

控制与决策

Control and Decision

基于从众行为的改进Hegselmann-Krause观点动力学分析

张善祺, 刘兵, 柴利

引用本文:

张善祺, 刘兵, 柴利. 基于从众行为的改进Hegselmann-Krause观点动力学分析[J]. *控制与决策*, 2024, 39(3): 965-974.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0716>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于云模型和多层权重求解的多粒度语言大群体决策方法](#)

Multi-granularity linguistic large group decision-making based on cloud model and multi-layer weight determination

控制与决策. 2021, 36(9): 2257-2266 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0102>

[考虑社会网络邻接关系的群体判断矩阵决策方法](#)

Group preference relations decision making approach based on social network adjacency relations

控制与决策. 2021, 36(4): 983-992 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0817>

[考虑社会网络邻接关系的群体判断矩阵决策方法](#)

Group preference relations decision making approach based on social network adjacency relations

控制与决策. 2021, 36(4): 983-992 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0817>

[基于向量角分解的高维多目标进化算法](#)

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 761-768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

[基于自适应正态云模型的灰狼优化算法](#)

Grey wolf optimization algorithm based on adaptive normal cloud model

控制与决策. 2021, 36(10): 2562-2568 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0233>

基于从众行为的改进 Hegselmann-Krause 观点动力学分析

张善祺¹, 刘兵^{1†}, 柴利²

(1. 武汉科技大学信息科学与工程学院, 武汉 430081; 2. 浙江大学控制科学与工程学院, 杭州 310027)

摘要: 在许多社交场景中, 个体往往因为从众行为而改变自己的观点. 为了探究从众行为对个体观点演化的影响, 提出具有群体压力的改进 Hegselmann-Krause (HK) 模型. 与已有模型不同, 所提出模型中每个个体对其余个体的影响程度并不总是相同. 首先, 在此基础上, 通过理论分析该模型的收敛性, 并给出该模型的收敛时间及其与信任边界、群体压力大小等因素的关系; 然后, 考虑到群体中存在合作和对抗 2 种关系, 进一步提出具有群体压力的改进符号 HK 模型, 验证该模型的收敛性, 并给出其收敛时间以及与信任边界、群体压力大小等因素的关系; 最后, 仿真分析信任边界和群体压力对所提出 2 种模型的观点演化过程和收敛时间的影响, 并验证所提出模型的有效性. 结果表明, 信任边界与群体压力越大, 群体内个体的观点收敛越快.

关键词: 观点动力学; 有界信任; HK 模型; 从众行为; 二分一致性; 观点演化

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0716

引用格式: 张善祺, 刘兵, 柴利. 基于从众行为的改进 Hegselmann-Krause 观点动力学分析 [J]. 控制与决策, 2024, 39(3): 965-974.

Analysis of modified Hegselmann-Krause opinion dynamics based on conformity

ZHANG Shan-qi¹, LIU Bing^{1†}, CHAI Li²

(1. School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China; 2. College of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: In many social scenarios, individuals tend to change their opinions due to conformity behavior. To investigate the impact of conformity behavior on the evolution of individual opinions, this paper proposes a modified Hegselmann-Krause (HK) model with group pressure. Unlike the existing model, the weights of individuals influenced by their neighbors are not always the same. Thus, the convergence properties of this model are theoretically analyzed, and the model's convergence time, as well as its relationship with confidence bound and group pressure, are given. Considering both cooperative and antagonistic relationships in groups, this paper further proposes a modified signed HK model with group pressure and proves its convergence. This model's convergence time is also given, as well as its relationship with confidence bound and group pressure, are also given. Finally, simulations are given to study the effect of confidence bound and group pressure on the evolution of opinion and the convergence time of the proposed two models. The validity of the two proposed models is also verified. The results show that the higher the confidence bound and group pressure, the faster the convergence of individual opinions in groups.

Keywords: opinion dynamics; bounded confidence; HK model; conformity; bipartite consensus; opinion evolution

0 引言

近年来, 在社会学、控制理论、经济学、物理学等多个学科的结合下, 观点动力学这一交叉领域发展迅速, 已成为一个新的研究热点^[1]. 随着多智能体系统以及复杂网络相关理论的发展, 研究者们探索观点形成背后的机制, 得到了一系列研究成果^[2-4].

观点动力学以社交网络为载体, 试图通过建立

数学模型, 分析社交网络中个体观点的演化过程. 为了实现这一目标, 研究者们提出了一系列经典的观点动力学模型, DeGroot 模型是其中之一^[5]. 在该模型中, 个体当前时刻的观点由自身及其邻居上一时刻观点的加权平均形成, 最终群体的观点值将达成一致. 随着研究者们的大量工作, 这一模型得到了进一步的发展. 考虑到群体中的个体对其初始观点

收稿日期: 2022-04-28; 录用日期: 2022-11-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61903284, 62173259).

[†]通讯作者. E-mail: liubing17@wust.edu.cn.

有不同的固执程度,文献[6]在DeGroot模型基础上,提出了Fredkin-Johnson(FJ)模型.文献[7]将DeGroot模型与社会权力理论相结合,分析了个体的社会权力在问题序列中的演化过程.文献[8]基于DeGroot模型,建立了考虑决策者角色差异的舆情演化模型.注意到,在DeGroot模型中,个体的观点受到其在网络上所有邻居观点的影响.然而,在现实生活中,个体更倾向于与其观点相近的个体进行交互^[9].由于DeGroot模型无法描述这种情景,学者们提出了有界信任模型,以探究个体间的信任对群体观点演化的影响.在有界信任模型中,最具代表性的2个模型为Hegselmann-Krause(HK)模型^[10]和Deffuant-Weisbuch(DW)模型^[11],其中,在HK模型中,个体只接受其信任边界内其他个体的观点,个体当前时刻的观点为其信任边界内所有个体上一时刻观点的算术平均值.由于个体的邻居集随着个体观点值的变化而改变,该模型的网络是时变且状态相关的.此外,随着信任边界的改变,群体的观点值将出现极化、分簇或是达成一致等现象.文献[12]研究了具有惯性的HK模型,个体当前时刻的观点由自身上一时刻的观点与信任边界内个体上一时刻的观点加权平均得到,当惯性系数为1时,个体始终保持自身观点不变.文献[13]研究了具有自适应信任边界的HK模型,在该模型中,每个个体的左右信任边界不同、异质且时变,对于模型中的某个个体,若上一时刻其一侧信任边界内个体数量为0,则当前时刻该侧信任边界的上界将增加.

需要注意的是,在以上工作中,作者通常假设个体表达的观点与其内心想法一致.然而,当个体处于某些特定的情境或身处某些群体时,其表达的观点往往与内心想法不一致^[14],社会心理学将这一现象解释为从众行为.研究表明,从众行为体现在实际生活的许多场景中,如:在许多西方国家,就餐后给小费已形成一种隐形的社会规范,多数人给小费的原因是受到该约束的影响,而不是餐馆的实际服务质量^[15];对于苏联解体和阿拉伯之春这样的重大政治事件,其发生时会很突然,甚至不可思议,但是,事后调查发现,在事件的导火索点燃前,许多人内心对政权的支持已发生了动摇,但是由于从众行为的影响,其表达的观点仍然是支持当前政权^[16-17].Asch^[18]在1951年关于从众行为的开创性工作表明,面对无可争议的事实,一些个体的观点会由于群体所施加压力的影响而扭曲.随后,许多学者基于Asch^[18]的工作,建立了观点动力学模型,探究从众行为对观点

演化过程的影响,如文献[19]建立了一个包含从众个体和反从众个体的观点动力学模型,结果表明,在全连通网络中,从众个体越多,系统越稳定,而在复杂网络如小世界网络中则相反.最近,文献[20]研究了具有群体压力的HK模型,该模型中个体的观点由上一时刻其信任边界内个体的观点和群体压力共同决定.注意到,在以上基于HK模型的工作中,个体对群体观点的影响程度均相等,然而,在实际社交情景中,由于资历/地位的不同,群体中每个个体对其余个体的影响程度往往并不相同^[21],如一些科学家在其研究领域享有比其他研究者更高的声誉,其提出的观点将在同领域研究者中具有更大的影响力^[22].

在上述文献提出的观点动力学模型中,通常仅考虑个体间的合作性.而在现实生活中,个体间的关系包含了合作性和对抗性^[23],如在第1次世界大战中,若将每个国家看作一个个体,同盟国/协约国内的国家间是合作关系,而同盟国与协约国的国家间是对抗关系^[24];在棒球、足球、篮球等体育运动中,相同队伍的个体间是合作关系,而不同队伍的个体间是对抗关系^[25].为了同时描述合作/对抗性对群体观点演化的影响,文献[26]将符号图引入DeGroot模型中,提出了Altafini模型,结果表明,当满足结构平衡图时,个体观点达成二分一致.文献[27]通过在领导-跟随框架下对Altafini模型加入同质外界输入,实现了在符号网络下对该模型的牵制控制.文献[28]在Altafini模型的基础上考虑多智能体系统的通信约束,提出了一种基于量化器的控制协议,使得多智能体系统实现了二分实用一致.文献[29]将符号图引入有界信任模型,提出了3种连续时间下的符号有界信任模型.基于文献[29]的工作,文献[30]考虑了2种离散时间下的符号HK模型.然而,以上工作均未考虑群体压力对个体观点演化的影响.

基于以上分析,本文研究具有群体压力的改进有界信任观点动力学模型,主要内容如下.

1) 提出具有群体压力的改进HK模型,描述从众压力作用下,该模型中群体观点的演化过程.不同于文献[20]的工作,所提出模型中每个个体对其余个体的影响程度各不相同.当群体中任意个体对其余个体的影响程度相同时,该模型将退化为文献[20]所提出的模型.

2) 提出具有群体压力的改进符号HK模型,描述从众压力作用下,该模型中群体观点的演化过程.当群体中不存在群体压力,且任意个体对其余个体的影响程度相同时,该模型将退化为文献[30]所提出的模

型.

3) 通过理论分析, 表明所提出的2种观点动力学模型的收敛性, 并给出其收敛所需的最大收敛时间及其与信任边界和群体压力系数的关系.

4) 通过仿真, 分析信任边界和群体压力对观点演化过程以及收敛时间的影响, 并验证理论分析中, 信任边界越大, 群体压力越大, 收敛时间越快这一结论.

1 模型介绍

本节首先介绍HK模型, 进而提出具有群体压力的改进HK模型.

1.1 HK模型

在HK模型中, Hegselmann等^[10]假设群体中的每个个体均具有信任边界, 个体观点受其信任边界内所有个体观点的共同影响, 且群体中每个个体的影响权重相同, 其数学模型可表示为

$$x_i(k+1) = \frac{1}{|\mathcal{N}_i(k)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} x_j(k). \quad (1)$$

其中: $x_i(k) \in [0, 1]$ 为个体 i 在 k 时刻的观点值; $\mathcal{N}_i(k) = \{j \in V \mid |x_i(k) - x_j(k)| \leq \varepsilon\}$ 为在 $k \geq 0$ 时, 个体 i 的邻居集, 包括个体 i 自身, $|\mathcal{N}_i(k)|$ 为个体 i 在 k 时刻的邻居个数, $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 为群体内的所有个体, $\varepsilon \in (0, 1]$ 为信任边界.

1.2 具有群体压力的改进HK模型

在HK模型中, 个体表达的观点与其内心想法一致. 然而, Asch^[18]的实验表明, 个体观点的表达往往会受到从众因素的影响, 即当群体进行交流时, 群体内个体的观点会受到群体压力的影响, 从而表达出与内心想法不一致的观点, 如当一个旅行者或移民来到一个陌生的地方, 往往会通过观察他人的行为来决定自己该如何行动^[31], 这也是从众行为在实际生活中的体现. 因此, 本文考虑具有群体压力的有界信任观点动力学模型, 其中每个个体的观点由其信任边界内的所有个体观点和群体观点共同决定, 如图1所示. 在该模型中, 个体 i 的观点更新可理解为是两阶段的过程: 在第1阶段, 与HK模型类似, 每个个体与其信任边界内的所有个体进行表达观点的交换, 形成其内心观点 \hat{x}_i ; 在第2阶段, 由于受到群体压力的影响, 个体 i 的表达观点由其内心观点 \hat{x}_i 和群体的表达观点 x_{avg} 的共同影响而形成, 其数学模型描述如下式所示:

$$x_i(k+1) = (1 - \alpha)\hat{x}_i(k) + \alpha x_{avg}(k). \quad (2)$$

其中: $\hat{x}_i(k) = \left(\left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j x_j(k) \right) / \sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j \right) \in [0, 1]$ 为个体 i 与其信任边界内的个体进行交流后, 形成的

内心观点; $x_{avg}(k) = \left(\left(\sum_{j \in V} w_j x_j(k) \right) / \sum_{j \in V} w_j \right) \in [0, 1]$ 为 k 时刻的群体表达观点, $w_j > 0$ 为个体 j 的权重系数, 表示个体 j 的表达观点对其他个体表达观点的影响程度; $\alpha \in [0, 1]$ 为群体压力系数, 表示群体表达观点对个体 i 表达观点的影响程度.

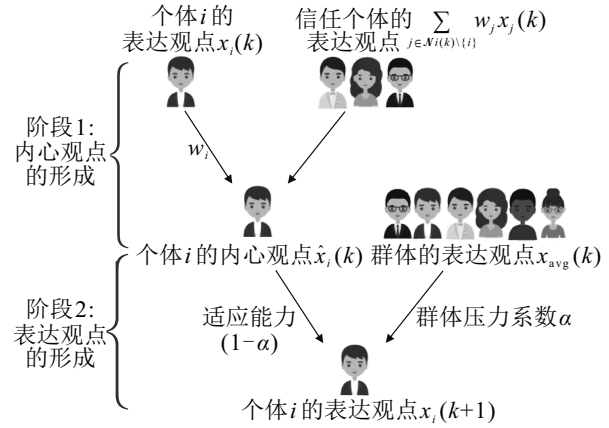


图1 观点动力学模型(2)观点演化示意图

2 收敛性分析

本节将分析具有群体压力的改进HK模型(2)的收敛性问题.

在模型(2)中, 群体中所有个体的观点将在有限时间内达成一致. 该结论可由如下定理表示.

定理1 观点动力学模型(2)满足如下性质.

1) 若群体中不存在群体压力, 即 $\alpha = 0$, 则观点动力学模型(2)中所有个体的表达观点将在有限时间内收敛.

2) 若群体中存在群体压力, 即 $\alpha \in (0, 1]$, 则观点动力学模型(2)中所有个体的表达观点将在有限时间内达成一致.

证明 首先对定理1的性质1)进行证明. 当群体中不存在群体压力时, 由文献[32]可知, 群体中的个体表达观点将在有限时间内收敛.

下面证明定理1的性质2). 定义集合 $\{x_i(k), i \in V, k \geq 0\}$ 内的最大值和最小值分别为 $x_{max}(k)$ 、 $x_{min}(k)$, 权重系数集合 $\{w_i > 0, i \in V\}$ 中的最小值为 w_{min} , $\Delta x(k) = x_{max}(k) - x_{min}(k)$ 为群体中个体表达观点值的最大差异.

性质2)的证明分为以下2种情况.

情况1 当初始时刻群体内任意2个个体的表达观点值之差在信任边界内, 即 $\Delta x(0) \leq \varepsilon$ 时, 由邻居集 $\mathcal{N}_i(i \in V)$ 的定义可知, 此时所有个体互为邻居, 对于

$$\text{任意 } i, j \in V, \text{ 有 } x_i(1) = x_j(1) = \frac{\sum_{\ell \in V} w_\ell x_\ell(0)}{\sum_{\ell \in V} w_\ell}.$$

此时, 模型(2)中所有个体的表达观点在 $k = 1$ 时达成一致.

情况2 当初始时刻群体内至少存在2个个体的表达观点值之差大于信任边界,即 $\Delta x(0) > \varepsilon$ 时,在集合 $\{x_i(0), i \in V\}$ 中,存在 $q, l \in V$, 有

$$x_q(0) < x_{\max}(0) - \varepsilon, \tag{3}$$

$$x_l(0) > x_{\min}(0) + \varepsilon. \tag{4}$$

故 $x_{\text{avg}}(0)$ 可由式(3)重写为

$$x_{\text{avg}}(0) \leq x_{\max}(0) - \frac{w_{\min}}{\sum_{j \in V} w_j} \varepsilon. \tag{5}$$

由式(2)和(5),对于 $x_i(i \in V)$, 有

$$x_i(1) = (1 - \alpha) \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(0)} w_j x_j(0)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(0)} w_j} + \alpha x_{\text{avg}}(0) < x_{\max}(0) - \alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

进而,得到

$$x_{\max}(1) < x_{\max}(0) - \alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}. \tag{6}$$

同理,由式(2)和(4),得到

$$x_{\min}(1) > x_{\min}(0) + \alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}. \tag{7}$$

将式(6)减去(7),有

$$\Delta x(1) < \Delta x(0) - \frac{2\alpha w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

若 $\Delta x(1) > \varepsilon$, 则得到

$$\Delta x(2) < \Delta x(1) - \frac{2\alpha w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

同理,若 $\Delta x(k) > \varepsilon, k \geq 2$, 则有

$$\Delta x(k+1) < \Delta x(0) - \left(\frac{2\alpha w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j} \right) (k+1), \tag{8}$$

注意到,在任意 $k \geq 0$ 时刻,有 $x_i(k) \in [0, 1]$. 因此, $\Delta x(0) \leq 1$, 式(8)可进一步写为

$$\Delta x(k+1) < 1 - \left(\frac{2\alpha w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j} \right) (k+1). \tag{9}$$

由式(9)可知,随着迭代次数 k 的增加,群体中个体表达观点值的最大差异 $\Delta x(k)$ 单调递减. 当 $\Delta x(k) \leq \varepsilon$ 时,由上述情况1可知,模型(2)中所有个体的表达观点将在有限时间内达成一致. \square

下面将求解具有群体压力的改进HK模型(2)的收敛时间.

定理2 观点动力学模型(2)满足:

1) 若群体中不存在群体压力,即 $\alpha = 0$, 则经过

$T > n + 2 \left(\frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\sum_{j \in V} w_j}{w_{\min}} \right)^2 \right)$, 观点动力学模型(2)中所有个体的表达观点将收敛.

2) 若群体中存在群体压力,即 $\alpha \in (0, 1]$, 则经过

$(1 - \varepsilon) \sum_{j \in V} w_j$
 $T > \frac{\sum_{j \in V} w_j}{2\alpha w_{\min} \varepsilon} + 1$, 观点动力学模型(2)中所有个体的表达观点将达成一致.

证明 下面先证明 $\alpha = 0$ 时,观点动力学模型(2)的收敛时间.

此时,模型(2)可改写为

$$x_i(k+1) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j x_j(k)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j}.$$

对模型中所有个体按初始时刻表达观点值由小至大排序并编号,即 $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$.

由文献[32]可知,个体表达观点值的大小顺序不随时间改变,即对于任意 $i, j \in V, k > 0$, 若 $x_i(0) \leq x_j(0)$, 则 $x_i(k) \leq x_j(k)$.

对于个体1,在任意 $k \geq 0$ 时刻,其演化过程遵循以下3种情况.

1) $\mathcal{N}_1(k) = \{1\}$.

2) $\mathcal{N}_1(k) = \{1, 2, \dots, m\} (1 < m \leq n)$, 且 $\mathcal{N}_1(k) = \mathcal{N}_j(k) (j \in \{2, 3, \dots, m\})$.

3) $\mathcal{N}_1(k) = \{1, 2, \dots, m\} (1 < m \leq n)$, 且 $\mathcal{N}_1(k) \neq \mathcal{N}_j(k) (j \in \{2, 3, \dots, m\})$.

下面将分别对3种情况进行说明.

对于情况1),显然有 $x_1(k+1) = x_1(k)$, 其表达观点值在 $k+1$ 时刻保持不变.

对于情况2),在 k 时刻,个体 $\{1, 2, \dots, m\} (1 < m \leq n)$ 的邻居集相等,因此,邻居集内所有个体的表达观点值将在 $k+1$ 时刻达成一致.

对于情况3),考虑所有个体收敛最慢的情况,即 $m = 2$, 由于 $\mathcal{N}_1(k) \neq \mathcal{N}_2(k)$, 存在个体 $s \in \{\mathcal{N}_2(k) \setminus \mathcal{N}_1(k)\}$, 个体1、个体2和个体 s 的位置如图2所示.

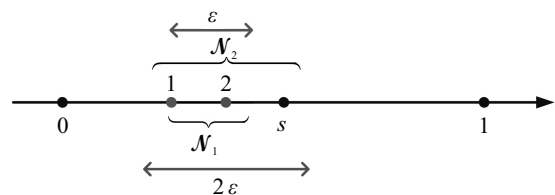


图2 个体1、个体2和个体 s 的位置示意图

由于个体 s 满足 $x_s(k) - x_1(k) > \varepsilon$, 有

$$x_2(k+1) > \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_2(k) \setminus \{s\}} w_j x_1(k) + w_s(x_1(k) + \varepsilon)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_2(k)} w_j} > x_1(k) + \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}. \quad (10)$$

令 $\delta(k) = x_2(k) - x_1(k)$, 则 $x_2(k+1) = x_1(k+1) + \delta(k+1)$, 由式(10), 得到

$$x_1(k+1) > x_1(k) + \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j} - \delta(k+1).$$

进而, 得到

$$\begin{aligned} x_1(k) + \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j} - \delta(k+1) < \\ x_1(k+1) = \frac{w_1 x_1(k) + w_2 x_2(k)}{w_1 + w_2} < \\ x_2(k) = x_1(k) + \delta(k). \end{aligned} \quad (11)$$

故由式(11), 有

$$\delta(k) + \delta(k+1) > \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

而对于 $x_1(k) (k > 0)$, 有

$$\begin{aligned} x_1(k+1) = \\ x_1(k) + \frac{w_2 \delta(k)}{w_1 + w_2} > x_1(k) + \frac{w_{\min} \delta(k)}{\sum_{j \in V} w_j}. \end{aligned}$$

进而, 得到

$$\begin{aligned} x_1(k+2) > x_1(k) + \frac{w_{\min}}{\sum_{j \in V} w_j} (\delta(k) + \delta(k+1)) > \\ x_1(k) + \left(\frac{w_{\min}}{\sum_{j \in V} w_j} \right)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, 由上式可知

$$x_1(0) < x_1(2h) - \left(\left(\frac{w_{\min}}{\sum_{j \in V} w_j} \right)^2 \varepsilon \right) \cdot h,$$

其中 h 为个体 1 更新的次数.

由于 $0 \leq x_1(0) < x_2(0) \leq 1$, 经过 $h = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \times$

$\left(\frac{\sum_{j \in V} w_j}{w_{\min}} \right)^2$ 次, 有 $x_1(\lceil 2h \rceil) \geq 1 - \varepsilon$. 此时, $\mathcal{N}_1(\lceil 2h \rceil) = \{1, 2, \dots, n\}$, 其中 $\lceil \cdot \rceil$ 为向上取整, 在下一时刻模型(2)中所有个体的表达观点将收敛.

需要说明的是, 本证明考虑了表达观点值最小个体(即个体 1)的表达观点值由 $x_1(0)$ 逐渐增加至 1, 其

余所有个体的表达观点值也达到 1 的情况, 此时的收敛时间 T 为模型(2)收敛所需的最长时间. 当模型(2)出现分簇或极化现象时, 由于所有个体的表达观点值将收敛为多个观点簇, 此时所有个体的表达观点值收敛所需的时间将小于 T .

情况 2) 最多出现 n 次, 情况 3) 最多出现 $\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \times \sum_{j \in V} w_j \left(\frac{\sum_{j \in V} w_j}{w_{\min}} \right)^2$ 次. 综上所述, 当 $\alpha = 0$ 时, 经过 $T > n + 2 \left(\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\sum_{j \in V} w_j}{w_{\min}} \right)^2 \right)$, 观点动力学模型(2)中所有个体的表达观点将收敛.

接着证明当群体内存在群体压力时观点动力学模型(2)的收敛时间.

类似于定理 1 的证明, 根据初始时刻群体内表达观点值的最大差异是否大于信任边界, 证明分为 2 部分.

1) 当 $\Delta x(0) \leq \varepsilon$ 时, 由 \mathcal{N}_i 的定义可知, 此时群体内每个个体的邻居集相同, 均为群体内的所有个体, 因此所有个体的表达观点值将在下一时刻达成一致.

2) 当 $\Delta x(0) > \varepsilon$ 时, 由式(10)可知, 群体内表达观点值的最大差异由 $\Delta x(k) > \varepsilon$ 变为 $\Delta x(k) \leq \varepsilon$, 所需要的时间为 $T > \frac{(1-\varepsilon) \sum_{j \in V} w_j}{2\alpha w_{\min} \varepsilon}$. 经过 T 时刻, 观点动力学模型(2)中群体内表达观点值的最大差异将小于等于信任边界, 因此在下一时刻模型(2)中所有个体的表达观点将达成一致.

综上所述, 观点动力学模型(2)收敛所需的时间为 $T^* > \frac{(1-\varepsilon) \sum_{j \in V} w_j}{2\alpha w_{\min} \varepsilon} + 1$. \square

注 1 由定理 2 可知, 模型(2)中信任边界 ε 以及群体压力系数 α 越大, 所有个体表达观点的收敛时间越短.

3 具有群体压力的改进符号 HK 模型

在社交网络的某些情景下(如两党制或双寡头竞争), 群体会分化为 2 个敌对的阵营. 处于相同阵营的个体间彼此互相信任, 而处于不同阵营的个体间互不信任. 研究者们利用合作性和对抗性来描述该现象^[23,26,29]. 文献[26]给出了合作性/对抗性与多智能体系统中个体的关系, 即个体间的影响若为正, 则表示个体间为合作关系; 反之, 则表示个体间为对抗/竞争关系. 由于在模型(2)中任意个体对其余个体的影响均为正, 模型(2)中个体间只存在合作性而不存在对抗性. 因此, 本文在所提出观点动力学模型(2)的基

基础上,进一步提出具有群体压力的改进符号HK模型,即

$$x_i(k+1) = (1-\alpha)\hat{x}_i(k) + \alpha x_{i,\text{avg}}(k). \quad (12)$$

其中: $\mathcal{N}_i(k) = \{j \in V \mid |x_i(k) - x_j(k)| \leq \varepsilon\}$ 为在 $k \geq 0$ 时刻个体 i 的邻居集,包括个体 i 自身, $x_i(k) \in [-1, 1]$ 为个体 i 在 k 时刻的表达观点; $\hat{x}_i(k) =$

$$\frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} \text{sgn}(x_j(k)x_i(k))w_j x_j(k)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j} \in [-1, 1], x_{i,\text{avg}}(k) =$$

$$\frac{\sum_{j \in V} \text{sgn}(x_j(k)x_i(k))w_j x_j(k)}{\sum_{j \in V} w_j} \in [-1, 1], w_j > 0 \text{ 为个体}$$

j 的权重系数; $\alpha \in [0, 1]$ 为群体压力系数,表示群体表达观点对个体 i 表达观点的影响程度; $\text{sgn}(x_j(k)x_i(k))w_j$ 为个体 j 的表达观点对其他个体表达观点的影响程度,符号函数 $\text{sgn}(\cdot)$ 满足

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0; \\ 0, & z = 0; \\ -1, & z < 0. \end{cases}$$

注2 在模型(12)中, $x_i(k)$ 为个体 i 在 k 时刻的表达观点,其中 $x_i(k)$ 的符号 $\text{sgn}(x_i(k))$ 为个体 i 所属阵营.不妨假设当 $\text{sgn}(x_i(k)) > 0$ 时,个体 i 属于友方阵营;当 $\text{sgn}(x_i(k)) < 0$ 时,个体 i 属于敌方阵营. $|x_i(k)|$ 为个体 i 在 k 时刻的表达观点值,即个体 i 对当前所属阵营的支持程度.

注3 若将模型(2)中个体 i 的观点值取值区间放大至 $[-1, 1]$,则由于在个体 i 的信任边界内2个阵营的个体对其影响均为正,从而可能导致个体 i 观点的符号由正变为负,即个体 i 从友方阵营变为敌方阵营;或由负变为正,即个体 i 从敌方阵营变为友方阵营.而在模型(12)中,由于引入了符号函数,在个体 i 的信任边界内且与 i 属于不同阵营的所有个体对其影响均为负,从而导致个体 i 观点的符号将不会改变,即个体 i 将始终支持其最初时刻所属阵营.

下面给出二分一致性的定义.

定义1^[26] 对于式(12)所表示的观点动力学模型,若对于任意 $i \in V$,满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i(k)| = \beta > 0$,则称模型(12)实现了二分一致性.

上述定义可解释为对于任意 $i, j \in V$,令 $x_i^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_i(k)$, $x_j^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_j(k)$,若 $\text{sgn}(x_i^* x_j^*) > 0$,则 $x_i^* = x_j^*$;若 $\text{sgn}(x_i^* x_j^*) < 0$,则 $x_i^* = -x_j^*$.

接着给出模型(12)的2个性质.

定理3 具有群体压力的改进符号HK模型(12)

有如下性质.

1) 对于个体 $i \in V$,若 $x_i(0) \neq 0, \alpha = 0$,则观点动力学模型(12)中个体表达观点将在有限时间内收敛,即对于个体 $i, j \in V$,当 $\text{sgn}(x_i^* x_j^*) > 0$ 时,有 $x_i^* = x_j^*$ 或 $|x_i^* - x_j^*| > \varepsilon$;当 $\text{sgn}(x_i^* x_j^*) < 0$ 时,有 $x_i^* = -x_j^*$ 或 $|x_i^* - x_j^*| > \varepsilon$.

2) 对于个体 $i \in V$,若 $x_i(0) \neq 0, \alpha \in (0, 1]$,则观点动力学模型(12)中个体的表达观点将在有限时间内达成二分一致.

证明 首先对定理3的性质1)进行证明.当群体中不存在群体压力,即 $\alpha = 0$ 时,观点动力学模型(12)可变形为

$$x_i(k+1) = \text{sgn}(x_i(k)) \cdot \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} \text{sgn}(x_j(k))w_j x_j(k)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j}. \quad (13)$$

对式(13)左右两侧同乘 $\text{sgn}(x_i(k))$,有

$$\text{sgn}(x_i(k))x_i(k+1) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} \text{sgn}(x_j(k))w_j x_j(k)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j}. \quad (14)$$

由注2可知,模型(12)中个体表达观点的符号在演化过程中始终不变.故式(14)可变形为

$$\text{sgn}(x_i(k+1))x_i(k+1) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} \text{sgn}(x_j(k))w_j x_j(k)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j}.$$

令 $y_i(k) = \text{sgn}(x_i(k))x_i(k)$,有

$$y_i(k+1) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j y_j(k)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_j}. \quad (15)$$

定义 $y_i^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_i(k)$,由文献[32]可知,对于模型(15)中的个体 $i, j \in V$,有 $y_i^* = y_j^*$,即 $\text{sgn}(x_i^*)x_i^* = \text{sgn}(x_j^*)x_j^*$,或 $|y_i^* - y_j^*| > \varepsilon$,此时个体 i, j 互不为彼此的邻居,由邻居集 \mathcal{N}_i 的定义有 $|x_i^* - x_j^*| > \varepsilon$.

接着证明定理3的性质2),根据初始时刻群体内个体表达观点最大差异绝对值的大小,分为以下2种情况进行证明.

1) 定义 $M(k) = \max_{i \in V} \{|x_i(k)|\}$ 且群体内个体表达观点最大差异的绝对值为 $|\Delta x(k)| = |x_{\max}(k) - x_{\min}(k)|$.当 $|\Delta x(0)| \leq \varepsilon$ 时,由 \mathcal{N}_i 的定义可知,此时群

体内所有个体互为邻居. 若任意 $i \in V$ 满足 $x_i(0) \neq 0$, 则对于任意 $i, j \in V$, 有

$$|x_i(1)| = |x_j(1)| = \frac{\sum_{\ell \in V} w_\ell |x_\ell(0)|}{\sum_{\ell \in V} w_\ell},$$

即观点动力学模型(12)中所有个体的表达观点将在 $k=1$ 时刻达成二分一致.

2) 当 $|\Delta x(0)| > \varepsilon$ 时, 在集合 $\{x_i(0), i \in V\}$ 中, 存在 $q \in V$, 有

$$x_q(0) < M(0) - \varepsilon, \quad (16)$$

则对于任意 $i \in V$, 其对应的 $|x_{i, \text{avg}}(0)|$ 可由式(16)重写为

$$|x_{i, \text{avg}}(0)| < \frac{w_q(M(0) - \varepsilon) + \sum_{j \in V \setminus \{q\}} w_j M(0)}{\sum_{j \in V} w_j} \leq M(0) - \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}, \quad (17)$$

其中 w_{\min} 为群体中所有个体权重系数的最小值.

由式(12)和(17), 对于 $x_i(i \in V)$, 有

$$|x_i(k+1)| < (1 - \alpha) \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(0)} w_j M(0)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(0)} w_j} + \alpha |x_{i, \text{avg}}(0)| \leq M(0) - \alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

由 $M(k)$ 定义, 可知

$$M(1) < M(0) - \alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

进而, 有

$$|\Delta x(1)| = |x_{\max}(1) - x_{\min}(1)| < 2M(0) - 2\alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

若 $|\Delta x(1)| > \varepsilon$, 则有

$$|\Delta x(2)| < 2M(1) - 2\alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}.$$

同理, 若 $|\Delta x(k)| > \varepsilon, k \geq 2$, 则得到

$$|\Delta x(k+1)| < 2M(0) - \left(2\alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}\right)(k+1). \quad (18)$$

由于 $M(0) \leq 1$, 式(18)可进一步写为

$$|\Delta x(k+1)| < 2 - \left(2\alpha \frac{w_{\min} \varepsilon}{\sum_{j \in V} w_j}\right)(k+1). \quad (19)$$

由式(19)可知, 对于任意 $k \geq 0$, 若 $|\Delta x(k)| > \varepsilon$, 则随着迭代次数的增加, 群体内表达观点最大差异的绝对值 $|\Delta x(k)|$ 单调递减; 当 $|\Delta x(k)| \leq \varepsilon$ 时, 由前述证明可知, 观点动力学模型(12)将在有限时间内达成二分一致. \square

下面给出具有群体压力的改进符号HK模型(12)的收敛时间.

定理4 对于个体 $i \in V$, 若 $x_i(0) \neq 0, \alpha \in (0, 1]$, 则

$$(2 - \varepsilon) \sum_{j \in V} w_j$$

经过 $T > \frac{1}{2\alpha w_{\min} \varepsilon} + 1$, 观点动力学模型(12)中的表达观点将达成二分一致.

证明 类似于定理3中性质2)的证明, 根据初始时刻群体内个体表达观点最大差异绝对值的大小是否大于信任边界, 证明分为以下2部分.

1) 当 $|\Delta x(0)| \leq \varepsilon$ 时, 由 \mathcal{N}_i 的定义可知, 此时群体内所有个体互为邻居, 若任意 $i \in V$ 满足 $x_i(0) \neq 0$, 则群体内所有个体的表达观点将在 $k=1$ 时刻达成二分一致.

2) 当 $|\Delta x(0)| > \varepsilon$ 时, 由式(19)可知, 群体内表达观点绝对值的最大差异单调递减至信任边界内所需的时间为 $T > \frac{(2 - \varepsilon) \sum_{j \in V} w_j}{2\alpha w_{\min} \varepsilon}$.

经过 T 时刻, 观点动力学模型(12)中群体内表达观点绝对值的最大差异将小于等于信任边界. 再由定理4第1部分的证明可知, 模型(12)中所有个体的表达观点将在下一时刻达成二分一致. 综上所述, 观点动力学模型(12)收敛所需的时间为 $T^* > \frac{(2 - \varepsilon) \sum_{j \in V} w_j}{2\alpha w_{\min} \varepsilon} + 1$. \square

注4 由定理4可知, 模型(12)中信任边界 ε 和群体压力系数 α 越大, 所有个体表达观点的收敛时间越短.

4 仿真实验

本节将通过仿真实验, 分析信任边界 ε 和群体压力系数 α 对群体表达观点的演化过程和收敛时间的影响, 并验证所提出模型的有效性.

选取由50个个体组成的群体, 令个体的初始观点 $x(0)$ 在定义域内均匀分布, 即在模型(1)和模型(2)中, $x(0) \in [0, 1]$, 在模型(12)中 $x(0) \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, 权重系数 $w_j > 0$ 随机生成. 为了消除观点的变化对实验结果的干扰, 初始表达观点将保持不变. 本节所有

结果均在模型收敛后获得.

4.1 信任边界的影响

为了分析信任边界对群体内个体的表达观点演化过程的影响,分别设群体压力系数 $\alpha = 0.2$,信任边界 $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3$.

图3(a)~图3(c)表明,对于HK模型(1),信任边界在群体内个体表达观点的最终演化状态中起决定性作用,随着信任边界增大,群体内个体的表达观点分

别产生分簇、极化、一致等现象. 由图3(d)~图3(f)可见,与模型(1)不同,在不同的信任边界下,改进HK模型(2)中群体内个体的表达观点均达成一致. 由图3(g)~图3(i)可见,对于改进符号HK模型(12),在不同的信任边界下,群体内个体的表达观点均达成二分一致. 此外,由图3可见,在相同的初始观点下,信任边界越大,3种模型中群体内个体的表达观点收敛得越快.

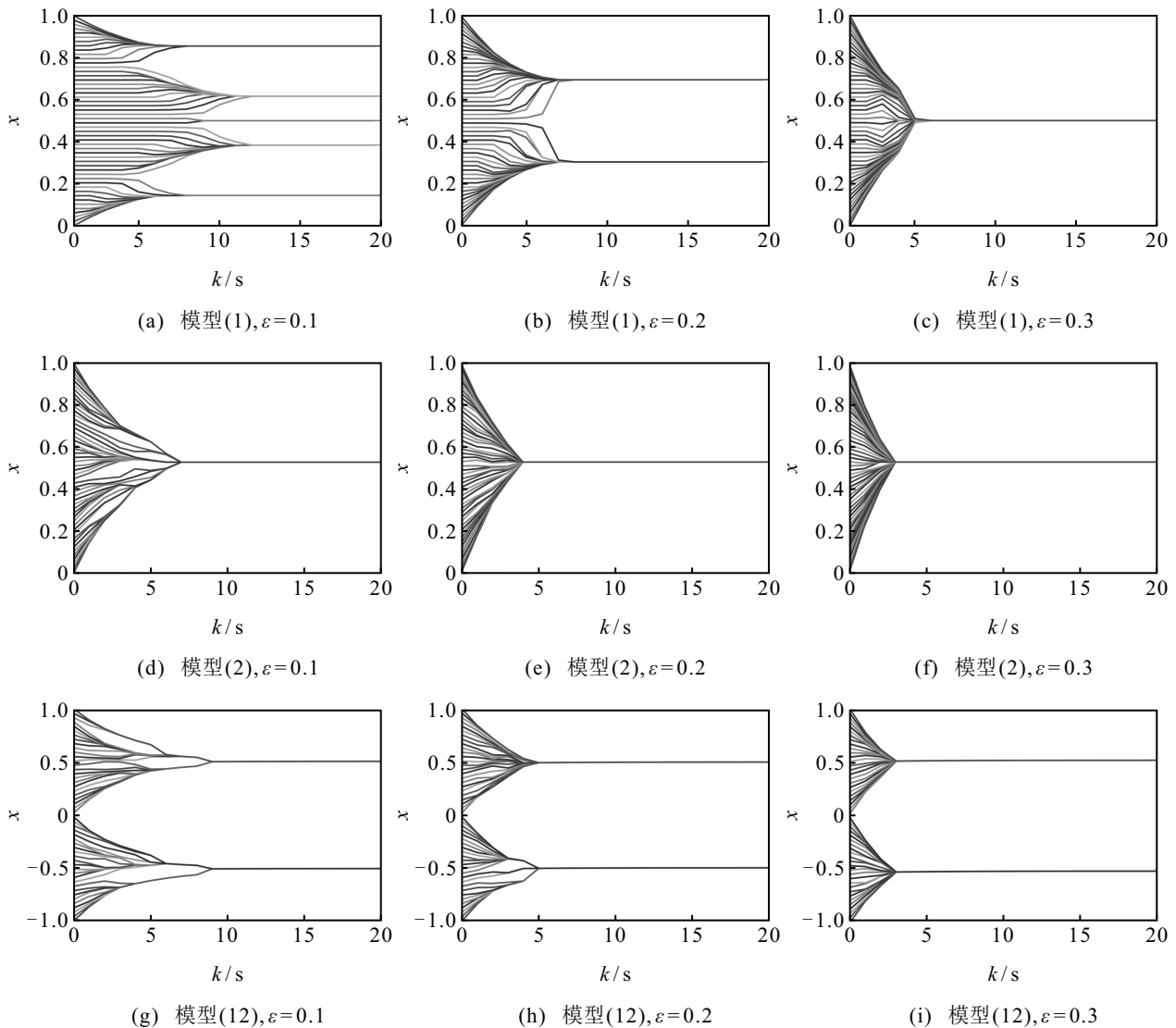


图3 信任边界对观点动力学模型(1)、模型(2)和模型(12)中观点演化过程的影响

4.2 群体压力的影响

为了分析群体压力对群体内个体的表达观点演化过程的影响,分别设信任边界 $\varepsilon = 0.05$,群体压力系数 $\alpha = 0, 0.05, 0.1$.

由图4可见,对于模型(2)和模型(12),群体压力的存在与否对群体内个体表达观点的最终演化状态起决定性作用,随着群体压力系数的增大,2个模型中所有个体的最终表达观点分别出现由分簇变为达成一致和由分簇达成二分一致的现象,且群体压力越

大,群体内个体的表达观点收敛越快.

4.3 信任边界和群体压力对收敛时间的影响

为了分析信任边界和群体压力对收敛时间的影响,分别设群体压力系数 $\alpha \in [0, 1]$,信任边界 $\varepsilon \in [0.05, 0.35]$.

由图5可见,对于模型(2)和模型(12),信任边界 ε 和群体压力系数 α 越大,模型中所有个体表达观点的收敛时间越短,仿真结果与定理2以及定理4结论相符.

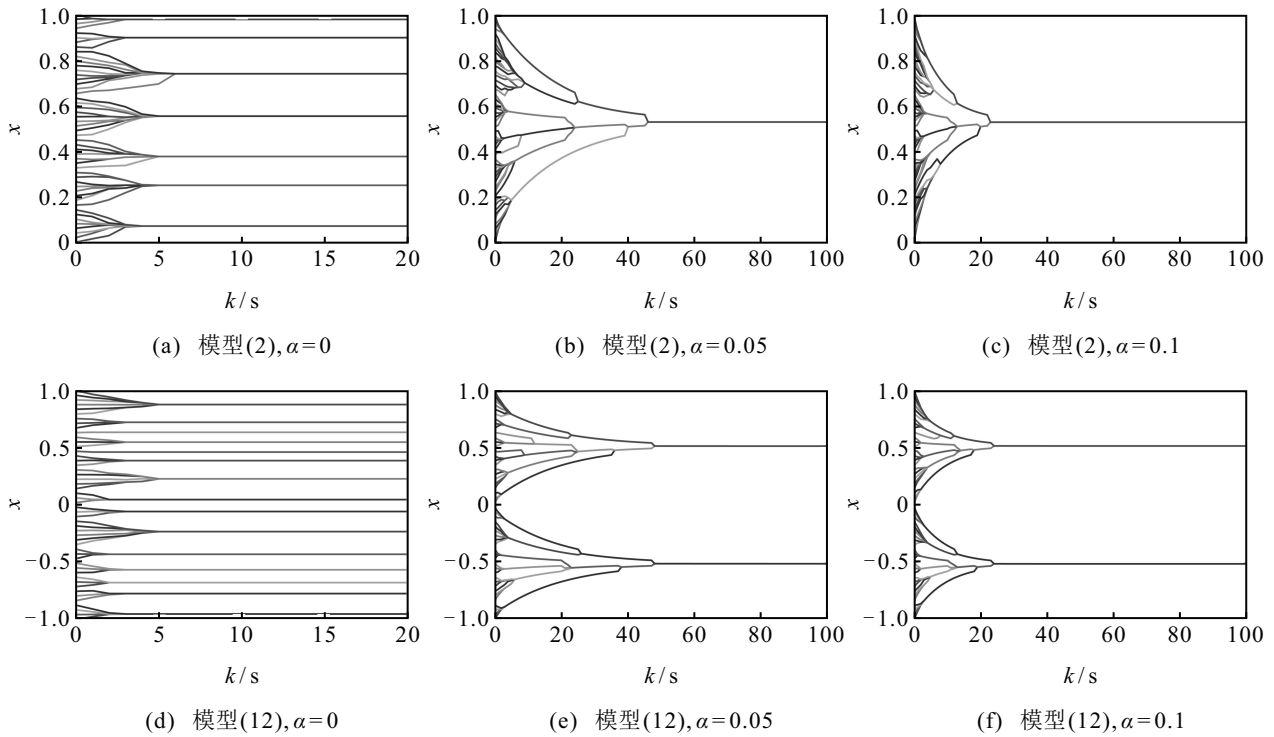


图4 群体压力对模型(2)和模型(12)中观点演化过程的影响

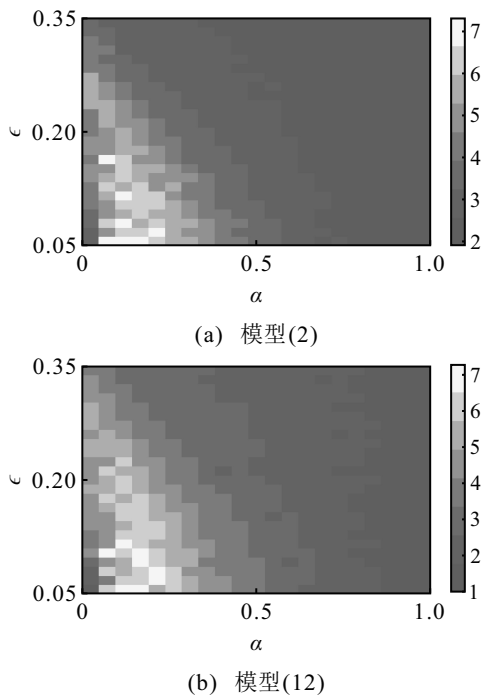


图5 模型(2)和模型(12)收敛时间热力图

5 结论

本文提出了2个具有群体压力的有界信任观点动力学模型,分别描述了在合作网络以及合作对抗网络中,群体压力对于观点演化过程的影响;然后,分别给出了2种模型群体内所有观点收敛的充分条件,得到了2种模型所需的最大收敛时间;最后,通过仿真讨论了群体压力以及信任边界对于群体内观点演化过程的影响,并验证了所提出模型的有效性.

在现实社会中,群体中的个体往往同时对不止一个话题表达观点,且这些观点是互相独立的,这需要在多维视角下研究观点动力学的演化过程.另一方面,实际生活经验表明,在观点的传播中,个体并不总是能够明确他人的观点,因而会出现对他人观点,包括群体观点的误解,如著名的“多元无知”现象.在这些方向上,有待更进一步的深入研究.

参考文献(References)

- [1] 王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学[J]. 中国科学: 信息科学, 2018, 48(1): 3-23. (Wang L, Tian Y, Du J M. Opinion dynamics in social networks[J]. Scientia Sinica: Informationis, 2018, 48(1): 3-23.)
- [2] Friedkin N E, Proskurnikov A V, Tempo R, et al. Network science on belief system dynamics under logic constraints[J]. Science, 2016, 354(6310): 321-326.
- [3] Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, et al. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(5): 2270-2285.
- [4] Dandekar P, Goel A, Lee D T. Biased assimilation, homophily, and the dynamics of polarization[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2013, 110(15): 5791-5796.
- [5] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. Journal of the American Statistical Association, 1974, 69(345): 118-121.
- [6] Friedkin N E, Johnsen E C. Social influence networks and opinion change[J]. Advances in Group Processes, 1999,

- 16: 1-29.
- [7] Jia P, MirTabatabaei A, Friedkin N E, et al. Opinion dynamics and the evolution of social power in Influence networks[J]. *SIAM Review*, 2015, 57(3): 367-397.
- [8] 周沁悦, 吴志彬. 社交网络下考虑决策者角色差异的舆情演化模型[J]. *控制与决策*, 2023, 38(1): 257-264. (Zhou Q Y, Wu Z B. Opinion dynamics model in social networks with heterogeneous nodes[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(1): 257-264.)
- [9] Huston T L, Levinger G. Interpersonal attraction and relationships[J]. *Annual Review of Psychology*, 1978, 29: 115-156.
- [10] Hegselmann R, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence: Models, analysis and simulation[J]. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2002, 5(3): 1-33.
- [11] Deffuant G, Neau D, Amblard F, et al. Mixing beliefs among interacting agents[J]. *Advances in Complex Systems*, 2000, 3: 87-98.
- [12] Chazelle B, Wang C. Inertial Hegselmann-Krause systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3905-3913.
- [13] Vasca F, Bernardo C, Iervolino R. Practical consensus in bounded confidence opinion dynamics[J]. *Automatica*, 2021, 129: 109683.
- [14] Ye M B, Qin Y Z, Govaert A, et al. An influence network model to study discrepancies in expressed and private opinions[J]. *Automatica*, 2019, 107: 371-381.
- [15] Azar O H. The social norm of tipping: A review[J]. *Journal of Applied Social Psychology*, 2007, 37(2): 380-402.
- [16] Kuran T. Sparks and prairie fires: A theory of unanticipated political revolution[J]. *Public Choice*, 1989, 61(1): 41-74.
- [17] Goodwin J. Why we were surprised (again) by the Arab spring[J]. *Swiss Political Science Review*, 2011, 17(4): 452-456.
- [18] Asch S E. Effects of group pressure upon the modification and distortion of judgments[J]. *Organizational Influence Processes*, 1951, 58: 295-303.
- [19] Javarone M A. Social influences in opinion dynamics: The role of conformity[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, 414: 19-30.
- [20] Cheng C, Yu C B. Opinion dynamics with bounded confidence and group pressure[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 532: 121900.
- [21] Branscombe N, Baron R. *Social psychology*[M](The 14th edition). Boston: Pearson, 2016: 1-524.
- [22] Douven I, Riegler A. Extending the Hegselmann-Krause model I[J]. *Logic Journal of the IGPL*, 2010, 18(2): 323-335.
- [23] Wasserman S, Faust K. *Social network analysis: Methods and applications*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994: 1-857.
- [24] David E, Jon K. *Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected world*[M]. New York: Cambridge University Press, 2010: 1-727.
- [25] Smith P K, Hart C H. *The Wiley-Blackwell handbook of childhood social development*[M]. Chichester: Wiley-Blackwell, 2013: 1-698.
- [26] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935-946.
- [27] 邵海滨, 潘鹿鹿, 席裕庚, 等. 符号网络下多智能体系统二分一致性的牵制控制问题[J]. *控制与决策*, 2019, 34(8): 1695-1701. (Shao H B, Pan L L, Xi Y G, et al. Leader-following bipartite consensus of multi-agent systems under signed networks[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(8): 1695-1701.)
- [28] 陈世明, 姜根兰, 张正. 通信受限的多智能体系统二分实用一致性[J]. *自动化学报*, 2022, 48(5): 1318-1326. (Chen S M, Jiang G L, Zhang Z. Bipartite practical consensus control of multi-agent systems with communication constraints[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(5): 1318-1326.)
- [29] Altafini C, Ceragioli F. Signed bounded confidence models for opinion dynamics[J]. *Automatica*, 2018, 93: 114-125.
- [30] He G, Liu J, Hu H M, et al. Discrete-time signed bounded confidence model for opinion dynamics[J]. *Neurocomputing*, 2021, 425: 53-61.
- [31] Allen V L. Situational factors in conformity[J]. *Advances in Experimental Social Psychology*, 1965, 2: 133-175.
- [32] Blondel V D, Hendrickx J M, Tsitsiklis J N. On krause's multi-agent consensus model with state-dependent connectivity[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(11): 2586-2597.

作者简介

张善祺(1996—), 男, 硕士生, 从事社会网络、观点动力学等研究, E-mail: zhangshanqi123@163.com;

刘兵(1987—), 男, 副教授, 博士, 从事分布式优化、自适应控制等研究, E-mail: liubing17@wust.edu.cn;

柴利(1972—), 男, 教授, 博士生导师, 从事滤波器组框架理论、多采样率信号处理、网络控制理论及应用等研究, E-mail: chaili@zju.edu.cn.