

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于事件触发策略的输出受限磁悬浮系统的有限时间镇定

李娇娇, 韩芝菲, 孙宗耀, 谭庆全, 孟庆华

引用本文:

李娇娇, 韩芝菲, 孙宗耀, 谭庆全, 孟庆华. 基于事件触发策略的输出受限磁悬浮系统的有限时间镇定[J]. *控制与决策*, 2024, 39(3): 861–866.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1289>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 纵向速度和艏向角受限的水面艇有限时间协同路径跟踪

Finite-time cooperative path following of surface vessels with surge velocity and yaw angle constraints

*控制与决策*. 2021, 36(2): 363–370 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0977>

#### 参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

#### 输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制

Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1078–1086 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0820>

#### 孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid

*控制与决策*. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

#### 一类非线性大系统分散自适应预设性能有限时间跟踪控制

Decentralized adaptive prescribed performance finite-time tracking control for a class of large-scale nonlinear systems

*控制与决策*. 2020, 35(12): 3045–3052 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0623>

# 基于事件触发策略的输出受限磁悬浮系统的有限时间镇定

李娇娇<sup>1</sup>, 韩芝菲<sup>2</sup>, 孙宗耀<sup>1†</sup>, 谭庆全<sup>3</sup>, 孟庆华<sup>4</sup>

(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 曲阜师范大学 教育学院, 山东 曲阜 273165;  
3. 北京市地震局, 北京 100080; 4. 杭州电子科技大学 机械工程学院, 杭州 310018)

**摘要:** 研究输出受限磁悬浮系统基于事件触发机制的有限时间稳定控制问题. 借助具有时变阈值的有限时间触发策略和正切型障碍函数, 设计一个新的事件触发控制器, 不仅确保磁悬浮系统的悬浮气隙被限制在一个指定范围, 其状态还在有限时间内收敛到原点. 创新之处在于实现有输出约束和无输出约束控制设计与理论分析的统一, 最后通过仿真表明控制策略的有效性.

**关键词:** 磁悬浮系统; 有限时间镇定; 障碍函数; 事件触发; 输出约束

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1289

引用格式: 李娇娇, 韩芝菲, 孙宗耀, 等. 基于事件触发策略的输出受限磁悬浮系统的有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 861-866.

## Event-triggered finite-time stabilization of maglev system with output constraint

LI Jiao-jiao<sup>1</sup>, HAN Zhi-fei<sup>2</sup>, SUN Zong-yao<sup>1†</sup>, TAN Qing-quan<sup>3</sup>, MENG Qing-hua<sup>4</sup>

(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 2. School of Education, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 3. Earthquake Administration of Beijing Municipality, Beijing 100080, China; 4. School of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** This paper investigates the finite-time stabilization via the event triggered scheme of a maglev system with output constraint. Combining the finite-time trigger strategy with a time-varying threshold and a tangential barrier function, a new event-triggered controller is presented, which not only ensures that the suspension air gap of the maglev system is confined to a specified range but also guarantees that states converge to the origin within a finite time. The innovation lies in the fact that the design and the theory analysis for the constrained and unconstrained output are unified. Finally, the practical simulation is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** maglev system; finite-time stabilization; barrier Lyapunov function; event-triggered; output constraint

## 0 引言

磁悬浮系统有许多不同用途, 如无摩擦轴承、高速磁悬浮客运列车、风洞模型的悬浮、敏感机械的隔振、感应炉中熔融金属的悬浮和制造过程中金属板的悬浮<sup>[1]</sup>. 另一方面, 磁悬浮系统具有严重的不确定性和非线性, 属于开环不稳定类系统, 其控制问题受到了相当多的关注<sup>[2-5]</sup>. 图 1 为磁悬浮系统的简化结构. 在电磁力和重力的作用下, 悬浮过程中悬浮电磁铁从初始位置向上运动至平衡点; 降落过程中悬浮电磁铁从平衡点向下运动至初始位置. 根据牛顿第二定律, 悬浮物体的动力学方程为

$$m\ddot{\delta}(t) = mg - F(i(t), \delta(t)). \quad (1)$$

其中:  $\delta(t)$  为悬浮气隙间距;  $i(t)$  为线圈电流;  $m$  为悬浮体质量;  $g$  为重力加速度; 连续可微函数  $F(i, \delta)$  为向上的电磁力, 通常表示为

$$F(i, \delta) = \frac{\mu_0 N^2 S}{4} \cdot \frac{i^2}{\delta^2}.$$

这里:  $\mu_0$  为真空磁导率;  $N$  为线圈匝数;  $S$  为悬浮电磁铁磁极的有效面积;  $F(\cdot)$  为关于  $i$  和  $\delta$  的非线性函数, 这无疑增加了控制的复杂度.

关于磁悬浮系统, 现有的研究成果主要集中在外部干扰的容错、衰减、执行器失效以及对不确定参数的控制等方面<sup>[6-8]</sup>. 文献[5]通过设计积分滑模面和分段趋近律, 推导出的自适应滑模控制器改善了磁悬浮系统的性能. 文献[6]针对模型不确定性、外界干扰等

收稿日期: 2022-07-19; 录用日期: 2022-12-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62173208); 山东省泰山学者计划项目(tsqn202103061); 山东省高校青创科技计划项目(2019KJN036).

责任编辑: 王燕舞.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: sunzongyao@sohu.com.

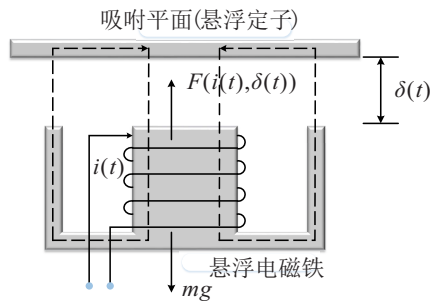


图1 磁悬浮系统

所致悬浮系统失配问题,采用自适应鲁棒控制完成了悬浮体的稳定控制.有限时间控制由于快速收敛性、高控制精度和对外界干扰良好的鲁棒性吸引了研究者的广泛关注<sup>[9-13]</sup>.值得注意的是,上述关于有限时间的研究都是基于连续状态反馈设计的,考虑到现如今很多算法均由数字计算机完成,事件触发(数字采样)控制变得越来越重要<sup>[14-17]</sup>.通过事件触发的控制方式可以大大节约能源,提高控制效率.另外,从实际工程的角度考虑,系统的状态物理量会受到各种类型的约束限制,任何违反约束的行为都会使系统性能变差,不稳定,甚至会减少系统寿命<sup>[18-20]</sup>,故悬浮电磁铁需保证悬浮气隙限制在某一允许区域.

综上所述,现有方法不仅不能对磁悬浮系统高度的非线性进行有效的补偿/控制,而且没有给出障碍李亚普诺夫函数选择的统一化方法.另外,有限时间控制策略本质上是非线性的,它如何在节省能源与维护好的系统性能之间找到平衡也尚未可知.鉴于此,本文对如下问题进行研究:当悬浮气隙的间距满足 $|\delta(t) - \delta_r| < \varepsilon$ 时,如何实现磁悬浮系统基于事件触发的有限时间镇定?其中: $\delta_r$ 是稳定悬浮气隙, $\varepsilon > 0$ 是一个设定的常数.

本文的贡献主要包括:1)在满足输出约束条件下,提出基于事件触发的有限时间镇定方法,确保悬浮气隙的间距限制在规定区域内的同时,保证闭环磁悬浮的系统状态在有限时间内收敛到原点;2)优于文献[18],采用正切型障碍李雅普诺夫函数和变换技术,无需改变控制器的结构,即可实现有约束和无约束输出的设计和分析的统一,同时避免零除现象,简化稳定分析;3)优于文献[15-17]提出的具有时变阈值的触发策略,可以实现资源的节约和系统性能改善,提出的事件触发规则可以解决文献[17]的不连续性问题.

## 1 控制目标与预备知识

本文的控制目标是:对于给定的磁悬浮系统,设计一个基于事件触发的控制器使得:1)磁悬浮系统的悬浮气隙被限制在规定的区域内,即不等式

$|\delta(t) - \delta_r| < \varepsilon$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立;2)系统的状态 $[\delta(t) - \delta_r, \dot{\delta}(t)]^T$ 在有限时间内收敛到0.

最后,给出本文用到的两个不等式<sup>[10,21]</sup>.

**引理1** 设 $m, n, b$ 为正常数, $a(t)$ 为非负连续函数,对于任意 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ ,下式成立:

$$ax^c y^d \leq b|x|^{m+n} + \frac{n}{m+n} \left( \frac{b(m+n)}{m} \right)^{-\frac{m}{n}} a^{\frac{m+n}{n}} |y|^{m+n}.$$

**引理2** 给定常数 $r \geq 0$ ,对于任意 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ ,如下不等式成立:

$$|x + y|^r \leq c_r(|x|^r + |y|^r).$$

其中:若 $r \geq 1$ ,则 $c_r = 2^{r-1}$ ;若 $0 \leq r < 1$ ,则 $c_r = 1$ .此外,若 $r$ 为奇数且 $0 < r \leq 1$ ,则有 $|x^r - y^r| \leq 2^{1-r}|x - y|^r$ .

## 2 主要结果

**定理1** 存在如下形式的事件触发机制:

$$\begin{cases} u(t) = v(t_i), \forall t \in [t_i, t_{i+1}); \\ t_{i+1} = \inf \{t \in \mathbf{R}^+ | \text{在} t \text{时刻, 事件①或事件②发生}\}, \\ t_1 = 0; \\ v(t) = (1 + \rho)\alpha_2(t) + \bar{e}\text{sign}(z_2(t)). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\alpha_2 = (\beta_1\beta_2(\delta - \delta_r) + \beta_2\dot{\delta})^{\frac{1}{2}}$ ,  $z_2 = \dot{\delta}^{\frac{2}{3}} + \beta_1(\delta - \delta_r)$ ,  $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 分别为有明确定义的常数和函数, $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数, $\rho \in [1, 2)$ 为已知的正常数.事件①和事件②描述如下:

$$\begin{cases} \text{①: } \lim_{s \rightarrow t_i^+} \text{sign}(z_2(s)) \neq \lim_{s \rightarrow t_i^-} \text{sign}(z_2(s)) \text{ 或} \\ \lim_{s \rightarrow t_i^+} \text{sign}(z_2(s)) = \lim_{s \rightarrow t_i^-} \text{sign}(z_2(s)) \neq \text{sign}(z_2(t_i)), \\ \text{②: } |e(t)| \geq \Phi(|v(t)|)|u(t)| + \bar{e}. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $e(t) \triangleq v(t) - u(t)$ 表示事件触发误差, $\Phi(|v(t)|) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ 单调递增且 $\Phi(0) = 0$ , $\bar{e} > 0$ 为正的设计参数, $t_i (i \in \mathbf{Z}^+)$ 为控制器更新时间.这种基于事件触发的状态反馈控制确保:

- 1) 闭环系统(1)~(3)的状态 $x_1(t) \triangleq \delta(t) - \delta_r$ ,  $x_2(t) \triangleq \dot{\delta}(t)$ 是全局一致有界的;
- 2)  $x_1(t), x_2(t)$ 在有限时间内收敛到原点;
- 3) 悬浮气隙满足 $|\delta(t) - \delta_r| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ .

**证明** 定理1证明分为控制器设计和理论分析.

1) 控制器设计.假设 $i_r$ 为系统稳定时的励磁电流,则 $i(t) = i_r, \delta(t) = \delta_r$ 是系统的平衡点,系统稳定时有 $F(i_r, \delta_r) = mg$ 成立.通过泰勒展开方法并忽略高阶项,可以得到

$$F(i, \delta) = mg + \frac{\mu_0 N^2 i_r S}{2\delta_r^2} (i - i_r) - \frac{\mu_0 N^2 i_r^2 S}{2\delta_r^3} (\delta - \delta_r). \quad (4)$$

将式(4)代入(1), 得到

$$m\ddot{\delta}(t) + Q_1(\delta(t) - \delta_r) + Q_2(i(t) - i_r) = 0. \quad (5)$$

其中:  $Q_1 = -\mu_0 N^2 i_r^2 S / (2\delta_r^3)$  为位移刚度系数,  $Q_2 = \mu_0 N^2 i_r S / (2\delta_r^2)$  为电流刚度系数. 定义  $u(t) = i(t) - i_r$ ,  $a = Q_2/m$ ,  $h = -Q_1/m$ , 式(5)变换为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -au(t) + hx_1(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (6)$$

输出  $y(t)$  需要满足  $|y(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ . 引入函数

$$V_1(x) = \frac{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}}{22\pi/9} \tan\left(\frac{\pi x_1^{\frac{22}{9}}}{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}}\right). \quad (7)$$

考虑到  $|y| = |x_1| < \varepsilon$ , 可知  $0 \leq \frac{\pi}{2} x_1^{\frac{22}{9}} \varepsilon^{-\frac{22}{9}} < \frac{\pi}{2}$ . 因此,  $V_1(x)$  是关于  $x_1$  的正定函数. 令  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , 可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} V_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}}{22\pi/9} \tan\left(\frac{\pi x_1^{\frac{22}{9}}}{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}}\right) = \frac{9}{22} x_1^{\frac{22}{9}}. \quad (8)$$

而文献[10]采用如下仅适用于无约束输出系统的控制设计与分析形式的函数:

$$W_1 = \int_0^{x_1} s^{\frac{13}{9}} ds = \frac{9}{22} x_1^{\frac{22}{9}}. \quad (9)$$

这表明  $V_1(x)$  在不改变控制器结构的前提下, 统一了有约束输出和无约束输出的设计与分析. 令  $z_1 = x_1$ , 则有

$$\dot{V}_1 = \Omega_1(x_1) x_1^{\frac{13}{9}} (x_2 - \alpha_1) + \Omega_1(x_1) x_1^{\frac{13}{9}} \alpha_1, \quad (10)$$

其中  $\Omega_1(x_1) = \sec^2\left(\frac{\pi x_1^{\frac{22}{9}}}{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}}\right) \geq 1$ . 选择连续虚拟控制器

$$\alpha_1 = -3z_1^{\frac{5}{9}} \triangleq -\beta_1^{\frac{5}{9}} z_1^{\frac{5}{9}}, \quad (11)$$

式(10)可以写为

$$\dot{V}_1 = -3z_1^2 + \Omega_1(x_1) x_1^{\frac{13}{9}} (x_2 - \alpha_1). \quad (12)$$

进一步, 引入  $z_2 = x_2^{\frac{9}{5}} - \alpha_1^{\frac{9}{5}}$ , 并且令

$$V_2(x_1, x_2) = V_1(x_1) + W_2(x_1, x_2), \quad (13)$$

其中

$$W_2(x_1, x_2) = \int_{\alpha_1}^{x_2} (s^{\frac{9}{5}} - \alpha_1^{\frac{9}{5}})^{\frac{17}{9}} ds, \quad (14)$$

不难推出

$$\frac{5}{22} 2^{-\frac{68}{45}} |x_2 - \alpha_1|^{\frac{22}{5}} \leq W_2(x_1, x_2) \leq 2^{\frac{4}{5}} |z_2|^{\frac{22}{9}}. \quad (15)$$

对式(13)进行求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -3z_1^2 - az_2^{\frac{17}{9}} (u - \alpha_2) + az_2^{\frac{17}{9}} \alpha_2 + hz_2^{\frac{17}{9}} x_1 + \\ & \frac{\partial W_2}{\partial x_1} x_2 + \Omega(x_1) x_1^{\frac{13}{9}} (x_2 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (16)$$

下面需要对式(16)右边的最后3项进行估计. 根据引理1容易得到

$$hz_2^{\frac{17}{9}} x_1 \leq \frac{2}{3} z_1^2 + \omega_{21}(x_1) z_2^2, \quad (17)$$

其中  $\omega_{21}(x_1) = \frac{17}{18} 12^{-\frac{1}{17}} h^{\frac{18}{17}} (1 + z_1^2)^{\frac{8}{17}}$  是正函数, 且

$$\Omega_1(x_1) x_1^{\frac{13}{9}} (x_2 - \alpha_1) \leq \frac{2}{3} z_1^2 + \omega_{22}(x_1) z_2^2, \quad (18)$$

这里  $\omega_{22}(x_1) = \frac{5}{18} 2^{\frac{8}{5}} \left(\frac{12}{13}\right)^{-\frac{18}{5}} \Omega_1^{\frac{18}{5}}$ . 接下来, 有

$$\frac{\partial W_2}{\partial x_1} x_2 \leq \frac{2}{3} z_1^2 + \omega_{23} z_2^2, \quad (19)$$

其中  $\omega_{23} = 3^{\frac{252}{55}} 2^{\frac{8}{13}} \frac{13}{18} \left(\frac{12}{5}\right)^{-\frac{5}{13}} \left(\frac{17}{9}\right)^{\frac{18}{13}} + \frac{17}{9} 2^{\frac{4}{9}} 3^{\frac{14}{5}}$  是常数. 定义正函数  $\Omega_2(x_1) = \omega_{21} + \omega_{22} + \omega_{23}$ , 将式(17)~(19)代入(16), 可得

$$\dot{V}_2 \leq -z_1^2 + \Omega_2 z_2^2 - az_2^{\frac{17}{9}} (u - \alpha_2) - az_2^{\frac{17}{9}} \alpha_2. \quad (20)$$

通过选择

$$\alpha_2 = \frac{1}{a} (1 + \Omega_2) z_2^{\frac{1}{5}} \triangleq \beta_2^{\frac{1}{5}} z_2^{\frac{1}{5}}, \quad (21)$$

可以得到

$$\dot{V}_2 \leq -z_1^2 - z_2^2 - az_2^{\frac{17}{9}} (u - \alpha_2). \quad (22)$$

最后, 选取式(2)和(3)表示的事件触发机制完成设计过程.

2) 理论分析. 为了方便和更清晰地描述, 定义  $t_i^* = t_{i+1} - t_i$  为触发时间间隔, 并给出如下记法:  $t_i^{\textcircled{1}}$  表示在  $t_i$  时刻 $\textcircled{1}$ 发生,  $t_{i+1}^{\textcircled{2}}$  表示在  $t_{i+1}$  时刻 $\textcircled{2}$ 发生, 其中  $j, k = 1, 2$  且  $i \in \mathbf{Z}^+$ .

a) 磁悬浮系统的状态在整个时间区间上有定义意味着芝诺现象和有限时间逃逸现象均不会发生.

首先要证明芝诺现象不会发生. 根据式(2)和(3)可得, 区间  $[t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}]$  包含4种组成形式, 分别为  $\{t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{1}}\}$ ,  $\{t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}\}$ ,  $\{t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{1}}\}$ ,  $\{t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}\}$ . 理论上讲, 需要证明对于上述4种情形, 存在有限时间  $t^*$  使得不等式  $t_{i+1}^{\textcircled{2}} - t_i^{\textcircled{1}} \geq t^*$  成立. 为了简化证明过程, 首先证明  $\{t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{1}}\}$  不会影响整体芝诺现象, 然后针对  $\{t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{1}}\}$ ,  $\{t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}\}$ ,  $\{t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}\}$  三种情形给出  $t^*$  的具体表达式. 对于任意的非负常数  $D_0^*$  和有限正常数  $D^*$ , 区间  $[D_0^*, D_0^* + D^*]$  被分割成一系列子区间  $[t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}], i \in \mathbf{Z}^+$ . 不失一般性, 将触发时刻分别记为  $D_0^*, D_1^*, \dots$ , 如果芝诺现象发生, 则在  $[D_0^*, D_0^* + D^*]$  上子区间的数量是无限的. 事实上, 对于  $t^*$  和  $D^*$ , 存在有限常数  $\iota \in \mathbf{N}$ , 满足

$$\iota t^* \leq D^* \leq (\iota + 1)t^*.$$

进一步可以证明:  $D_0^*$  时刻事件 $\textcircled{2}$ 发生,  $D_1^*$  时刻事件 $\textcircled{1}$ 或 $\textcircled{2}$ 发生. 即使事件 $\textcircled{1}$ 在此刻发生且  $D_1^* - D_0^*$  趋于0, 也不会造成困扰. 因为在接下来的时刻  $D_2^*$ , 事

件①或②必然发生;也就是说,存在一个明确的 $t^*$ 使得 $D_2^* - D_0^* > t^*$ 成立. 遵循相同的思路,有

$$D_4^* - D_2^* > t^*, \dots, D_{2(\iota+1)}^* - D_{2\iota}^* > t^*,$$

鉴于此,即可得到

$$\iota t^* \leq D^* \leq (\iota + 1)t^* < D_{2(\iota+1)}^* - D_0^*.$$

这也意味着在区间 $[D_0^*, D_0^* + D^*]$ 上触发的次数不会超过 $2\iota + 3$ . 下面针对 $\{t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{1}}\}$ 、 $\{t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}\}$ 、 $\{t_i^{\textcircled{3}}, t_{i+1}^{\textcircled{3}}\}$ 这三种情况找出 $t^*$ . 定义

$$t^* \triangleq \inf_{i \in \mathbf{Z}^+} \{t_{i+1}^{\textcircled{1}} - t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}} - t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{3}} - t_i^{\textcircled{3}}\}.$$

对于 $\{t_i^{\textcircled{1}}, t_{i+1}^{\textcircled{1}}\}$ ,  $z_2(t)$ 是连续可微的这一事实表明了 $t_{i+1}^{\textcircled{1}} - t_i^{\textcircled{1}}$ 不会趋于0. 因此,存在一个正常数 $t_0^*$ 使得对于所有的 $i \in \mathbf{Z}^+$ ,有 $t_{i+1}^{\textcircled{1}} - t_i^{\textcircled{1}} \geq t_0^*$ 成立. 对于 $\{t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}\}$ ,如果 $t_{i+1}^{\textcircled{2}} - t_i^{\textcircled{2}} \triangleq t_{i1}^*$ 趋于0,则根据 $\alpha_2, \Phi, v, z_1, z_2, \text{sign}(z_2(t))$ 的连续性,得到

$$\begin{aligned} |e(t_{i+1}^{\textcircled{2}})| &= \lim_{t_i^* \rightarrow 0} |v(t_i^{\textcircled{2}} + t_i^*) - u(t_i^{\textcircled{2}} + t_i^*)| = \\ & \lim_{t_i^* \rightarrow 0} \bar{e} |\text{sign}(z_2(t_i^{\textcircled{2}} + t_i^*)) - \text{sign}(z_2(t_i^{\textcircled{2}}))| + \\ & \lim_{t_i^* \rightarrow 0} (1 + \rho) |\alpha_2(t_i^{\textcircled{2}} + t_i^*) - \alpha_2(t_i^{\textcircled{2}})| = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

然而,由式(3)可得

$$\begin{aligned} |e(t_{i+1}^{\textcircled{2}})| &= \lim_{t_{i1}^* \rightarrow 0} |e(t_i^{\textcircled{2}} + t_{i1}^*)| \geq \\ & |u^{pn}(t_i^{\textcircled{2}})| \lim_{t_{i1}^* \rightarrow 0} \Phi(|v^{pn}(t_i^{\textcircled{2}} + t_{i1}^*)|) + \bar{e}(t_i^{\textcircled{2}}) \geq \bar{e}(t_i^{\textcircled{2}}). \end{aligned}$$

这就形成了矛盾. 对于 $\{t_i^{\textcircled{2}}, t_{i+1}^{\textcircled{2}}\}$ ,采用相同的证明方式可以证明 $t_{i+1}^{\textcircled{2}} - t_i^{\textcircled{2}} \triangleq t_{i2}^*$ 不会趋于0. 定义 $t^* = \inf\{t_0^*, t_{i1}^*, t_{i2}^*\}, \forall i \in \mathbf{Z}^+$ . 换句话说,存在有限时间 $t^* > 0$ ,使得对于所有的 $j, k = 1, 2$ 且 $i \in \mathbf{Z}^+$ 有 $t_{i+1}^{\textcircled{k}} - t_i^{\textcircled{k}} = t^*$ 成立,因此芝诺现象不会发生.

下面证明 $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ 是全局一致有界的. 由闭环系统的连续性,自然地得到 $x(t)$ 在每个时间区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上有定义且是连续的. 受文献[14]的启发,为了实现整个时间轴上的连续性,在 $[t_i, t_{i+1})$ 中定义 $x(t_i) \triangleq \lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t)$ 作为初始状态,因此下面的分析将在 $[t_i, t_{i+1})$ 上进行.

首先,由式(3)得到

$$|v(t) - u(t)| < \Phi(|v|)|u(t)| + \bar{e}, t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (24)$$

由 $v(t), u(t), \Phi(t)$ 在区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上的连续性可得,存在一个实变函数 $0 \leq \lambda(t) \leq 1$ ,有

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t) + \tau(t)(-\Phi(t)|u(t)| - \bar{e}) + \\ & (1 - \tau(t))(\Phi(t)|u(t)| + \bar{e}) = \\ & (1 + (1 - 2\tau(t))\Phi(t)\text{sign}(u(t)))u(t) + \\ & (1 - 2\tau(t))\bar{e}. \end{aligned}$$

令 $\tau_1(t) = (1 - 2\tau(t))\text{sign}(u(t)), \tau_2(t) = 1 - 2\tau(t)$ ,即满足 $|\tau_1(t)| \leq 1, |\tau_2(t)| \leq 1$ .  $u(t)$ 的符号是不变的,故连续函数 $\tau_1(t), \tau_2(t)$ 的表达式是明确的. 进而有

$$v(t) = (1 + \Phi(t)\tau_1(t))u(t) + \bar{e}\tau_2(t), \forall [t_i, t_{i+1}). \quad (25)$$

于是有

$$u(t) = \frac{v(t)}{1 + \Phi(t)\tau_1(t)} - \frac{\bar{e}\tau_2(t)}{1 + \Phi(t)\tau_1(t)}. \quad (26)$$

注意到 $a z_2^{\frac{17}{9}} \alpha_2 = a \beta_2^{\frac{1}{9}} z_2^2 > 0$ . 将式(2)和(26)代入(22),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -z_1^2 - z_2^2 + a z_2^{\frac{17}{9}} \alpha_2 \left( -\frac{1 + \rho}{1 + \Phi\tau_1} + 1 \right) + \\ & \frac{a\bar{e}}{1 + \Phi\tau_1} (-|z_2|^{\frac{17}{9}} + \tau_2 z_2^{\frac{17}{9}}) \leq -z_1^2 - z_2^2. \end{aligned} \quad (27)$$

借助于文献[10]的分析可得 $x(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1})$ 上是有界的,这表明对于所有的 $i \in \mathbf{Z}^+$ , $x(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1})$ 上不存在有限时间逃逸现象. 对所有的 $[t_i, t_{i+1})$ 取并集,即可得到 $x(t)$ 在 $[0, T)$ 上有定义,其中 $T \in [0, \infty)$ . 若 $T < \infty$ ,则芝诺现象会发生,这与前面所证芝诺现象不发生相矛盾,因此 $x(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致有界.

b) 下面证明 $x(t)$ 在有限时间内收敛到0. 利用

$$\int_{\alpha_1}^{x_2} (s^{\frac{5}{9}} - \alpha_1^{\frac{5}{9}})^{\frac{17}{9}} ds \leq 2(z_1^{\frac{22}{9}} + z_2^{\frac{22}{9}})$$

和引理2,不难得到

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{20}{11}} V_2^{\frac{9}{11}} &= \\ 2^{-\frac{20}{11}} \left( \frac{2\varepsilon^{22/9}}{22\pi} \tan \left( \frac{\pi x_1^{\frac{22}{9}}}{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}} \right) \right)^{\frac{9}{11}} &+ \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2). \end{aligned}$$

在此基础上,结合式(27),得出

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 + 2^{-\frac{20}{11}} V_2^{\frac{9}{11}} &\leq \\ -\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + 2^{-\frac{20}{11}} \left( \frac{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}}{22\pi/9} \tan \left( \frac{\pi x_1^{\frac{22}{9}}}{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}} \right) \right)^{\frac{9}{11}}. \end{aligned}$$

注意到存在一正常数 $\varsigma_1$ ,使得 $\tan \xi < 2\xi, \xi < \varsigma_1$ ,故有

$$\tan \left( \frac{\pi x_1^{\frac{22}{9}}}{2\varepsilon^{\frac{22}{9}}} \right) \leq \frac{\pi x_1^{\frac{22}{9}}}{\varepsilon^{\frac{22}{9}}}, x_1 < \varsigma_2,$$

其中 $\varsigma_2$ 为正常数. 定义 $\mathcal{Y} = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| < \varsigma\}$ ,其中 $\varsigma = \min\{\varsigma_2, \varepsilon\}$ . 下面考虑两种情形下的收敛时间.

case 1: 当 $x(0) \in \mathcal{Y}$ 时,不难得到

$$\dot{V}_2 + 2^{-\frac{20}{11}} V_2^{\frac{9}{11}} \leq -\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + 2^{-\frac{20}{11}} \frac{9}{11} z_1^2 \leq 0. \quad (28)$$

进一步地,根据有限时间稳定性理论,通过式(28)可以得出 $x(t)$ 在有限时间内收敛到0,并且收敛时间为 $T_1 = \frac{11}{2} 2^{\frac{20}{11}} V_2^{\frac{2}{11}}(x(0))$ .

case 2: 当 $x(0) \notin \mathcal{Y}$ 时,假设 $T_2$ 是 $x(t)$ 第1次到达 $\mathcal{Y}$ 边界的时间. 由于 $\dot{V}_2 \leq 0$ ,对于 $\forall t \geq T_2$ ,有 $x(t) \in \mathcal{Y}$ 成立. 需要强调 $T_2$ 是一个有限的时间. 事实上, $x(t)$ 在 $[0, \infty)$ 有界,即存在一个正常数 $\bar{\varsigma}$ 使得 $\|x(t)\|$ 满足

$\|x(t)\| \leq \bar{\epsilon}$ , 并且可以通过选择  $\bar{\epsilon}$  使其满足  $\bar{\epsilon} \geq \epsilon$ . 因此, 连续函数  $Y(x) = z_1^2 + z_2^2$  在闭集  $[\epsilon, \bar{\epsilon}]$  上有一个最小值  $k = \min\{Y(x)\}$ . 由式(27)可以得到

$$V_2(x(0)) \geq \int_0^t Y(x(s))ds \geq \int_0^t kds = kt.$$

容易得到  $0 \leq t \leq \frac{V_2(x(0))}{k} < \infty$ . 因此, 可以选择  $T_2 = V_2(x(0))/k$ , 且  $x(t) \in \mathcal{Y}, \forall t \geq T_2$ . 同理, 当  $x(T_2) \in \mathcal{Y}$  时, 容易证明  $x(t)$  在有限时间  $T_3 = \frac{11}{2} 2^{\frac{20}{11}} V_2^{\frac{2}{11}}(x(T_2))$  内收敛到 0. 总时间为  $T = T_2 + T_3$ .

c) 最后证明系统的输出被限制在规定的范围内. 假设  $x_1(0) < \epsilon$ , 通过式(27)可以推出  $V_2(x(t)) \leq V_2(x(0)), \forall t \geq 0$ , 据此可得

$$V_1(x_1) = \frac{9\epsilon^{22/9}}{11\pi} \tan\left(\frac{\pi x_1^{22/9}}{2\epsilon^{22/9}}\right) \leq V_2(x(0)), \forall t \geq 0.$$

这表明

$$\frac{\pi x_1^{22/9}}{2\epsilon^{22/9}} \leq \arctan\left(\frac{11\pi}{9\epsilon^{22/9}} V_2(x(0))\right) < \frac{\pi}{2}, \forall t \geq 0.$$

故系统输出满足  $|y(t)| = |x_1(t)| < \epsilon, \forall t \geq 0$ .  $\square$

### 3 仿真分析

给定磁悬浮系统参数如下:  $N = 640, S = 0.5 \text{ m}^2, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}, m = 400 \text{ kg}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, i_r = 10 \text{ A}, \delta_r = 0.013 \text{ m}, \epsilon = 0.015 \text{ m}, \bar{\epsilon} = 0.01, \Phi = \tanh\left(\frac{|v|}{1000}\right), \rho = 1$ . 据此算出  $Q_1 = -5857061.124, Q_2 = 7686.8895, a = 19.2172, h = 14642.6528$ .

根据控制器的设计过程可以得到  $\alpha_1 = -3z_1^{\frac{5}{9}}, \alpha_2 = \frac{1}{19.22}(1 + \Omega_2)z_2^{\frac{1}{9}}$ . 其中:  $\Omega_1 = \sec^2(45140.161x_1^{\frac{22}{9}})$ ,  $\omega_{21} = \frac{17}{18}2^{-\frac{1}{17}}(14642.653)^{\frac{18}{17}}(1 + x_1^2)^{\frac{8}{17}}, \omega_{23} = 3^{\frac{252}{65}}2^{\frac{8}{13}}\frac{13}{18}\left(\frac{12}{5}\right)^{-\frac{5}{13}}\left(\frac{17}{9}\right)^{\frac{18}{13}} + \frac{17}{9}2^{\frac{4}{9}}3^{\frac{14}{5}}, \omega_{22} = \frac{5}{18}2^{\frac{8}{5}}\left(\frac{12}{13}\right)^{-\frac{13}{5}}\Omega_1^{\frac{18}{5}}, \Omega_2 = \omega_{21} + \omega_{22} + \omega_{23}$ .

在仿真中, 分别选取初值为  $[x_1(0), x_2(0)]^T = [0.012, 0.008]^T, [x_1(0), x_2(0)]^T = [-0.012, 0.008]^T, [x_1(0), x_2(0)]^T = [0.005, 0.008]^T$ . 此外, 为了表明控制的有效性和优越性, 与传统PID控制方法进行仿真实验对比. PID控制参数选择如下:  $K_p = -10, K_i = -0.45, K_D = -0.0025$ .

图2~图6展示了仿真结果: 1)图2和图3表明  $x_1$  和  $x_2$  在有限时间内收敛到0, 即所设计的控制律能在有限时间内镇定磁悬浮系统, 并保证悬浮气隙长度保持在规定的范围内; 2)图4表明实际控制在有限时间内收敛到0; 3)图5展示了事件触发的间隔, 即实际控制信号以分段常数的形式不规则地传递到执行器, 所以当系统的状态收敛到零后, 从控制器到执行器的信号传输也随即终止; 4)图6表明有限时间控制保证  $x_1(t)$  收敛到0, 而传统PID控制只保证  $x_1(t)$  收敛到一

个小邻域, 且会不断震荡.

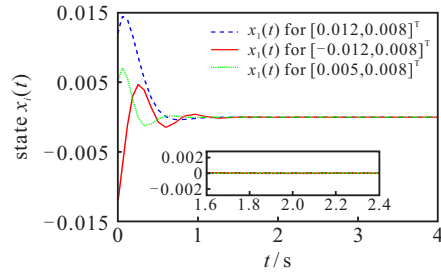


图2 有限时间控制下状态  $x_1(t)$  的轨迹

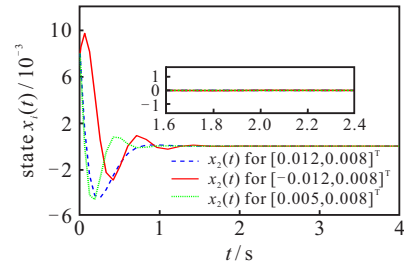


图3 有限时间控制下状态  $x_2(t)$  的轨迹

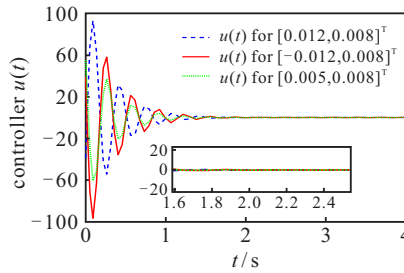


图4 有限时间控制下控制器  $u(t)$  的轨迹

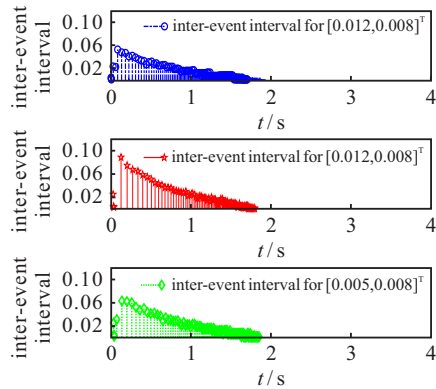


图5 有限时间控制下触发事件的时间间隔

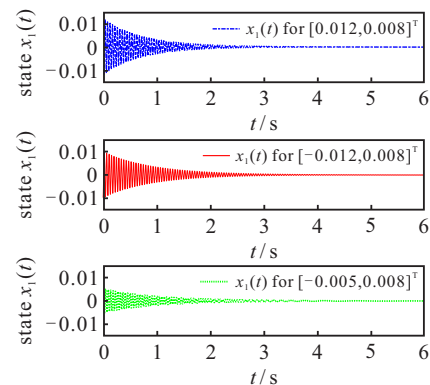


图6 PID控制下状态  $x_1(t)$  的轨迹

## 4 结论

本文研究了输出受约束的磁悬浮系统基于事件触发的有限时间镇定问题. 在避免芝诺现象的前提下, 所设计的控制器不仅能够节约通信/计算资源, 保证输出被约束在指定范围, 同时能够使得系统的悬浮气隙在有限时间内收敛到平衡位置.

### 参考文献(References)

- [1] Barie W, Chiasson J. Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation[J]. *International Journal of Systems Science*, 1996, 27(11): 1153-1163.
- [2] Zaheer A, Salman M, Mehdi N. Sampled-data output feedback regulation of magnetic levitation system[C]. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Taipei, 2013: 1-6.
- [3] Mizuno T, Takasaki M, Ishino Y. Controllability and observability of parallel magnetic suspension systems[J]. *Asian Journal of Control*, 2016, 18(4): 1313-1327.
- [4] Li Y, Cai B, Song X Y, et al. Modeling of maglev yaw system of wind turbines and its robust trajectory tracking control in the levitating and landing process based on ndob[J]. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(2): 770-782.
- [5] Lan Y P, Li J. Adaptive fuzzy sliding mode control for magnetic suspension system of linear synchronous motor[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(3): 693-698.
- [6] Liu D S, Li J, Zhang K. The design of the nonlinear suspension controller for EMS maglev train based on feedback linearization[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2005, 27(2): 96-101.
- [7] Liu Y J, Zeng Q, Tong S C, et al. Actuator failure compensation-based adaptive control of active suspension systems with prescribed performance[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(8): 7044-7053.
- [8] Li X H, Zhang W D, Wang Y Y. Simultaneous fault estimation for Markovian jump systems with generally uncertain transition rates: A reduced-order observer approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(9): 7889-7897.
- [9] Liu Y G. Global finite-time stabilization via time-varying feedback for uncertain nonlinear systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2014, 52(3): 1886-1913.
- [10] Sun Z Y, Xue L R, Zhang K M. A new approach to finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system[J]. *Automatica*, 2015, 58: 60-66.
- [11] Sun Z Y, Yun M M, Li T. A new approach to fast global finite-time stabilization of high-order nonlinear system[J]. *Automatica*, 2017, 27(13): 2198-2217.
- [12] 刘彩云, 孙宗耀, 孟庆华, 等. 一类非线性系统的全局快速有限时间鲁棒控制[J]. *控制与决策*, 2020, 35(4): 1004-1008.  
(Liu C Y, Sun Z Y, Meng Q H, et al. Global fast finite-time robust control for a class of nonlinear systems[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(4): 1004-1008.)
- [13] 陈明, 李小华. 基于预设性能的非仿射非线性系统自适应有限时间控制[J]. *控制与决策*, 2020, 35(5): 1259-1264.  
(Chen M, Li X H. Adaptive finite time control for nonaffine nonlinear systems based on preset performance[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(5): 1259-1264.)
- [14] Sun Z Y, Zhou C, Liu Z G, et al. Fast finite-time adaptive event-triggered tracking for uncertain nonlinear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(17): 7806-7821.
- [15] Xing L T, Wen C Y, Liu Z T, et al. Event-triggered adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(4): 2071-2076.
- [16] Li M, Guo J, Xiang Z R. Global adaptive finite-time stabilization for a class of  $p$ -normal nonlinear systems via an event-triggered strategy[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(10): 4059-4074.
- [17] Zhang C H, Yang G H. Event-triggered global finite-time control for a class of uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(3): 1340-1347.
- [18] Tee K, Ren B, Ge S S. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints[J]. *Automatica*, 2011, 47(11): 2511-2516.
- [19] Jin S L, Liu Y G. Global practical tracking via adaptive output-feedback for uncertain nonlinear systems with generalized control coefficients[J]. *Science China Information Sciences*, 2016, 59(1): 1-13.
- [20] Sun Z Y, Peng Y R, Wen C Y, et al. Fast finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system with an asymmetric output constraint[J]. *Automatica*, 2020, 121: 109170.
- [21] Lin W, Qian C J. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(5): 339-351.

### 作者简介

李娇娇(1997—), 女, 博士生, 从事非线性控制、有限时间控制等研究, E-mail: qfsfjj@163.com;

韩芝菲(1977—), 女, 博士生, 从事自动化教育与应用、控制管理等研究, E-mail: fayehanzf@163.com;

孙宗耀(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、自适应控制、时滞系统的稳定性等研究, E-mail: sunzongyao@sohu.com;

谭庆全(1980—), 男, 高级工程师, 博士, 从事非线性系统控制、信息管理系统的研究与应用等研究, E-mail: tanqq@bjsies.cn;

孟庆华(1977—), 男, 教授, 博士, 从事车辆预测与故障诊断、电动汽车、汽车电子等研究, E-mail: mengqinghua@hdu.edu.cn.