方法的有效性和优越性。

## 1 问题背景

### 1.1 TORA 模型

考虑旋转小球可在垂直平面内转动的 TORA 系统,如图1所示,其模型<sup>[11,22]</sup>为

$$\begin{cases} M_m \ddot{x} + \varepsilon \ddot{\theta} \cos \theta - \varepsilon \dot{\theta}^2 \sin \theta + k_0 x = 0, \\ \varepsilon \ddot{x} \cos \theta + (J_m + J) \ddot{\theta} + \varepsilon g \sin \theta = \tau. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $M_m = M + m$ ,  $\varepsilon = mr$ ,  $J_m = mr^2$ ;  $M$ 和 $m$ 分别是平移振荡小车和旋转小球的质量; $x$ 是平移振荡小车偏离平衡点位置的位移; $r$ 与 $\theta$ 分别是旋转小球的转动半径与转动角度(逆时针方向为正,与垂直向下所形成的夹角); $J$ 是旋转小球关于质心的转动惯量; $k_0$ 是弹簧的弹性系数; $\tau$ 是系统的输入转矩。

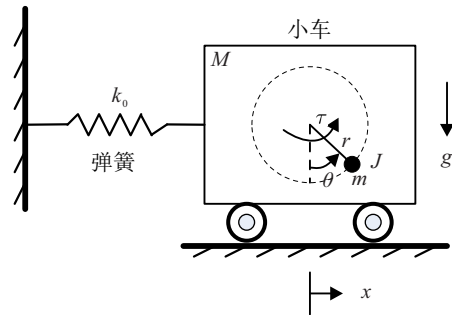


图1 TORA系统

TORA 系统有两个自由度 $x$ 和 $\theta$ ,却只有一个控制输入 $\tau$ ,因而是一类典型的欠驱动系统,且存在强非线性与耦合。为了便于分析,设状态变量分别为 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$ ,则系统(1)可表示为如下系统的形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{f_1(x_1, x_3, x_4)}{p(x_3)} - \frac{\varepsilon \cos x_3}{p(x_3)} \tau, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{f_2(x_1, x_3, x_4)}{p(x_3)} + \frac{M_m}{p(x_3)} \tau. \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} p(x_3) &= M_m(J_m + J) - \varepsilon^2 \cos^2 x_3, \\ f_1(x_1, x_3, x_4) &= \\ & (J_m + J)(\varepsilon x_4^2 \sin x_3 - k_0 x_1) + \varepsilon^2 g \sin x_3 \cos x_3, \\ f_2(x_1, x_3, x_4) &= \\ & \varepsilon(-\varepsilon x_4^2 \sin x_3 + k_0 x_1) \cos x_3 - \varepsilon M_m g \sin x_3. \end{aligned}$$

### 1.2 TORA 模型映射

由系统(2)可知,由于 TORA 系统输入转矩 $\tau$ 与小球的转动角 $x_3 = \theta$ 存在强耦合作用,会引起小车位移输出存在振荡现象,使得系统控制更为复杂。为此,本文对系统(2)做如下坐标变换:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\varepsilon}{M_m} \sin x_3, \\ \dot{z}_1 = z_2 = x_2 + \frac{\varepsilon}{M_m} x_4 \cos x_3. \end{cases} \quad (3)$$

则系统(2)可以映射为如下系统的形式:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -\frac{k_0}{M_m} z_1 + b_1 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{f_2(x_1, x_3, x_4)}{p(x_3)} + b_2 \tau. \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $b_1 = \frac{\varepsilon k_0}{M_m^2}$ ,  $b_2 = \frac{M_m}{p(x_3)}$ .

显然,上述坐标变换使TORA系统(2)的不稳定质心位置  $x_1 = x$  映射到具有平坦输出的 Huygens 振动中心  $z_1$ . 由于新TORA系统(4)的输出是平坦的,即经过映射后,式(4)第2通道中不再含有转矩  $\tau$ ,因而有效避免了非最小相位TORA零动态不稳定的问题. 由于系统(4)与系统(2)是等价映射,由TORA新系统(4)设计的控制器  $\tau$  可以实现对系统(2)的有效控制.

## 2 TORA 控制系统设计

### 2.1 TORA 系统的基本控制原理

为了便于分析,设虚拟控制器  $u_z$  为

$$u_z = \sin x_3, \quad (5)$$

则TORA系统(4)可简化为如下系统的形式:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -\frac{k_0}{M_m} z_1 + b_1 u_z, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = x_5 + b_{20} \tau. \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $b_1 = \frac{\varepsilon k_0}{M_m^2}$  和  $b_{20} = \frac{M_m}{M_m(J_m + J) - \varepsilon^2}$  均是常数;  $x_5 = \frac{f_2(x_1, x_3, x_4)}{p(x_3)} + (b_2 - b_{20})\tau$  是扩张状态.

因为TORA系统的期望轨迹是  $x_{1d} = 0$  与  $x_{3d} = 2n\pi (n = 0, \pm 1, \dots)$ , 所以当  $x_3 = 0$  时,  $b_{20} = \frac{M_m}{p(x_3 = 0)} = \frac{M_m}{M_m(J_m + J) - \varepsilon^2}$ .

根据式(5)可得  $x_3$  的虚拟指令为

$$x_{3r} = \arcsin u_z, \quad (7)$$

其中  $|u_z| \leq 1$ .

考虑到TORA系统中小球的旋转角度  $\theta = 0$  与  $\theta = 2n\pi (n \in \pm 1, \pm 2, \dots)$  在实际物理空间中表示相同的物理状态,为了避免小球出现循环旋转的现象,要求对小球转动角的虚拟指令修改如下:

$$x_{3r} = x_{3d} + \arcsin u_z, \quad (8)$$

其中  $x_{3d}$  是小球的期望角度.

显然,只要设计好小车位移的虚拟控制器  $u_z$ , 即

可获得小球转动角的虚拟指令式(8),据此可设计TORA系统的转矩控制器  $\tau$ ,从而实现欠驱动TORA系统的平衡点跟踪控制.

### 2.2 位移虚拟控制器设计

设计Huygens振动中心的位移虚拟控制器  $u_z$  的目的是获得小球旋转角的虚拟指令  $x_{3r} = x_{3d} + \arcsin u_z$ ,具体方法如下.

设TORA系统的期望质心位置为  $x_{1d} = 0$ ,小球的期望转动角为  $x_{3d} = 0$  或  $2n\pi (n \in \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,从而可得Huygens振动中心位移坐标的期望输出与实际输出分别为

$$z_{1d} = x_{1d} + \frac{\varepsilon}{M_m} \sin x_{3d} = 0, \quad (9)$$

$$z_1 = x_1 + \frac{\varepsilon}{M_m} \sin x_3, \quad (10)$$

其中  $x_1 = x$  和  $x_3 = \theta$  分别是小车实际位移与小球实际旋转角输出.

设位置跟踪误差  $e_{11} = z_{1d} - z_1$ , 积分  $e_{10} = \int_0^t e_{11} dt$ , 微分  $e_{12} = \dot{e}_{11} = \dot{z}_{1d} - \dot{z}_2$ . 结合系统(6),可得TORA系统中Huygens振动中心位置的受控误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_{10} = e_{11}, \\ \dot{e}_{11} = e_{12}, \\ \dot{e}_{12} = \ddot{z}_{1d} + \frac{k_0}{M_m} z_1 - b_1 u_z. \end{cases} \quad (11)$$

根据文献[23-24]的SCPID控制理论思想,本文设计Huygens振动中心的位移虚拟控制器SCPID为

$$u_z = u_{zp} + u_{zi} + u_{zd}. \quad (12)$$

其中积分控制力  $u_{zi}$ 、比例控制力  $u_{zp}$  和微分控制力  $u_{zd}$  如下:

$$\begin{cases} u_{zi} = z_{c1}^3 e_{10} / b_1, \\ u_{zp} = 3z_{c1}^2 e_{11} / b_1, \\ u_{zd} = 3z_{c1} e_{12} / b_1. \end{cases} \quad (13)$$

$z_{c1} > 0$  是SCPID控制器的速度因子,  $b_1 = \frac{\varepsilon k_0}{M_m^2}$ .

为了避免因积分饱和而引起超调与振荡现象,要求对积分控制力  $u_{zi}$  和总控制力  $u_z$  分别进行限幅处理. 由式(5)可知  $|u_z| \leq 1$ , 因此要求  $|u_{zi}| < 1$ .

经过对  $u_{zi}$  与  $u_z$  进行限幅处理后,再根据式(8)即可获得小球旋转角的虚拟指令:  $x_{3r} = x_{3d} + \arcsin u_z$ .

### 2.3 旋转角控制器设计

设计小球旋转角控制器的目的是获得TORA系统的控制输入转矩  $\tau$ . 根据式(12)的位移虚拟控制器  $u_z$  获得小球旋转角的虚拟指令  $x_{3r} = x_{3d} + \arcsin u_z$

后,设旋转角跟踪误差为 $e_{31} = x_{3r} - x_3$ ,则有误差的微分为 $e_{32} = \dot{e}_{31} = \dot{x}_{3r} - x_4$ . 由于旋转角的平衡点是零点,在忽略积分环节的情况下,结合系统(6),可得小球旋转角受控误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_{31} = e_{32}, \\ \dot{e}_{32} = d_2 - b_{20}\tau, \end{cases} \quad (14)$$

其中 $d_2 = \ddot{x}_{3r} - x_5$ 是总扰动.

根据文献[23-24]的自耦PID控制理论思想,在忽略积分环节的情况下,本文设计小球旋转角控制器SCPD为

$$\tau = (z_{c2}^2 e_{31} + 2z_{c2} e_{32})/b_{20}. \quad (15)$$

其中: $z_{c2} > 0$ 是SCPD控制器的速度因子, $b_{20} = \frac{M_m}{M_m(J_m + J) - \varepsilon^2}$ .

考虑到实际物理系统均存在输入饱和情况,设TORA系统的最大输入转矩为 $\tau_{\max}$ ,则要求 $|\tau| \leq \tau_{\max}$ .

## 2.4 控制系统分析

### 2.4.1 小车位移虚拟控制系统鲁棒性分析

**定理1** 设总扰动 $d_1 = \ddot{z}_{1d} + \frac{k_0}{M_m} z_1$ 有界,即 $|d_1| \leq \varepsilon_1$ ,则当且仅当 $z_{c1} > 0$ 时,小车位移闭环控制系统(11)是鲁棒稳定的,且稳态误差有界( $|e_{11}(\infty)| < \varepsilon_1/z_{c1}^2$ ),具有良好的抗扰动鲁棒性.

**证明** 将式(12)与(13)代入(11)的受控误差系统,可得小车位移的SCPID控制系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_{10} = e_{11}, \\ \dot{e}_{11} = e_{12}, \\ \dot{e}_{12} = d_1 - z_{c1}^3 e_{10} - 3z_{c1}^2 e_{11} - 3z_{c1} e_{12}. \end{cases} \quad (16)$$

其中 $d_1 = \ddot{z}_{1d} + \frac{k_0}{M_m} z_1$ 是总扰动.

由于SCPID控制系统(16)实际上是一个在总扰动 $d_1$ 激励下的扰动感知误差系统,总扰动 $d_1$ 的任何变化都会引起SCPID形成的控制力产生反相的变化来抵消总扰动的影响,因而控制系统(16)也可以称为扰动感知控制系统.对系统(16)取拉普拉斯变换,并整理得

$$E_{11}(s) = \frac{s}{(s + z_{c1})^3} D_1(s). \quad (17)$$

定义系统传输函数为

$$H_1(s) = \frac{E_{11}(s)}{D_1(s)} = \frac{s}{(s + z_{c1})^3}. \quad (18)$$

当 $z_{c1} > 0$ 时,由于 $H_1(s)$ 在复频域的左半平面有一个三重极点 $s_p = -z_{c1} < 0$ ,系统(18)或(16)是稳定的;又因为 $z_{c1}$ 与被控对象的模型无关,因而系统(18)

或(16)是鲁棒稳定的.

由系统(18)可得单位冲激响应为

$$h_1(t) = t(1 - 0.5z_{c1}t)e^{-z_{c1}t}, \quad t > 0. \quad (19)$$

因而系统(16)或(17)的时域解为

$$e_{11}(t) = h_1(t) * d_1(t) = \int_0^t h_1(\tau)d_1(t - \tau)d\tau, \quad (20)$$

其中“\*”表示卷积积分运算.

当 $|d_1| \leq \varepsilon_1$ 时,必有如下不等式:

$$|e_{11}(t)| \leq \varepsilon_1 \int_0^t |h_1(\tau)|d\tau. \quad (21)$$

因而有稳态误差为

$$|e_{11}(\infty)| \leq \varepsilon_1 \int_0^\infty |h_1(\tau)|d\tau. \quad (22)$$

经计算得

$$\int_0^\infty |h_1(\tau)|d\tau = \frac{4}{e^2 z_{c1}^2} < 1/z_{c1}^2,$$

其中 $e \approx 2.71$ 是自然对数的底.因而有

$$|e_{11}(\infty)| < \varepsilon_1/z_{c1}^2. \quad (23)$$

由式(23)可知,当总扰动有界时,稳态误差有界,且随速度因子呈平方倍降低,因此增大速度因子有利于提高稳态精度和抗扰动能力.□

### 2.4.2 小球旋转角控制系统鲁棒性分析

**定理2** 设总扰动 $d_2 = \ddot{x}_{3r} - x_5$ 有界,即 $|d_2| \leq \varepsilon_2$ ,则当且仅当 $z_{c2} > 0$ 时,小球旋转角控制系统(14)是鲁棒稳定的,且稳态误差有界( $|e_{21}(\infty)| \leq \varepsilon_2/z_{c2}^2$ ),具有良好的抗扰动鲁棒性.

定理2的证明与定理1类似,不再赘述.

## 2.5 速度因子镇定

由定理1和定理2可知:当且仅当 $z_{c1} > 0$ 、 $z_{c2} > 0$ 时,欠驱动TORA系统的小车位移控制系统与小球旋转角控制系统是鲁棒稳定的,表明SCPID和SCPD控制器的速度因子都具有很大的整定裕度,而且速度因子越大,控制系统的稳态精度越高、抗扰动鲁棒性越强.然而,由式(8)所示的小球旋转角虚拟指令 $x_{3r}$ 是由SCPID控制器的虚拟控制力 $u_z$ 形成的,因此要求小球旋转角SCPD控制器的速度因子 $z_{c2}$ 大于小车位移SCPID控制器的速度因子 $z_{c1}$ ,为此可设两个速度因子的关系如下:

$$z_{c2} = (4 \sim 10)z_{c1}, \quad (24)$$

其中 $z_{c1} > 0$ .

## 3 仿真验证与分析

为了验证本文控制方法的有效性,并与文献[22]进行比较分析,设欠驱动TORA系统的相关参数与文献[22]完全相同,如表1所示,并设采样频率 $f_s =$

1 000 Hz,  $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 最大输入转矩  $\tau_{\max} = 0.25 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

表1 系统参数取值

参数	取值	单位
$M$	1.3608	kg
$m$	0.096	kg
$r$	0.0592	m
$k_0$	186.3	$\text{N} \cdot \text{m}$
$J$	$2.175 \times 10^{-5}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

给定TORA系统的期望输出分别为  $x_{1d} = 0$  和  $x_{3d} = 0$  或  $2n\pi (n \in \pm 1, \pm 2, \dots)$ , 则Huygens振动中心位移坐标的实际输出与期望输出分别为

$$z_1 = x_1 + \frac{\varepsilon}{M_m} \sin x_3,$$

$$z_{1d} = x_{1d} = 0.$$

在后文的仿真1和仿真2中, 两个控制器的速度因子分别设置为

$$z_{c1} = 0.8, z_{c2} = 8z_{c1} = 6.4.$$

欠驱动TORA控制系统整体组成结构如下.

1) SCPID控制器:

$$u_z = u_{zp} + u_{zi} + u_{zd}.$$

其中

$$u_{zp} = 3z_{c1}^2 e_{11}/b, u_{zd} = 3z_{c1} e_{12}/b_1,$$

$$u_{zi} = z_{c1}^3 e_{10}/b_1, |u_{zi}| \leq 0.5, |u_z| \leq 1;$$

$$b_1 = \varepsilon k_0 / M_m^2 \approx 0.5.$$

2) SCPD控制器:

$$\tau = (z_{c2}^2 e_{31} + 2z_{c2} e_{32})/b_{20}.$$

其中

$$e_{31} = x_{3r} - x_3, e_{32} = \dot{e}_{31},$$

$$x_{3r} = x_{3d} + \arcsin u_z,$$

$$b_{20} = \frac{M_m}{M_m(J_m + J) - \varepsilon^2} \approx 1880,$$

$$|\tau| \leq 0.25.$$

文献[22]所给出的输出反馈控制器如下:

$$\tau = -k_p \sin(0.5\vartheta) - k_d \tanh \vartheta + mgr \sin \theta.$$

其中

$$\vartheta = \phi + b \sin \theta,$$

$$\dot{\phi} = -ak_d \tanh(\phi + b \sin \theta),$$

$$a = 450, b = 2;$$

$$k_p = 0.12, k_d = 0.066.$$

下列仿真实验是基于Matlab 2018b 仿真平台进行的.

**仿真1** 设  $x_{1d} = 0$  和  $x_{3d} = 0$  分别表示TORA系统中小车的期望位移和小球旋转角的期望角度, TORA系统初始状态分别为  $x_1^- = 0.025 \text{ m}, x_j^- = 0 (j = 2, 3, 4)$ . 图2是引用文献[22]的插图, 本文控制方法的仿真结果如图3所示.

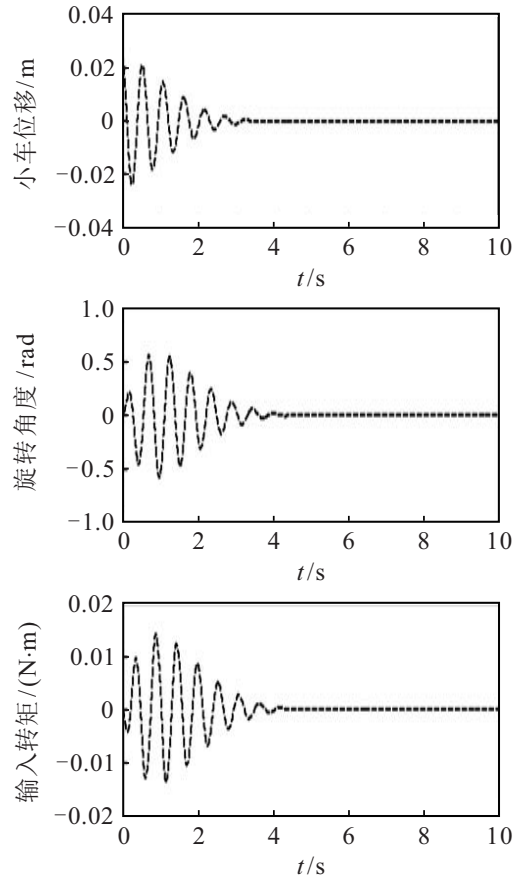


图2 文献[22]的控制结果(仿真1)

由图2和图3可知, 本文控制方法的响应速度不仅比文献[22]快了1s, 而且稳态跟踪精度高(位移跟踪与角度跟踪的最大绝对误差分别为  $|e_{11}| < 10^{-6}, |e_{31}| < 2 \times 10^{-4}$ ).

**仿真2** 避免循环现象的控制实验. 根据文献[22], 设期望位移与期望角度分别为  $x_{1d} = 0, x_{3d} = 8\pi$ ; TORA系统的初始状态为  $x_1^- = x_2^- = x_4^- = 0, x_3^- = 24 \text{ rad}$ . 本文控制方法的仿真结果如图4所示, 图5是引用文献[22]的插图.

由图4和图5可知, 本文控制方法不仅响应速度快(比文献[22]快了1s), 而且稳态跟踪精度高(位移跟踪与角度跟踪的最大绝对误差满足  $|e_{11}| < 5 \times 10^{-7}, |e_{31}| < 3 \times 10^{-4}$ ), 进一步表明了本文控制方法的有效性.

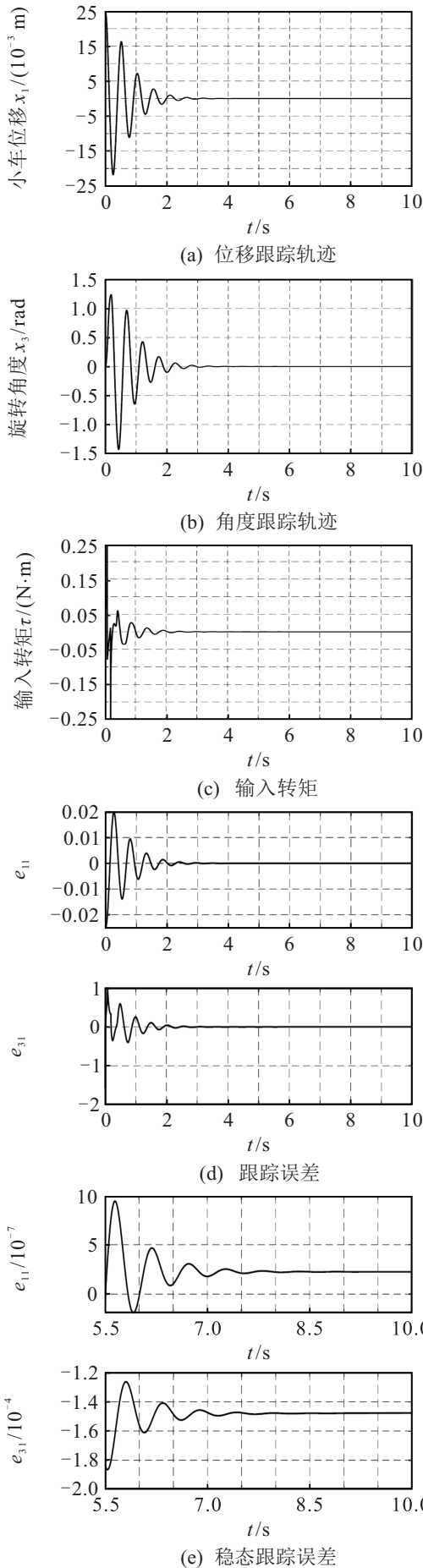


图3 SCPID控制结果(仿真1)

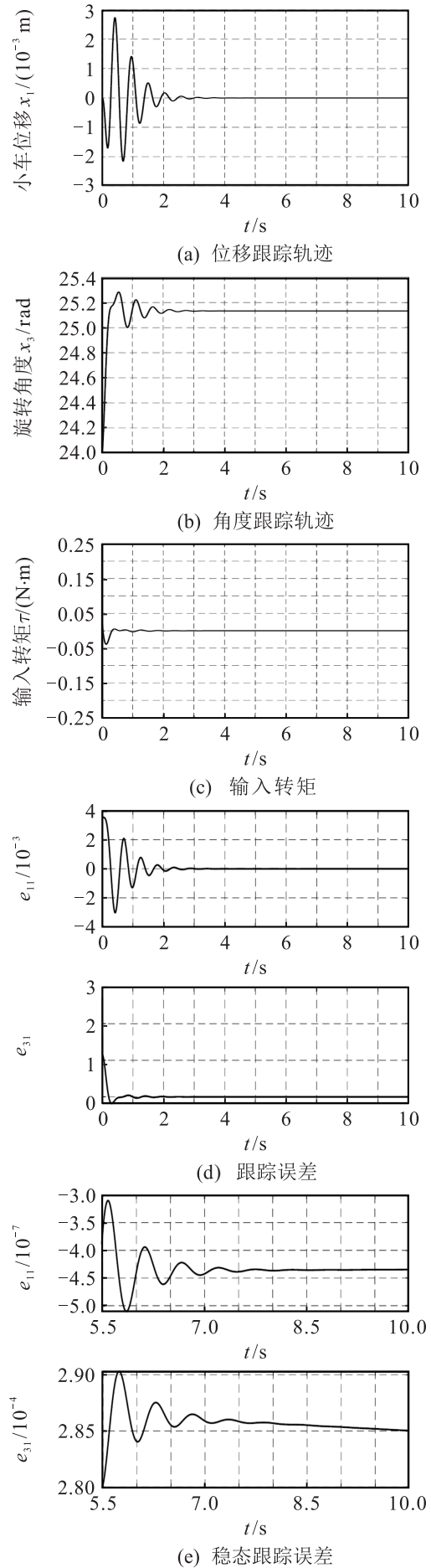


图4 SCPID控制结果(仿真2)

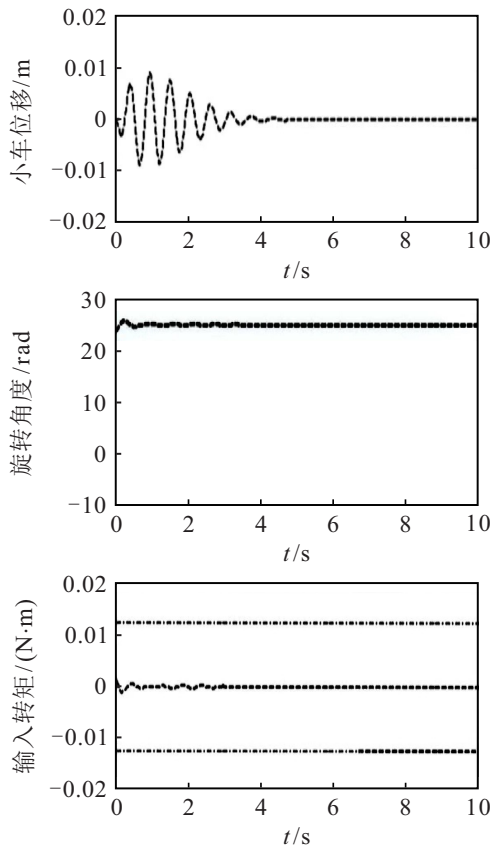


图5 文献[22]的控制结果(仿真2)

**仿真3** 速度因子取值对 SCPID 控制性能的影响. 设  $x_{1d} = 0$  和  $x_{3d} = 0$  分别表示 TORA 系统中小车的期望位移和小球旋转角的期望角度, TORA 系统初始状态分别为  $x_1^- = 0.025 \text{ m}$ ,  $x_j^- = 0 (j = 2, 3, 4)$ . 分别设两组速度因子的取值如表2所示, 控制结果如图6所示.

表2 两组速度因子取值

参数	case1	case2
$z_{c1}$	0.5	2
$z_{c2}$	2	20

由图6可知, 速度因子取值 case1 ( $z_{c1} = 0.5, z_{c2} = 4z_{c1} = 2$ ) 与 case2 ( $z_{c1} = 2, z_{c2} = 10z_{c1} = 20$ ) 都实现了有效的控制, 表明 SCPID 的速度因子具有很大的镇定裕度, 具有良好的鲁棒稳定性.

#### 4 结论

本文针对欠驱动 TORA 系统的控制问题, 使用了一种自耦 PID 控制理论方法, 在复频域分析了闭环控制系统的鲁棒稳定性和抗扰动鲁棒性, 获得了稳态误差的上界, 其科学意义在于增大速度因子有利于提高稳态精度和抗扰动能力. 仿真实验的结果表明, 本文所提控制方法简单有效, 具有良好的动态品质和稳态性能, 同时是大范围鲁棒稳定的控制方法, 在欠驱动非线性系统控制领域具有科学意义与应用价值.

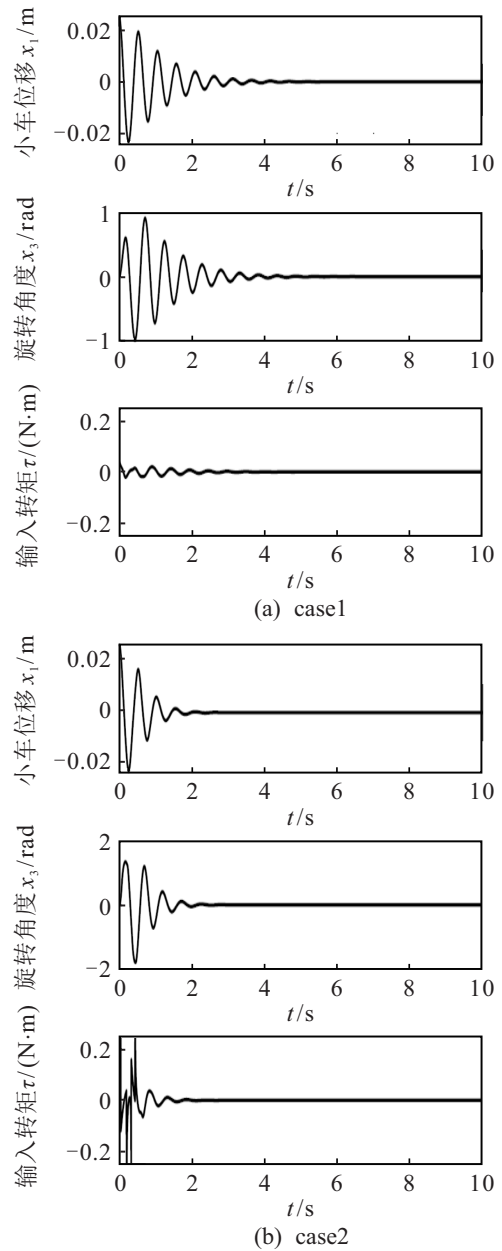


图6 两组速度因子的控制结果

#### 参考文献(References)

- [1] Olfati-Saber R. Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(11): 1949-1952.
- [2] Wang X H, Liu J K, Cai K Y. Tracking control for a velocity-sensorless VTOL aircraft with delayed outputs[J]. Automatica, 2009, 45(12): 2876-2882.
- [3] 袁瑞侠, 刘金琨. 欠驱动 VTOL 飞行器的位置反馈动态面控制[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(11): 2266-2271.  
(Yuan R X, Liu J K. Position feedback dynamic surface control for underactuated VTOL aircraft[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(11): 2266-2271.)
- [4] 孙宁, 张建一, 吴易鸣, 等. 一种双摆效应桥式起重机光滑鲁棒控制方法[J]. 振动与冲击, 2019, 38(22): 1-6.  
(Sun N, Zhang J Y, Wu Y M, et al. Continuous robust

- control for double-pendulum overhead cranes[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(22): 1-6.)
- [5] 王宁, 王永. 基于模糊不确定观测器的四旋翼飞行器自适应动态面轨迹跟踪控制[J]. *自动化学报*, 2018, 44(4): 685-695.  
(Wang N, Wang Y. Fuzzy uncertainty observer based adaptive dynamic surface control for trajectory tracking of a quadrotor[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(4): 685-695.)
- [6] Sun N, Yang T, Fang Y C, et al. Transportation control of double-pendulum cranes with a nonlinear quasi-PID scheme: Design and experiments[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 49(7): 1408-1418.
- [7] Wu X Q, He X X. Nonlinear energy-based regulation control of three-dimensional overhead cranes[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2017, 14(2): 1297-1308.
- [8] 孙宁, 方勇纯, 陈鹤. 欠驱动桥式吊车消摆跟踪控制[J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(3): 326-333.  
(Sun N, Fang Y C, Chen H. Antiswing tracking control for underactuated bridge cranes[J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 326-333.)
- [9] 沈智鹏, 邹天宇, 王茹. 基于扩张观测器的欠驱动船舶轨迹跟踪低频学习自适应动态面输出反馈控制[J]. *控制理论与应用*, 2019, 36(6): 867-876.  
(Shen Z P, Zou T Y, Wang R. Extended state observer based adaptive dynamic surface output feedback control for underactuated surface vessel trajectory tracking with low-frequency learning[J]. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(6): 867-876.)
- [10] Zhang A C, She J H, Lai X Z, et al. Motion planning and tracking control for an acrobot based on a rewinding approach[J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 278-284.
- [11] 武宪青, 张益波. 基于级联型具有旋转激励的平移振荡器系统的滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(2): 307-315.  
(Wu X Q, Zhang Y B. Sliding-mode control of the cascade-based translation oscillators with rotating actuator system[J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(2): 307-315.)
- [12] 张宇, 郭源博, 李芦钰, 等. 基于最大反馈线性化的TORA系统非奇异镇定控制[J]. *控制与决策*, 2018, 33(8): 1415-1421.  
(Zhang Y, Guo Y B, Li L Y, et al. Nonsingular controller for TORA system based on maximal feedback linearization[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(8): 1415-1421.)
- [13] 武宪青, 何熊熊. 欠驱动RTAC系统的自适应耦合控制器设计[J]. *自动化学报*, 2015, 41(5): 1047-1052.  
(Wu X Q, He X X. Adaptive coupling controller design for underactuated RTAC systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(5): 1047-1052.)
- [14] Xu R, Özgüner Ü. Sliding mode control of a class of underactuated systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 233-241.
- [15] Mobayen S. A novel global sliding mode control based on exponential reaching law for a class of underactuated systems with external disturbances[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11(2): 021011.
- [16] Sun N, Wu Y M, Fang Y C, et al. Nonlinear continuous global stabilization control for underactuated RTAC systems: Design, analysis, and experimentation[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, 22(2): 1104-1115.
- [17] Gao B T, Bao Y Q, Xie J H, et al. Passivity-based control of two-dimensional translational oscillator with rotational actuator[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2014, 36(1): 111-118.
- [18] Sun N, Wu Y M, Fang Y C, et al. Nonlinear stabilization control of multiple-RTAC systems subject to amplitude-restricted actuating torques using only angular position feedback[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(4): 3084-3094.
- [19] Boker A M, Khalil H K. Nonlinear observers comprising high-gain observers and extended Kalman filters[J]. *Automatica*, 2013, 49(12): 3583-3590.
- [20] Xu L, Hu Q L. Output-feedback stabilisation control for a class of underactuated mechanical systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(7): 985-996.
- [21] Wu X Q, Gu M M. Adaptive control of the TORA system with partial state constraint[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, 41(4): 1172-1177.
- [22] 武宪青, 徐可心, 张益波. 基于输出反馈的欠驱动TORA系统的有界输入控制[J]. *自动化学报*, 2020, 46(1): 200-204.  
(Wu X Q, Xu K X, Zhang Y B. Output-based feedback control of underactuated TORA systems by bounded inputs[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(1): 200-204.)
- [23] 曾喆昭, 刘文珏. 自耦PID控制器[J]. *自动化学报*, 2021, 47(2): 404-422.  
(Zeng Z Z, Liu W J. Self-coupling PID controllers[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(2): 404-422.)
- [24] 曾喆昭, 陈泽宇. 论PID与自耦PID控制理论方法[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(12): 2654-2662.  
(Zeng Z Z, Chen Z Y. On control theory of PID and auto-coupling PID[J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(12): 2654-2662.)

### 作者简介

熊屹林(1998—), 男, 硕士生, 从事智能控制与应用的研究, E-mail: 364350237@qq.com;

曾喆昭(1963—), 男, 教授, 博士, 从事智能计算、智能控制等研究, E-mail: 508984293@qq.com.