



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



套代数框架下网络控制系统的鲁棒稳定性分析

张秀娟, 徐晓萍

引用本文:

张秀娟,徐晓萍. 套代数框架下网络控制系统的鲁棒稳定性分析[J]. 控制与决策, 2024, 39(4): 1223–1230.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0739>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于高阶滑模速度控制器的异步电机模型预测转矩控制](#)

A model predictive torque control for induction motor based on high order sliding mode speed controller
控制与决策. 2021, 36(4): 953–958 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0650>

[基于高阶滑模速度控制器的异步电机模型预测转矩控制](#)

A model predictive torque control for induction motor based on high order sliding mode speed controller
控制与决策. 2021, 36(4): 953–958 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0650>

[事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 \$H_\infty\$ 故障检测](#)

Event-triggered H_∞ fault detection for networked control systems with distributed delays
控制与决策. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

[自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性](#)

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems
控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

[多采样率不确定离散时滞系统的鲁棒预见控制](#)

Robust preview control for multirate uncertain discrete-time systems with input delay
控制与决策. 2017, 32(12): 2113–2126 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1352>

套代数框架下网络控制系统的鲁棒稳定性分析

张秀娟, 徐晓萍[†]

(中国海洋大学 数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 研究级联双端口网络控制系统在被控对象、控制器和双端口通信信道中同时存在扰动的稳定性问题. 当网络控制系统通过一系列双向通信信道进行信号传输时, 系统建模为通过级联双端口网络进行连接. 由于通信过程中会发生信息的失真和干扰, 考虑双端口信道传输矩阵中的 \mathcal{H}_∞ 范数有界扰动以及被控对象和控制器中的 gap 型扰动, 得到基于通信信道扰动服从范数有界时闭环系统与网络控制系统鲁棒稳定之间的关系, 同时也以几何不等式的方式给出判定网络控制系统鲁棒稳定性的充分条件. 数值算例表明结论是有效的.

关键词: 套代数; 双端口; 网络控制系统; 稳定; 鲁棒稳定; 二次约束

中图分类号: O177.1

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0739

引用格式: 张秀娟, 徐晓萍. 套代数框架下网络控制系统的鲁棒稳定性分析 [J]. 控制与决策, 2024, 39(4): 1223-1230.

Robust stability analysis for the networked control systems within the framework of nest algebra

ZHANG Xiu-juan, XU Xiao-ping[†]

(School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: In this paper, the robust stability of cascaded two-port networked control system with disturbance in the plant, controller and two-port communication channel is studied. Cascading two-port connections occur when signals in a networked control system are transmitted over a series of two-port communication channels. Considering the distortion and interference occurring in communication, we consider \mathcal{H}_∞ norm bounded disturbances in the two-port channel transmission matrix and gap disturbances in the plant and controller. The relationship between the robust stability of the closed-loop system and the networked control system is obtained based on the norm bounded communication channel perturbation, and a sufficient condition for the robust stability of the networked control system is given by means of geometric inequality. The numerical example shows the effectiveness of our conclusion.

Keywords: nest algebra; two-port; networked control systems; stability; robust stability; quadratic constraints

0 引言

双端口网络最初是由电路理论引入^[1-2], 文献[3]将网络描述为线性时变系统, 网络控制系统本质上便是一个双端口网络. 双端口网络控制系统虽然不是一个新概念, 但近年来在控制领域引起了越来越多的关注. 标准的闭环系统在被控对象与控制器之间有完美的信息交换, 双端口网络控制系统与标准闭环系统的不同之处在于信号通过不完美通信通道进行信息传输与交换. 信息在传输或者交换过程中会出现信息失真和干扰, 相对而言更符合实际应用, 这也是本文研究该系统的主要原因.

为了解决系统稳定性问题, 在线性系统上定义

适当的度量是刻画扰动的基础. 利用 gap 度量及其变化进行不确定性动力学建模是一种自然且数学可处理的方法, 文献[4-7]对 gap、点态 gap 和 v -gap 均有较为深入的研究. 为了简单起见, 本文采用 gap 度量刻画被控对象和控制器的扰动, 大多数结果仍然与 v -gap 和点态 gap 的结论一致. 只要扰动能被量化, 鲁棒镇定问题便能用数学语言表达出来. 标准闭环系统的鲁棒镇定问题见图 1, 在过去的几十年里已经有了深入研究^[5, 8-10]. 考虑到被控对象和控制器具有 gap 型扰动, 通信信道扰动服从范数有界, 本文借鉴文献[4, 9]中标准闭环系统的稳定性结论得到网络控制系统的稳定以及鲁棒稳定的条件.

收稿日期: 2022-05-02; 录用日期: 2022-12-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701537).

责任编辑: 苏为洲.

[†]通讯作者. E-mail: xypouc@163.com.

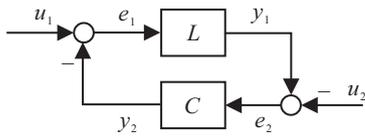


图1 标准闭环系统

素分解与有限维空间中系统稳定性之间的联系理论,在20世纪70年代至80年代已经相当成熟^[1,8-9].算子理论背景下,一个离散时不变线性系统是一个(可能无界)线性算子,它表现为希尔伯特空间上的无穷维下三角矩阵,系统的稳定性等价于算子的有界性,所有稳定系统的集合实际上是一个套代数^[11].素分解和强表示是研究这类系统稳定问题的恰当工具.Liu等^[12-14]描述了线性系统素分解、强表示与系统稳定之间的关系.本文将基于套代数框架,在素分解的基础上,利用系统图的定义和二次约束理论分析双端口网络控制系统的稳定性条件.有限维空间中,网络控制系统已先后被研究^[15-16],其稳定性与鲁棒稳定性均已有了相对成熟的结论.无穷维空间中,Liu^[17]利用积分二次约束给出了网络控制系统鲁棒稳定的充分条件,Yu等^[18]利用反三角不等式的形式给出了无穷维空间中网络控制系统鲁棒稳定的充要条件,这是在无穷维空间中分析网络控制系统的重大突破.本文基于以上研究成果,给出相对更简单的几何不等式以判断网络控制系统鲁棒稳定的条件.数值算例表明结论是有效的.

1 预备知识

$$\text{令 } \mathcal{H} = \left\{ (x_0, x_1, \dots) : \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty, x_i \in \mathcal{C} \right\}$$

为复无穷维 Hilbert 空间,是传统的输入输出空间,其中 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 代表空间 \mathcal{H} 与它自身的乘积. \mathcal{H} 中内积和范数分别定义为

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \bar{y}_i, \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{H}_e = \{ (x_0, x_1, \dots) : x_i \in \mathcal{C} \}$ 为 \mathcal{H} 的拓展完备空间.

令 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示从空间 \mathcal{H} 到其本身的所有有界线性算子构成的空间, T 的算子范数为 $\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \|Tx\|$, 最小模为 $\mu(T) = \inf_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \|Tx\|$. 如

果 T 存在有界逆, 则等式 $\mu(T) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ 成立. 对于 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, T 的伴随记为 T^* , 定义如下: $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$. 如果 $T = T^*$, 则称 T 为自伴算子. 如果对于所有的 $x \in \mathcal{H}$ 均有 $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, 则称自伴算子 T 是正定的, 记为 $T \geq 0$. 如果存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得对于所有的 $x \in \mathcal{H}$ 均有不等式 $\langle Tx, x \rangle \geq \varepsilon \|x\|^2$ 成立, 则称上述 T 是严格正定的, 记为 $T > 0$. 当 $T \leq$

0 或 $T < 0$, 可被同样定义.

\mathcal{N} 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 中包含 $\{0\}$ 和 \mathcal{H} 的闭子空间, 如果它在交和闭张中是闭的, 则称 \mathcal{N} 是一个套. 由 \mathcal{N} 定义的套代数记为

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}) = \{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TN \subseteq N, \forall N \in \mathcal{N} \}.$$

对于 $n \geq 0$, 在 \mathcal{H} 或 \mathcal{H}_e 上定义的正交投影如下:

$$P_n(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, \dots).$$

记 $P_{-1} = 0$ 且 $P_{\infty} = I$. $\{P_n : -1 \leq n \leq \infty\}$ 与系统关联性的物理定义有紧密关系, 如果线性变换 L 对于所有的 $-1 \leq n \leq \infty$ 有 $P_n L P_n = P_n L$, 则称线性变换 L 在 \mathcal{H}_e 上是关联的. \mathcal{H}_e 上的线性系统是 \mathcal{H}_e 上的关联线性变换, 其关于预解拓扑是连续的. 如果线性系统限制在 \mathcal{H}_e 空间上是一个有界算子, 则称该线性系统是稳定的.

令 \mathcal{L} 表示 \mathcal{H}_e 上所有线性系统构成的集合, 其满足标准的加法和乘法. 记 \mathcal{S} 是稳定线性系统全体构成的代数, 它是一个包含单位算子的弱闭代数, 同时在算子理论中也被认为是套 $\{I - P_n : -1 \leq n \leq \infty\}$ 决定的套代数.

2 线性系统预备知识

定义 1^[7] 设 L 是定义在 $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{H}$ 上的算子, 其中 $\mathcal{D}(L) = \{x \in \mathcal{H} : Lx \in \mathcal{H}\}$. L 的图记为 $\mathcal{G}(L)$,

$$\mathcal{G}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} x : x \in \mathcal{D}(L) \right\} \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{H};$$

L 的逆图记为 $\mathcal{G}'(L) = \left\{ \begin{bmatrix} L \\ I \end{bmatrix} x : x \in \mathcal{D}(L) \right\} \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. 如果 $\mathcal{G}(L)$ 是 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 的闭子空间, 则称 L 是闭的, 其中 \oplus 代表两个 \mathcal{H} 空间的直和.

文献[11]中 Theorem 5.3.4 表明, 任意的 $L \in \mathcal{L}$ 都是一个闭算子.

对于 $L, C \in \mathcal{L}$, 考虑由系统 L 和控制器 C 组成的标准反馈图 $[L, C]$, 见图1. 其闭环系统方程为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & C \\ L & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

如果内部输入 $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ 可以被表示为外部输入 $u =$

$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 的关联函数, 则称该系统是适定的. 其等价于要

求 $\begin{bmatrix} I & C \\ L & -I \end{bmatrix}$ 是可逆的, 且其逆为如下转移算子矩阵:

$$H(L, C) = \begin{bmatrix} (I + CL)^{-1} & C(I + LC)^{-1} \\ L(I + CL)^{-1} & -(I + LC)^{-1} \end{bmatrix}.$$

若算子矩阵 $H(L, C)$ 中的每一项都在 \mathcal{S} 中, 则称

闭环系统是稳定的. 在此条件下, 鲁棒稳定裕度为

$$b_{L,C} := \|L\#C\|^{-1} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} (I + CL)^{-1} [I \quad -C] \right\|^{-1}.$$

定义2^[11] 令 $\hat{M}, \hat{N}, M, N \in \mathcal{S}, L \in \mathcal{L}$. 有:

1) $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 为 $L \in \mathcal{L}$ 的右表示指 $\mathcal{G}(L) = \text{Ran} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$.

若 M, N 在 \mathcal{S} 中是右互素的, 即存在 $X, Y \in \mathcal{S}$ 满足 $[Y \quad X] \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = I$, 则称 $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 为 L 的强右表示. 如果 $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 是等距算子, 则称其为标准的强右表示.

2) $[-\hat{N} \quad \hat{M}]$ 为 $L \in \mathcal{L}$ 的左表示指 $\mathcal{G}(L) = \text{Ker}[-\hat{N} \quad \hat{M}]$. 若 \hat{M}, \hat{N} 在 \mathcal{S} 中是左互素的, 即存在 $\hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{S}$ 满足 $[-\hat{N} \quad \hat{M}] \begin{bmatrix} -\hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = I$, 则称 $[-\hat{N} \quad \hat{M}]$ 为 L 的强左表示. 如果 $[-\hat{N} \quad \hat{M}]$ 是余等距的, 则称其为标准的强左表示.

如果 L 有强表示, 则它一定有正规强表示.

引理1^[11] 如果 $M, N \in \mathcal{S}$, 则 $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 是 $L \in \mathcal{L}$ 的一个强右表示, 当且仅当:

- 1) 存在 $X, Y \in \mathcal{S}$, 使得 $[Y \quad X] \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = I$;
- 2) M 在 \mathcal{L} 中是可逆的.

注1 引理1表明 $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 是 L 的强右表示当且仅当 NM^{-1} 是 L 的右素分解. 同样地, $[-\hat{N} \quad \hat{M}]$ 是 L 的强左表示当且仅当 $\hat{M}^{-1}\hat{N}$ 是 L 的左素分解.

如果存在 $C \in \mathcal{L}$ 使得闭环系统 $[L, C]$ 是稳定的, 则称线性系统 L 是可镇定的.

引理2^[11] 假设 $L \in \mathcal{L}$, 且存在 $M, N, X, Y, \hat{M}, \hat{N}, \hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{S}$ 使得 $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ 和 $[-\hat{N} \quad \hat{M}]$ 分别是 L 的强右表示和强左表示, 满足双 Bezout 等式

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M - \hat{X} \\ N - \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - \hat{X} \\ N - \hat{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

关联线性系统 C 使得 L 可被稳定当且仅当它有强右表示 $\begin{bmatrix} \hat{Y} - NQ \\ \hat{X} + MQ \end{bmatrix}$ 和强左表示 $[-(X + Q\hat{M}) \quad Y - Q\hat{N}]$, 其中 $Q \in \mathcal{S}$.

Liu等^[14]证明了系统是稳定的只要它有单素分解, 其主要的结论如下.

引理3^[14] 令 $L \in \mathcal{L}$, 如下说法是等价的: 1) L 是可稳定的; 2) L 有右素分解; 3) L 有左素分解.

gap 度量在鲁棒控制理论研究中占有非常重要的地位, 下面是关于 gap 度量的一些概念和主要引理.

定义3^[11] 令 \mathcal{M}_1 和 \mathcal{M}_2 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的闭子空间, $P_{\mathcal{M}_1}$ 和 $P_{\mathcal{M}_2}$ 分别为相应的正交投影. 从 \mathcal{M}_1 到 \mathcal{M}_2 的方向 gap 为 $\vec{\delta}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \|P_{\mathcal{M}_2^\perp} P_{\mathcal{M}_1}\|$, \mathcal{M}_1 与 \mathcal{M}_2 之间的 gap 为 $\delta(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \max\{\vec{\delta}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2), \vec{\delta}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)\}$.

给定系统 $L \in \mathcal{L}$ 和 $\tilde{L} \in \mathcal{L}$, 则系统 L 与 \tilde{L} 之间的 gap 定义为其图之间的 gap, 即

$$\delta(L, \tilde{L}) = \delta(\mathcal{G}(L), \mathcal{G}(\tilde{L})).$$

记以 L 为中心 $r \in [0, 1)$ 为半径的 gap 球为

$$\mathcal{B}(L, r) := \{\tilde{L} \in \mathcal{L} : \delta(L, \tilde{L}) \leq r\}.$$

令 \mathcal{M}_1 和 \mathcal{M}_2 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的闭子空间, 如果 $\delta(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) < 1$, 则有

$$\delta(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \vec{\delta}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \vec{\delta}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1).$$

引理4^[11] 给定两个可镇定系统 $L \in \mathcal{L}$ 和 $C \in \mathcal{L}$, 如下结论等价:

- 1) $[L, C]$ 是稳定的;
- 2) $\mathcal{G}(L) + \mathcal{G}'(C) = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 且 $\mathcal{G}(L) \cap \mathcal{G}'(C) = \{0\}$;
- 3) $\delta(\mathcal{G}'(C)^\perp, \mathcal{G}(L)) < 1$.

成对存在的二次约束条件在镇定受扰动系统中起到非常重要的作用, 定义如下.

定义4^[14] 给定算子 $\Phi = \Phi^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 有:

1) 系统 $L \in \mathcal{L}$ 满足由 Φ 决定的严格二次约束, 记为 $L \in \text{SQC}(\Phi)$, 指存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\langle \Phi w, w \rangle \geq \epsilon \|w\|^2, \forall w \in \mathcal{G}(L)$.

2) 系统 L 满足由 Φ 决定的二次约束, 记为 $L \in \text{QC}(\Phi)$, 指 $\langle \Phi w, w \rangle \geq 0, \forall w \in \mathcal{G}(L)$.

3) 同样地, 系统 C 满足互补的严格二次约束, 记为 $C \in \text{SQC}^c(\Phi)$, 指存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\langle \Phi v, v \rangle \leq -\epsilon \|v\|^2, \forall v \in \mathcal{G}'(C)$.

4) 系统 C 满足互补的二次约束, 记为 $C \in \text{QC}^c(\Phi)$, 指 $\langle \Phi v, v \rangle \leq 0, \forall v \in \mathcal{G}'(C)$.

3 级联双端口网络控制系统

本节主要介绍受扰动后存在不确定性的双端口网络控制系统. 双端口网络 T 在文献[3, 6, 18-19]关于不同参数有不同的表示, 如阻抗参数、导纳参数、混合参数、传输参数等. 令 u, v 为下行信号, w, y 为具有适当维数的上行信号. 如图2所示, 由右素分解表示的被控对象 $L = NM^{-1}$ 和控制器 $C = VU^{-1}$ 通过级联的双端口网络相互通信. 考虑到 L 的输入和输出, 其图中的每个元素可以表示为

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} x, x \in \mathcal{H}.$$

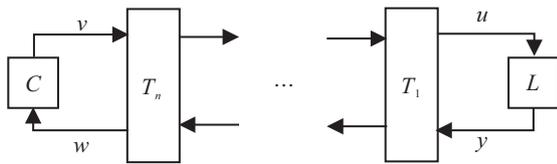


图2 具有级联双端口的网络控制系统

考虑双端口网络 $\{T_k\}_{k=1}^n$ 的传递表示, 如果第 k 级存在不确定性 $\Delta_k \in \mathcal{S}$, 则相应的传输算子矩阵表示为 $T_k = I + \Delta_k$. 对于 $k \in [1, n-1]$, 可以将级联双端口网络的前 k 级与被控对象 L 联系在一起, 剩余 $n-k$ 级与控制器 C 关联在一起. 将图2中的双端口网络控制系统等效转换为标准闭环系统 $[L_k, C_k]$, 如图3所示.

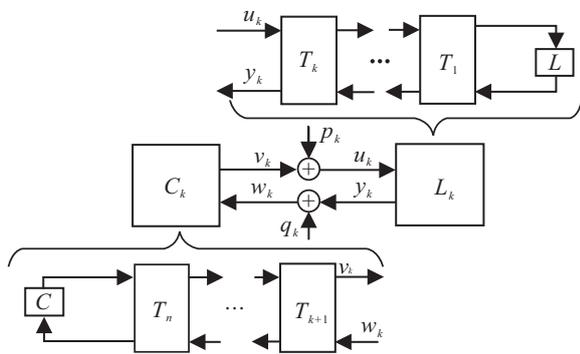


图3 等效的标准闭环系统

图3中信号表示为

$$\begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix} = T_k \dots T_1 \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = (I + \Delta_k) \dots (I + \Delta_1) \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} v_k \\ w_k \end{bmatrix} = T_{k+1}^{-1} \dots T_n^{-1} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = (I + \Delta_{k+1})^{-1} \dots (I + \Delta_n)^{-1} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}.$$

$[L_k, C_k]$ 进一步解释如下: 如果将 L 和 $\{T_j\}_{j=1}^k$ 视为具有扰动 $\{\Delta_j\}_{j=1}^k$ 的被控对象 L_k , 则 $L_k = N_k M_k^{-1}$ 可由其图确定为

$$\mathcal{G}_{L_k} = \begin{bmatrix} M_k \\ N_k \end{bmatrix} \mathcal{H} = T_k \dots T_1 \mathcal{G}_L = (I + \Delta_k) \dots (I + \Delta_1) \mathcal{G}_L.$$

同样地, C 和 $\{T_j\}_{j=k+1}^n$ 视为具有扰动 $\{\Delta_j\}_{j=k+1}^n$ 的控制器 C_k , $C_k = V_k U_k^{-1}$ 可由其逆图确定为

$$\mathcal{G}'_{C_k} = \begin{bmatrix} V_k \\ U_k \end{bmatrix} \mathcal{H} = T_{k+1}^{-1} \dots T_n^{-1} \mathcal{G}'_C = (I + \Delta_{k+1})^{-1} \dots (I + \Delta_n)^{-1} \mathcal{G}'_C.$$

为方便起见, 将 $k=0$ 和 $k=n$ 作为整个双端口网络和 L 以及 C 组成的情况, 很明显 $L_0 = L, C_n = C$.

下面介绍与系统图相关的两种特殊的不确定性集合, 不确定性邻域定义如下.

定义5^[16] 设 $L = NM^{-1}$ 是一个右素分解, 以 L 为中心, 以 $r \in [0, 1)$ 为半径的两个不确定邻域定义为

$$\mathcal{N}_1(L, r) = \left\{ \tilde{L} = \tilde{N}\tilde{M}^{-1} : \begin{bmatrix} \tilde{M} \\ \tilde{N} \end{bmatrix} = (I + \Delta) \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \Delta \in \mathcal{S}, \|\Delta\| \leq r \right\},$$

$$\mathcal{N}_2(L, r) = \left\{ \tilde{L} = \tilde{N}\tilde{M}^{-1} : \begin{bmatrix} \tilde{M} \\ \tilde{N} \end{bmatrix} = (I + \Delta)^{-1} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \Delta \in \mathcal{S}, \|\Delta\| \leq r \right\}.$$

可以看出, $\mathcal{N}_1(L, r)$ 对应于被控对象侧的扰动邻域, $\mathcal{N}_2(L, r)$ 对应于控制器侧的扰动邻域. 且有^[20]

$$\mathcal{N}_1(L, r) \cup \mathcal{N}_2(L, r) \subset \mathcal{B}(L, r). \quad (1)$$

双端口网络控制系统的稳定性常用下述方法定义.

定义6^[16] 如果所有同时注入的信号 p_k 和 $q_k \in \mathcal{H}, k=0, 1, \dots, n$, 使得所有端口上的信号 $u_k, y_k, v_k, w_k (k=0, 1, \dots, n)$ 都在 \mathcal{H} 中, 则称图3中双端口网络控制系统是稳定的.

简单地说, 为了验证双端口网络控制系统的稳定性, 从所有可能的输入注入有能量限制的信号, 然后检查所有的输出信号是否有能量限制. 因此, 判断稳定性的步骤可以简化如下.

引理5^[17] 双端口网络控制系统是稳定的当且仅当等效闭环系统 $[L_k, C_k]$ 是稳定的, $k=0, 1, \dots, n$.

4 级联双端口网络控制系统的稳定性

本节利用系统 $[L_0, C_0]$ 的稳定性表征双端口网络控制系统的稳定性.

定理1 如果 $[L_0, C_0]$ 是稳定的, 且 $\Delta_i \in \mathcal{S}, \|\Delta_i\| \leq r_i$, 其中 $r_i \in [0, 1), i=1, 2, \dots, n$, 则级联双端口网络控制系统是稳定的.

证明 由引理3可知, 存在 $M, N, \hat{M}, \hat{N}, U, V \in \mathcal{S}$, 使得 $L_0 = NM^{-1} = \hat{M}^{-1}\hat{N}, C_0 = VU^{-1}$. 因为 $[L_0, C_0]$ 是稳定的, 意味着 $\hat{M}U - \hat{N}V$ 是可逆的且 $\hat{M}U - \hat{N}V \in \mathcal{S}$, 同时满足双Bezout等式

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -\hat{X} \\ N & \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -\hat{X} \\ N & \hat{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 $X, Y, \hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{S}$.

由式(2)可知, $[-\hat{N} \quad \hat{M}] \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = 0$, 下述不等式显然成立:

$$[M^* \quad N^*] \begin{bmatrix} -\hat{N}^* \\ \hat{M}^* \end{bmatrix} [-\hat{N} \quad \hat{M}] \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = 0 \leq 0.$$

取 $\Phi = - \begin{bmatrix} -\hat{N}^* \\ \hat{M}^* \end{bmatrix} [-\hat{N} \quad \hat{M}]$, 易知 Φ 是一个自伴算子, 根据二次约束的定义可知 $L_0 \in \text{QC}(\Phi)$. 又

$$[V^* \quad U^*] \begin{bmatrix} -\hat{N}^* \\ \hat{M}^* \end{bmatrix} [-\hat{N} \quad \hat{M}] \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix} > 0,$$

可得 $C_0 \in \text{SQC}^c(\Phi)$.

定义 $\Phi_i = (T_1^{-1} \dots T_i^{-1})^* \Phi (T_1^{-1} \dots T_i^{-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$. 因为 $C_0 \in \text{SQC}^c(\Phi)$, 根据定义可知存在 $\epsilon > 0$, 使得 $\langle \Phi x, x \rangle \leq -\epsilon \|x\|^2, \forall x \in \mathcal{G}'(C_0)$. 又因为

$$\langle \Phi_i T_i \dots T_1 x, T_i \dots T_1 x \rangle = \langle \Phi x, x \rangle \dots - \epsilon \|x\|^2 \leq -\epsilon \cdot \mu(T_i \dots T_1)^2 \cdot \|T_i^{-1} \dots T_1^{-1} x\|^2, \forall x \in \mathcal{G}'(C_0),$$

有 $T_i \dots T_1 x \in \mathcal{G}'(C_i)$, 且 $C_i \in \text{SQC}^c(\Phi_i)$, 其中最后一个不等式成立是因为 $\mu(T) = 1/\|T^{-1}\|$. 同理可得 $L_i \in \text{QC}(\Phi_i)$, 这意味着对于 $\forall v \in \mathcal{G}(L_i)$, 有 $\langle \Phi_i v, v \rangle \geq 0$, 且存在 $\epsilon > 0$, 对于 $\forall w \in \mathcal{G}'(C_i)$, 有 $\langle \Phi_i w, w \rangle \leq -\epsilon \|w\|^2$. 由此可知

$$\begin{aligned} \epsilon \|w\|^2 &\leq \langle \Phi_i v, v \rangle - \langle \Phi_i w, w \rangle = \\ &\langle \Phi_i(w+v), w+v \rangle - 2\text{Re}\langle \Phi_i(w+v), w \rangle \leq \\ &\|\Phi_i\| \cdot \|w+v\|^2 + 2\|\Phi_i\| \cdot \|w+v\| \cdot \|w\| \leq \\ &\|\Phi_i\| \cdot \|w+v\|^2 + \frac{2\|\Phi_i\|^2 \cdot \|w+v\|^2}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \|w\|^2. \end{aligned}$$

进而有

$$\|w+v\|^2 \geq \eta_i^2 \|w\|^2, \forall w \in \mathcal{G}'(C_i), \forall v \in \mathcal{G}(L_i), \quad (3)$$

其中 $\eta_i = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\epsilon\|\Phi_i\| + 4\|\Phi_i\|^2}}$. 因为 $\|\Phi_i\| \geq \epsilon$, 易知 $0 < \eta_i \leq 1/\sqrt{6}$.

对于任意 $x \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \|x\|^2 = 1$, 均有 $P_{\mathcal{G}'(C_i)} x \in \mathcal{G}'(C_i); -P_{\mathcal{G}(L_i)} P_{\mathcal{G}'(C_i)} x \in \mathcal{G}(L_i)$. 由式(3)可得

$$\|P_{\mathcal{G}'(C_i)} x - P_{\mathcal{G}(L_i)} P_{\mathcal{G}'(C_i)} x\|^2 \geq \eta_i^2 \|P_{\mathcal{G}'(C_i)} x\|^2.$$

其等价于

$$\|P_{\mathcal{G}'(C_i)} x\|^2 - \|P_{\mathcal{G}(L_i)} P_{\mathcal{G}'(C_i)} x\|^2 \geq \eta_i^2 \|P_{\mathcal{G}'(C_i)} x\|^2.$$

因此有

$$\|P_{\mathcal{G}(L_i)} P_{\mathcal{G}'(C_i)} x\|^2 \leq (1 - \eta_i^2) \|P_{\mathcal{G}'(C_i)} x\|^2 \leq 1 - \eta_i^2.$$

由方向 gap 的定义可得

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(\mathcal{G}(L_i), \mathcal{G}'(C_i)^\perp) &= \bar{\delta}(\mathcal{G}'(C_i), \mathcal{G}(L_i)^\perp) = \\ \|P_{\mathcal{G}(L_i)} P_{\mathcal{G}'(C_i)}\| &\leq \sqrt{1 - \eta_i^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

由于 $T_1, \dots, T_n, T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1}$ 是关联的, 有

$$\mathcal{G}(L_i) = T_i \dots T_1 \mathcal{G}(L),$$

$$\mathcal{G}'(C_i) = T_{i+1}^{-1} \dots T_n^{-1} \mathcal{G}'(C).$$

因为 $[L_0, C_0]$ 是稳定的, 由引理4可知 $\mathcal{G}(L_0) + \mathcal{G}'(C_0) = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, 那么有

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(C_i) + \mathcal{G}(L_i) &= \\ (T_i \dots T_1)(T_1^{-1} \dots T_n^{-1} \mathcal{G}'(C) + \mathcal{G}(L)) &= \\ (T_i \dots T_1)(\mathcal{G}'(C_0) + \mathcal{G}(L_0)) &= \mathcal{H} \times \mathcal{H}. \end{aligned}$$

其等价于

$$\bar{\delta}(\mathcal{G}'(C_i)^\perp, \mathcal{G}(L_i)) < 1. \quad (5)$$

结合式(4)和(5)可以得出, $\delta(\mathcal{G}(C_i)^\perp, \mathcal{G}(L_i)) < 1$. 由引理4可知, 对于 $1 \leq i \leq n, [L_i, C_i]$ 是稳定的. 根据引理5可知级联双端口网络控制系统是稳定的. \square

注2 由定理2的证明可知, 当仅知道 $[L_0, C_0]$ 稳定, 且信道的传输扰动范数小于1时, 可以得到网络控制系统的稳定性. 与文献[21]不同, 本文利用二次约束研究双端口网络控制系统的稳定性问题.

套代数框架下, 如下引理是利用反正弦函数不等式描述系统鲁棒稳定性的一个充分条件.

引理6^[22] 假设名义系统 $[L, C]$ 是稳定的, 对于 $r_l, r_c \in [0, 1)$, 如果有 $\arcsin r_l + \arcsin r_c < \arcsin b_{L,C}$, 则对于所有的 $\tilde{L} \in \mathcal{B}(L, r_l)$ 和 $\tilde{C} \in \mathcal{B}(C, r_c)$, 受扰动系统 $[\tilde{L}, \tilde{C}]$ 是稳定的.

根据引理6可以推导出如下充分性结论.

引理7 假设名义系统 $[L, C]$ 是稳定的, 对于 $r_l, r_c \in [0, 1)$, 如果 $r_l + r_c < b_{L,C}$, 则对于所有的 $\tilde{L} \in \mathcal{B}(L, r_l)$ 和 $\tilde{C} \in \mathcal{B}(C, r_c)$, 受扰动系统 $[\tilde{L}, \tilde{C}]$ 是稳定的.

证明 因为 $r_l, r_c \in [0, 1)$, 显然有 $r_l \sqrt{1 - r_c^2} + r_c \sqrt{1 - r_l^2} \leq r_l + r_c$. 又因为 $r_l + r_c < b_{L,C}$, 不等式两边同时作用 arcsine 函数, 可以得到

$$\arcsin r_l + \arcsin r_c \leq \arcsin(r_l + r_c) < \arcsin b_{L,C}.$$

根据引理6, 对所有的 $\tilde{L} \in \mathcal{B}(L, r_l)$ 和 $\tilde{C} \in \mathcal{B}(C, r_c)$, $[\tilde{L}, \tilde{C}]$ 是稳定的. \square

下面给出利用几何思想刻画双端口网络控制系统稳定性的一个充分条件.

定理2 假设 $[L, C]$ 是稳定的, 对于 $\Delta_i \in \mathcal{S}$, 存在 $r_i \in [0, 1)$, 使得 $\|\Delta_i\| \leq r_i, i = 1, 2, \dots, n$. 如果 $n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} r_i < b_{L,C}$, 则双端口网络控制系统是稳定的.

证明 应用引理3可知, 存在 $M, N, U, V \in \mathcal{S}$, 使得 $L = NM^{-1}, C = VU^{-1}$, 则 $L_k = N_k M_k^{-1}$ 可由其图确定为

$$\mathcal{G}_{L_k} = \begin{bmatrix} M_k \\ N_k \end{bmatrix} \mathcal{H} = (I + \Delta_k) \cdots (I + \Delta_1) \mathcal{G}_L.$$

同样地,受扰动控制器 $C_k = V_k U_k^{-1}$ 可由其逆图确定为

$$\mathcal{G}'_{C_k} = \begin{bmatrix} V_k \\ U_k \end{bmatrix} \mathcal{H} = (I + \Delta_{k+1})^{-1} \cdots (I + \Delta_n)^{-1} \mathcal{G}'_C.$$

由适定性假设可知,第 k 个受扰动的被控对象 $L_k = N_k M_k^{-1}$ 是适定的,受扰动的控制器 $C_k = V_k U_k^{-1}$ 也是如此. 为方便起见,记 $L_0 = L, C_n = C$, 由式(1)得

$$L_k \in \mathcal{N}_1(L_{k-1}, r_k) \subset \mathcal{B}(L_{k-1}, r_k),$$

$$C_k \in \mathcal{N}_2(C_{k+1}, r_{k+1}) \subset \mathcal{B}(C_{k+1}, r_{k+1}),$$

通过迭代利用 gap 度量的三角不等式^[12], 有

$$\delta(L_k, L) \leq \sum_{j=1}^k \delta(L_j, L_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^k r_j,$$

$$\delta(C_k, C) \leq \sum_{j=k+1}^n \delta(C_{j-1}, C_j) \leq \sum_{j=k+1}^n r_j.$$

进而有

$$\delta(L_k, L) + \delta(C_k, C) \leq \sum_{j=1}^n r_j \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} r_i < b_{L,C}.$$

由引理7可知,对于 $k = 0, 1, \dots, n$, 等价的闭环系统 $[L_k, C_k]$ 是稳定的,即双端口网络控制系统是稳定的. □

利用上述思想,当被控对象、控制器和通信信道同时存在扰动时,考虑网络控制系统的鲁棒稳定性.

定理3 假设 $[L, C]$ 是稳定的,对于 $\Delta_i \in \mathcal{S}$, 存在 $r_i \in [0, 1)$, 使得 $\|\Delta_i\| \leq r_i, i = 1, 2, \dots, n$. 对于所有的 $\tilde{L} \in \mathcal{B}(L, r_l)$ 和 $\tilde{C} \in \mathcal{B}(C, r_c)$, 其中 $r_l, r_c \in [0, 1)$, 如果 $r_l + r_c + \sum_{i=1}^n r_i < b_{L,C}$, 则双端口网络控制系统是鲁棒稳定的.

证明 令 r_l, r_c, r_i 满足上述条件, 记受扰动的被控对象和控制器分别为 \tilde{L} 和 \tilde{C} , 则其右素分解分别为 $\tilde{L} = \tilde{N} \tilde{M}^{-1}, \tilde{C} = \tilde{V} \tilde{U}^{-1}$. 令

$$\begin{bmatrix} M_k \\ N_k \end{bmatrix} = (I + \Delta_k) \cdots (I + \Delta_1) \begin{bmatrix} \tilde{M} \\ \tilde{N} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} V_k \\ U_k \end{bmatrix} = (I + \Delta_{k+1})^{-1} \cdots (I + \Delta_n)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{U} \end{bmatrix}.$$

由适定性假设可知,第 k 个受扰动的被控对象 $\tilde{L}_k = N_k M_k^{-1}$ 是适定的. 受扰动的控制器 $\tilde{C}_k = V_k U_k^{-1}$ 也是如此. 为方便起见,记 $\tilde{L}_0 = \tilde{L}, \tilde{C}_n = \tilde{C}$. 由式(1)得

$$\tilde{L}_k \in \mathcal{N}_1(\tilde{L}_{k-1}, r_k) \subset \mathcal{B}(\tilde{L}_{k-1}, r_k),$$

$$\tilde{C}_k \in \mathcal{N}_2(\tilde{C}_{k+1}, r_{k+1}) \subset \mathcal{B}(\tilde{C}_{k+1}, r_{k+1}).$$

通过迭代利用 gap 度量的三角不等式^[12], 有如下不等式成立:

$$\delta(\tilde{L}_k, \tilde{L}) \leq \sum_{j=1}^k \delta(\tilde{L}_j, \tilde{L}_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^k r_j,$$

$$\delta(\tilde{C}_k, \tilde{C}) \leq \sum_{j=k+1}^n \delta(\tilde{C}_{j-1}, \tilde{C}_j) \leq \sum_{j=k+1}^n r_j.$$

因为 $\tilde{L} \in \mathcal{B}(L, r_l), \tilde{C} \in \mathcal{B}(C, r_c)$, 应用三角不等式得

$$\delta(\tilde{L}_k, L) \leq r_l + \sum_{j=1}^k r_j, \delta(\tilde{C}_k, C) \leq r_c + \sum_{j=k+1}^n r_j.$$

进而有

$$\delta(\tilde{L}_k, L) + \delta(\tilde{C}_k, C) \leq r_l + r_c + \sum_{j=1}^n r_j < b_{L,C}.$$

由引理7可知,对于 $k = 0, 1, \dots, n$, 等价的闭环系统 $[\tilde{L}_k, \tilde{C}_k]$ 是稳定的,因此双端口网络控制系统是鲁棒稳定的. □

5 数值算例

考虑如下线性系统 L 和控制器 $C = -I$ 以及通信信道扰动 Δ_i :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 2 & & & & \\ 3 & 2 & 3 & & & \\ & 3 & 2 & 4 & & \\ & & 3 & 2 & 5 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & -\frac{i}{i+1} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

显然双端口网络 $T_i = I + \Delta_i$ 可以表示为第 i 行第 i 列的元素为 $\frac{1}{i+1}$ 、主对角线上其余元素为1的算子矩阵. 基于第3节中 C 与 C_0 之间的关系, 可得

$$C_0 = \begin{bmatrix} -2 & & & & & \\ & -3 & & & & \\ & & -4 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -(n+1) & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

易知 C_0 存在左素分解 $C_0 = \hat{U}_0^{-1} \hat{V}_0$, 其中 $\hat{V}_0 = -I$, 且

$$\hat{U}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & & & & & \\ & 1/3 & & & & \\ & & 1/4 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1/(n+1) & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -(i+2) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -(n+1) \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

下面根据 L 与 L_0 的关系, 得到 L_0 的右素分解 $L_0 = L = N_0 M_0^{-1}$, 其中

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & \\ 3 & 1 & 1 & & & \\ & 3 & 2 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 3 & 2 & 1 \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \frac{3}{n-2} & \frac{2}{n-1} & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1/2 & & & & \\ & & 1/3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1/n & \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

由引理2可知 $[L_0, C_0]$ 是稳定的. 应用定理1, 网络控制系统是稳定的.

利用网络控制系统的稳定性定义核验定理1的有效性. 基于双端口网络信号之间的关系可以得到 $[L_i, C_i]$ 的矩阵表示, 对于 $i = 1, 2, \dots, n-1, n$, 有

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & & & \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & & & \\ & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{3}{i+1} & \frac{2}{i+1} & \frac{i}{i+1} \\ & & & & 3 & 2 & i+1 \\ & & & & & 3 & 2 & i+2 \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

可知 L_i 存在右素分解 $L_i = N_i M_i^{-1}$, 其中

$$N_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{4}{3} & 1 & & & & \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 & & & \\ \frac{9}{10} & \frac{8}{15} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & A & B & 1 & \\ & & & \frac{3i}{i-1} & \frac{2(i+1)}{i} & 1 \\ & & & & \frac{3(i+1)}{i} & \frac{2}{i+1} & 1 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$M_i = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ \frac{3}{2} & & & & & \\ \frac{4}{3} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{i+1}{i} & & & \\ & & & \frac{1}{i+1} & & \\ & & & & \frac{1}{i+2} & \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

其中: $A = \frac{3(i-1)}{(i+1)(i-2)}$, $B = \frac{3(i-1)}{(i+1)(i-2)}$. 同时, 选择 C_i 的一个特殊的左素分解 $C_i = \hat{U}_i^{-1} \hat{V}_i$, 其中 $\hat{V}_i = -I$, 且有

$$\hat{U}_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{i+2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{n+1} & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

由引理2可知对于 $i = 0, 1, \dots, n-1$, $[L_i, C_i]$ 是稳定的. 根据稳定性的定义, 上述算例中所构成的网络控制系统是稳定的. 由本节证明可知, 利用定理1判断网络控制系统的稳定性比借助定义判断其稳定更简单.

6 结论

在套代数的框架下, 本文给出了描述双端口网络控制系统稳定性的几个充分条件. 利用二次约束和 gap 度量等工具, 得到双端口网络控制系统的稳定性判据. 同时, 讨论了双端口网络控制系统在被控对象和控制器具有 gap 型扰动、通信信道扰动服从范数有界的条件下, 该系统鲁棒稳定性的一个充分条件. 最后, 通过数值算例表明了定理1结果的有效性.

参考文献(References)

- [1] Choma J. Electrical networks: Theory and analysis[M]. New York: Wiley, 1985.
- [2] Chua L O, Desoer C A, Kuh E S. Linear and nonlinear circuits[M]. New York: McGraw-Hill, 1987.
- [3] Zhang W, Branicky M S, Phillips S M. Stability of networked control systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 84-99.
- [4] Zames G, El-Sakkary A K. Unstable systems and feedback: The gap metric[C]. Proceedings of the Allerton Conference. Piscataway: IEEE, 1980: 380-385.
- [5] Akram M S, Cantoni M. Gap metrics for linear time-varying systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2018, 56(2): 782-800.
- [6] Qui L, Davison E J. Pointwise gap metrics on transfer matrices[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(6): 741-758.
- [7] Vinnicombe G. Uncertainty and feedback[M]. Singapore: World Scientific Pub Co Inc, 2000.
- [8] Cantoni M, Jönsson U T, Khong S Z. Robust stability analysis for feedback interconnections of time-varying linear systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(1): 353-379.
- [9] Seddik M D. On robustness in the gap metric and coprime factor uncertainty for LTV systems[J]. Systems & Control Letters, 2015, 80: 16-22.
- [10] Foias C, Georgiou T T, Smith M C. Robust stability of feedback systems: A geometric approach using the gap metric[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1993, 31(6): 1518-1537.
- [11] Feintuch A. Stabilization[M]. Robust Control Theory in Hilbert Space. New York: Springer, 1998: 87-115.
- [12] Liu L, Lu Y. Stabilizability, representations and factorizations for time-varying linear systems[J]. Systems & Control Letters, 2014, 66: 58-64.
- [13] Liu L, Lu Y F. Coprime representations and feedback stabilization of discrete timevarying linear systems[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2019, 17(2): 425-434.
- [14] Liu L, Lu Y. Stability analysis for time-varying systems via quadratic constraints[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(10): 832-839.
- [15] Zhao D, Qiu L. Networked robust stabilization with simultaneous uncertainties in plant, controller and communication channels[C]. IEEE 55th Conference on Decision and Control. Las Vegas, 2016: 2376-2381.
- [16] Zhao D, Qiu L, Gu G X. Stabilization of two-port networked systems with simultaneous uncertainties in plant, controller, and communication channels[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(3): 1160-1175.
- [17] Liu L. Robust stability analysis for feedback systems with simultaneous uncertainties via IQCs[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(17): 2643-2650.
- [18] Yu T Q, Di Z, Li Q. Networked robust stability for LTV systems with simultaneous uncertainties in plant, controller, and communication channels[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2021, 59(1): 1-23.
- [19] Gu G X, Qiu L. A two-port approach to networked feedback stabilization[C]. The 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando, 2012: 2387-2392.
- [20] Gu G, Qiu L. Connection of multiplicative/relative perturbation in coprime factors and gap metric uncertainty[J]. Automatica, 1998, 34(5): 603-607.
- [21] Liu L. QCs characterization of robust stability with simultaneous uncertainties in plant and controller[J]. Systems & Control Letters, 2019, 133: 104550.
- [22] 徐晓萍, 石岩月. Gap度量下线性时变系统的鲁棒性[J]. 数学学报: 中文版, 2021, 64(6): 881-894.
(Xu X P, Shi Y Y. Robustness for linear time-varying systems using the gap metric[J]. Acta Mathematica Sinica: Chinese Series, 2021, 64(6): 881-894.)

作者简介

张秀娟(1997—), 女, 硕士生, 从事网络控制系统稳定性的研究, E-mail: xjzhouc@163.com;

徐晓萍(1979—), 女, 讲师, 硕士生导师, 从事 Hilbert 空间上的控制理论、算子理论等研究, E-mail: xxpouc@163.com.