



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

# 控制与决策

CONTROL AND DECISION

## 基于转移依赖Lyapunov函数离散时间切换系统的异步 $L_2-L_\infty$ 滤波

王瑞华, 李福鹏, 胡硕洋, 费树珉

引用本文:

王瑞华, 李福鹏, 胡硕洋, 费树珉. 基于转移依赖Lyapunov函数离散时间切换系统的异步 $L_2-L_\infty$ 滤波[J]. 控制与决策, 2024, 39(4): 1231–1239.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.0966>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制

The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger  
控制与决策. 2021, 36(10): 2467–2474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0281>

#### 基于模型依赖驻留时间的异步切换控制

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time  
控制与决策. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

#### 基于反馈无源化的切换非线性系统 $H_\infty$ 跟踪控制

Passification-based  $H_\infty$  tracking control for a class of switched nonlinear systems  
控制与决策. 2021, 36(11): 2729–2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

#### 基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 $H_\infty$ 控制

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model  
控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

#### 参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty  
控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

# 基于转移依赖 Lyapunov 函数离散时间切换系统的 异步 $l_2-l_\infty$ 滤波

王瑞华<sup>1†</sup>, 李福鹏<sup>1</sup>, 胡硕洋<sup>1</sup>, 费树珉<sup>2</sup>

(1. 青岛理工大学 信息与控制工程学院, 山东 青岛 266520; 2. 东南大学 自动化学院, 南京 210096)

**摘要:** 主要研究离散时间切换系统在容许路径依赖混合驻留时间 (AED-IDT) 切换下异步  $l_2-l_\infty$  滤波器的设计问题. 不同于以往的研究结果, 提出一种异步转移依赖凸 Lyapunov 函数, 得到了低保守性稳定性判据. 所设计 Lyapunov 函数的创新之处在于其构建不再依赖系统模式, 而是依赖当前激活的滤波器模式和刚刚运行结束的滤波器模式. 鉴于所设计 Lyapunov 函数具有凸性质, 这为所提出方法提升自由度和灵活性创造了空间. 采用转移依赖凸 Lyapunov 函数和 AED-IDT 切换策略, 能够得到保证滤波误差系统全局一致指数稳定, 且具有  $l_2-l_\infty$  性能的充分条件. 在此基础上, 提出异步  $l_2-l_\infty$  滤波器的设计方法. 最后, 通过一个数值实例和一个切换 RLC 应用电路来验证所得结果的有效性, 并经过仿真实验验证了所提出设计方法能够保证更紧的驻留时间界和较小的滤波误差结果.

**关键词:** 离散时间切换系统; 转移依赖凸 Lyapunov 函数; 容许路径依赖混合驻留时间; 全局一致指数稳定; 异步  $l_2-l_\infty$  滤波; 切换 RLC 电路

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0966

**引用格式:** 王瑞华, 李福鹏, 胡硕洋, 等. 基于转移依赖 Lyapunov 函数离散时间切换系统的异步  $l_2-l_\infty$  滤波 [J]. 控制与决策, 2024, 39(4): 1231-1239.

## Asynchronous $l_2-l_\infty$ filtering of discrete-time switched systems based on transferring-dependent convex Lyapunov function

WANG Rui-hua<sup>1†</sup>, LI Fu-peng<sup>1</sup>, HU Shuo-yang<sup>1</sup>, FEI Shu-min<sup>2</sup>

(1. College of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China;  
2. College of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** This paper investigates the design of the asynchronous  $l_2-l_\infty$  filter for discrete-time switched systems under admissible edge-dependent integrated dwell time (AED-IDT). Different from the previous research results, it is the first time to propose the asynchronous transferring-dependent convex Lyapunov function to obtain the less conservative stability criteria. The novelty of the Lyapunov function is that it is constructed in a way that does not depend on the system mode, but depend on the currently activated filter mode and the freshly deactivated filter mode. Given the convex property of the designed Lyapunov function, this provides the possibility for the proposed method to improve the degree of freedom and flexibility. By using the transferring-dependent convex Lyapunov function and AED-IDT switching strategies, the sufficient conditions are derived to ensure the global uniform exponential stability and  $l_2-l_\infty$  performance of the filtering error system. Furthermore, the method of constructing asynchronous  $l_2-l_\infty$  filter is given. Finally, a numerical example and a switched RLC application circuit are provided to demonstrate the potential and validity of the obtained results. The simulation results verify that the proposed design approach yields tighter dwell time bounds and smaller filtering error.

**Keywords:** discrete-time switched systems; transferring-dependent convex Lyapunov function; admissible edge-dependent integrated dwell time; global uniform exponential stability; asynchronous  $l_2-l_\infty$  filtering; switched RLC circuit

收稿日期: 2022-05-31; 录用日期: 2022-12-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62203248, 62001263); 山东省自然科学基金项目 (ZR2021MF087); 山东高等学校科技计划项目 (J18KA324).

责任编辑: 王燕舞.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: 123.wrh@163.com.

## 0 引言

切换系统<sup>[1-3]</sup>由切换信号和子系统两部分构成. 迄今为止, 切换系统不仅在理论研究上取得了大量优秀的成果, 还广泛应用于各种实际领域, 如独立微电网控制<sup>[4]</sup>、航空发动机控制系统<sup>[5]</sup>、终端能量路由器能量路由控制<sup>[6]</sup>等.

在实际工程领域, 设备间信号的传输会不可避免地受到外界干扰或检测噪声的影响. 为了得到可靠的信号, 需要对设备内部系统的真实状态信息进行估计. 在具有扰动输入的系统状态估计中, 滤波作为一种有效的方法引起了众多关注. 在切换系统控制综合研究中, 当子系统发生切换时, 会默认与其对应的滤波器也随之发生切换. 这是一种理想的切换行为, 称为同步切换. 然而, 想要在实际系统实现同步切换有一定的困难. 由于受到外界环境等诸多因素的影响, 滤波器间的切换会滞后于子系统间的切换, 激活的子系统会耗费一段时间才能匹配到对应的滤波器, 将这种切换现象称为异步切换. 在这一时间范围内, 滤波器不能准确地估计激活子系统的状态信息, 可能导致系统产生不好的动态性能. 因此, 在滤波器的设计过程中, 有必要考虑异步切换带来的不利影响<sup>[7-8]</sup>.

在切换系统的研究中, 稳定性分析至关重要. 多 Lyapunov 函数 (MLF) 方法由于具有更多的灵活性, 成为广泛应用的稳定性分析工具<sup>[9-10]</sup>. 文献 [11] 通过引入凸函数性质成功构造出多凸 Lyapunov 函数 (MCLF), 得到了一系列改进型稳定性条件. 近年来, MLF 结合时间依赖约束切换信号已成为研究切换系统滤波问题的一种有效方法. 作为两种经典的时间依赖约束切换信号: 模态依赖平均驻留时间 (MDADT) 和平均驻留时间 (ADT) 被频繁使用. 文献 [12] 通过 ADT 和线性矩阵不等式 (LMIs) 技术, 研究了具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统的  $H_\infty$  滤波问题, 有效解决了因传感器老化、传输信号丢失等造成的不良问题. 基于 MDADT 切换和驻留时间依赖 Lyapunov 函数方法, 文献 [13] 构造了一种由时间依赖和状态依赖组成的混杂切换策略来研究切换系统的异步  $H_\infty$  滤波问题. 文献 [14] 提出了一个与控制器切换保持一致的时变 Lyapunov 函数, 研究连续时间切换系统的异步非加权  $l_2$  增益问题. 最近, 文献 [15] 提出了容许路径依赖平均驻留时间 (AED-ADT) 方法来进一步降低 MDADT 方法的保守性. 基于这种新提出的切换方法, 研究离散时间切换系统的  $H_\infty$  控制问题和  $l_2$ - $l_\infty$  滤波问题<sup>[16]</sup>, 得到了保守性更小的结果. 通过上述分析发现, 切换系统在

异步滤波方面的研究主要集中于  $H_\infty$  滤波, 而关于异步切换  $l_2$ - $l_\infty$  滤波研究相对较少.

综上所述, 发现常用的 MLF 方法本质上是一种模态依赖的 Lyapunov 函数. 这类 Lyapunov 函数仅仅考虑激活的系统模态, 而忽视了相邻运行结束的系统模态. 换言之, 对于一个激活的子系统, 其所有的运行间隔均共用一个 LF, 这在稳定性分析和控制综合中是不灵活的. 此外, 在异步切换情况下, 会出现一段系统模态与滤波器模态不匹配的异步区间. 在这个区间内根据系统模态设计的 Lyapunov 函数无法准确地描述增广系统能量的变化, 这会给切换系统的滤波研究带来一定的保守性. 基于上述分析, 本文提出一个新型的转移依赖凸 Lyapunov 函数来保证离散时间切换系统的异步滤波误差系统具有期望的  $l_2$ - $l_\infty$  性能. 本文从以下几个方面阐述主要内容: 1) 本文提出一个新的转移依赖方法来构造 Lyapunov 函数. 采用所提出方法构造的转移依赖凸 Lyapunov 函数不仅依赖当前激活的滤波器模态, 还依赖相邻运行结束的滤波器模态. 所提出转移依赖凸 Lyapunov 函数相较于传统的 MLF 不仅更一般化, 且进一步描述了不同滤波器间 Lyapunov 函数的切换关系. 此外, 转移依赖凸 Lyapunov 函数在上述基础上还引入凸函数, 这样可大大放松 Lyapunov 函数在切换点处的约束. 2) 针对切换系统的异步区间和同步区间, 本文将转移依赖凸 Lyapunov 函数详细地构建为时变转移依赖凸 Lyapunov 函数和时不变转移依赖凸 Lyapunov 函数两种不同的形式. 基于此, 成功为离散时间切换系统在 AED-IDT 切换策略下构造了一个异步  $l_2$ - $l_\infty$  滤波器, 以此保证相应的滤波误差系统是全局一致指数稳定的. 同时, 能够得到更紧的驻留时间界和较小的滤波误差结果. 3) 最后, 通过一个数值实例和一个切换 RLC 电路应用实例验证所提出转移依赖凸 Lyapunov 函数在构造异步  $l_2$ - $l_\infty$  滤波器的有效性.

符号说明: 本文符号采用标准表示法.  $A > 0$  ( $A < 0$ ) 表示矩阵  $A$  是正定(负定)的,  $A^T$  和  $A^{-T}$  分别为矩阵  $A$  的转置和矩阵  $A$  的逆矩阵的转置, 符号  $*$  在对称矩阵中为主对角线以下元素的对称项, 令  $\mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{Z}_{\geq 0}$  分别定义为  $n$ -维欧几里得空间和所有自然数的集合,  $\sum$  和  $\prod$  分别为有限项或无限项的和与积. 本文假设所有矩阵均具有相容维数, 用于未明确表明代数运算.

## 1 预备知识和问题描述

考虑一类离散时间切换系统, 即

$$\begin{cases} x(n+1) = A_{\sigma(n)}x(n) + B_{\sigma(n)}\omega(n), \\ y(n) = C_{\sigma(n)}x(n) + D_{\sigma(n)}\omega(n), \\ z(n) = G_{\sigma(n)}x(n). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(n) \in \mathbf{R}^{r_x}$ 、 $y(n) \in \mathbf{R}^{r_y}$  和  $z(n) \in \mathbf{R}^{r_z}$  分别为系统的状态、系统的测量值和被估计的信号;  $\omega(n)$  为属于  $l_2[0, \infty)$  空间内的外部扰动;  $\sigma(n)$  为一个关于时间的分段右连续常值函数, 又称为切换信号,  $\sigma(n) : [0, \infty) \rightarrow \Phi = \{1, 2, \dots, \mathcal{H}\}$ , 且  $\mathcal{H} > 1$  为子系统的个数. 定义切换序列为  $\psi = \{x(n_0); (j_0, n_0), (j_1, n_1), \dots, (j_q, n_q), \dots, |j_q \in \Phi, q \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$ . 由  $\psi$  得知, 当  $\forall n \in [n_q, n_{q+1})$  时,  $\sigma(n) = j_q$  意味着子系统  $j_q$  被激活.  $A_{\sigma(n)}$ 、 $B_{\sigma(n)}$ 、 $C_{\sigma(n)}$ 、 $D_{\sigma(n)}$  和  $G_{\sigma(n)}$  为合适维度的实值矩阵.

为系统(1)设计的滤波器形式如下所示:

$$\begin{cases} x_f(n+1) = A_{\sigma(n)}^f x_f(n) + B_{\sigma(n)}^f y(n), \\ z_f(n) = C_{\sigma(n)}^f x_f(n). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $x_f(n) \in \mathbf{R}^{r_x}$  和  $z_f(n) \in \mathbf{R}^{r_z}$  分别为滤波器的状态和  $z(n)$  的估计值. 对于  $\forall n \in [n_q, n_{q+1})$ , 假设  $\sigma(n) = j$ , 则  $A_j^f$ 、 $B_j^f$ 、 $C_j^f$  ( $\forall j \in \Phi$ ) 为待求的滤波器参数.

当发生异步切换时, 令  $\Delta_q$  为子系统与滤波器模式间的切换延迟. 假设在  $n_0$  时刻, 子系统与对应滤波器模式是同时启动的, 即  $\Delta_0 = 0$ . 设定最大的切换延迟为  $\Delta_Q = \max_{q \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \{\Delta_q\}$ , 这是一个已知的常量. 当  $\sigma(n_{q-1}) = h, \sigma(n_q) = j, \forall h, j \in \Phi, h \neq j$  时, 结合式(1)和(2), 且定义  $\bar{x}(n) = [x^T(n) \quad x_f^T(n)]^T$  和  $e(n) = z(n) - z_f(n)$ , 得到如下所示的滤波误差系统.

1) 考虑异步区间  $n \in [n_q, n_q + \Delta_q)$ , 有

$$\bar{x}(n+1) = \mathcal{A}_j \bar{x}(n) + \mathcal{B}_j \omega(n), \quad e(n) = \mathcal{C}_j \bar{x}(n). \quad (3)$$

2) 考虑同步区间  $n \in [n_q + \Delta_q, n_{q+1})$ , 有

$$\begin{aligned} \bar{x}(n+1) &= \bar{\mathcal{A}}_j \bar{x}(n) + \bar{\mathcal{B}}_j \omega(n), \\ e(n) &= \bar{\mathcal{C}}_j \bar{x}(n). \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j &= \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ B_h^f C_j & A_h^f \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_j = \begin{bmatrix} B_j \\ B_h^f D_j \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_j = [G_j \quad -C_h^f], \\ \bar{\mathcal{A}}_j &= \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ B_j^f C_j & A_j^f \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{B}}_j = \begin{bmatrix} B_j \\ B_j^f D_j \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{C}}_j = [G_j \quad -C_j^f]. \end{aligned}$$

为了得到主要结果, 引入一些必要的定义和引理.

**定义 1** 对于  $\forall h, j \in \Phi, h \neq j$  和切换信号  $\sigma(n)$ , 若存在容许路径依赖驻留时间  $\tau_{h,j}^i > 0$  和容许路径依赖平均驻留时间  $\tau_{h,j}^a > 0$ , 使得

$$\begin{cases} n_{q+1} - n_q \geq \tau_{h,j}^i, \\ N_{h,j}^\sigma(n_0, n) \leq N_{h,j}^0 + \frac{T_{h,j}(n_0, n)}{\tau_{h,j}^a}, \quad \forall n \geq n_0 \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

成立, 则称切换信号  $\sigma(n)$  满足 AED-IDT 条件. 在时间区间  $[n_0, n)$  内,  $N_{h,j}^\sigma(n_0, n)$  表示子系统从  $h$  切换至  $j$  的切换次数,  $T_{h,j}(n_0, n)$  为子系统  $j$  的总运行时间.

**引理 1** [17] 给出状态向量  $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{r_x}$ ,  $U = U^T \in \mathbf{R}^{r_x \times r_x}$  和  $Y \in \mathbf{R}^{m \times r_x}$ , 且  $\text{rank}(Y) < r_x$  时, 下面 2 个不等式是等价的:

- 1)  $\tilde{x}^T U \tilde{x} < 0$ , 对所有  $Y \tilde{x} = 0, \tilde{x} \neq 0$ ;
- 2)  $\exists Q \in \mathbf{R}^{r_x \times m}, U + QY + Y^T Q^T < 0$ .

结合上文提到的内容, 本文的目标是为系统(1)设计一个具有式(2)形式的异步  $l_2-l_\infty$  滤波器, 同时要找到一组 AED-IDT 条件使得滤波误差系统(3)和(4)在  $\omega(n) = 0$  的前提下是全局一致指数稳定的. 同时, 在 0 初始条件有

$$\|e\|_\infty < \gamma \|\omega\|_2. \quad (6)$$

## 2 主要结果

在本节中, 主要研究系统(1)的异步  $l_2-l_\infty$  滤波问题. 通过构建新的异步转移依赖凸 Lyapunov 函数和 AED-IDT 切换技术, 得到一系列稳定性判据. 基于得到的改进型稳定性判据, 求得设计的滤波器增益.

### 2.1 构建异步转移依赖凸 Lyapunov 函数

图 1 为切换区间的划分情况. 其中:  $n_{qa} = n_q + \Delta_Q, n_{qb} = n_q + \tau_{h,j}^i$ . 由图 1 可见, 在区间  $[n_q, n_{q+1})$  上, 子系统  $j$  在运行. 但是, 由于异步现象的存在, 导致在区间  $[n_q, n_{qa})$  内, 仍然是  $h$  滤波器在工作. 为了方便区分, 将这段区间称为异步非凸区间. 在  $n_{qa}$  时刻, 滤波器发生切换. 将  $n_{qa}$  和  $n_{qb}$  分别定义为凸区间的开始点和结束点. 由此, 将区间  $[n_{qa}, n_{qb})$  称为同步凸区间, 区间  $[n_{qb}, n_{q+1})$  称为同步非凸区间.

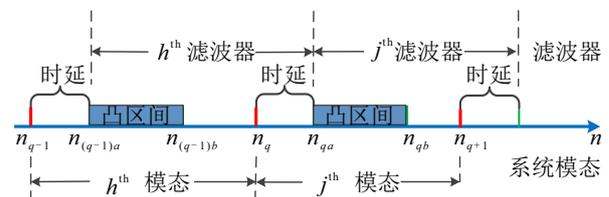


图 1 切换区间分割

对于滤波误差系统(3)和(4), 基于滤波器模式所构造的转移依赖凸 Lyapunov 函数如下所示.

1) 考虑异步非凸区间  $n \in [n_q, n_{qa})$ , 有

$$\begin{aligned} V_{gh}(n) &= \bar{x}^T(n) \mathcal{P}_{gh}(n) \bar{x}(n) = \\ &= \bar{x}^T(n) \sum_{s=1}^S f_{ghs}(n_{(q-1)b} - n_{(q-1)a}) \mathcal{P}_{ghs} \bar{x}(n). \end{aligned} \quad (7)$$

2) 考虑同步凸区间  $n \in [n_{qa}, n_{qb}]$ , 有

$$V_{hj}(n) = \bar{x}^T(n) \mathcal{P}_{hj}(n) \bar{x}(n) = \bar{x}^T(n) \sum_{s=1}^S f_{hjs}(n - n_{qa}) \mathcal{P}_{hjs} \bar{x}(n). \quad (8)$$

3) 考虑同步非凸区间  $n \in [n_{qb}, n_{q+1}]$ , 有

$$V_{hj}(n) = \bar{x}^T(n) \mathcal{P}_{hj}(n) \bar{x}(n) = \bar{x}^T(n) \sum_{s=1}^S f_{hjs}(n_{qb} - n_{qa}) \mathcal{P}_{hjs} \bar{x}(n). \quad (9)$$

其中:  $\sigma(n_{q-2}) = g, \sigma(n_{q-1}) = h, \sigma(n_q) = j, \mathcal{P}_{ghs} > 0$  和  $\mathcal{P}_{hjs} > 0, \forall g, h, j \in \Phi, g \neq h, h \neq j, \forall s \in \{1, 2, \dots, S\}$ . 函数  $f_{hjs}(n - n_{qa})$  在区间  $[n_{qa}, n_{qb}]$  内被定义, 且满足如下条件:

$$f_{hjs}(n - n_{qa}) \geq 0, \sum_{s=1}^S f_{hjs}(n - n_{qa}) = 1. \quad (10)$$

令函数  $f_{hjs}(n - n_{qa})$  设定为

$$f_{hjs}(n - n_{qa}) = c(n - n_{qa}) + d, \quad (11)$$

其中  $c$  和  $d$  均为未知的参数. 令

$$f_{hjs}(0) = c_{hjs}, f_{hjs}(\tau_{h,j}^i - \Delta_Q) = d_{hjs}. \quad (12)$$

其中:  $0 \leq c_{hjs} \leq 1, 0 \leq d_{hjs} \leq 1, \sum_{s=1}^S c_{hjs} = 1, \sum_{s=1}^S d_{hjs} = 1$ .

由此, 得到

$$f_{hjs}(n - n_{qa}) = \frac{d_{hjs} - c_{hjs}}{\tau_{h,j}^i - \Delta_Q} (n - n_{qa}) + c_{hjs}, \quad (13)$$

则有

$$f_{hjs}(n + 1 - n_{qa}) - f_{hjs}(n - n_{qa}) = \frac{d_{hjs} - c_{hjs}}{\tau_{h,j}^i - \Delta_Q}. \quad (14)$$

转移依赖特性意味着能够给每个子系统安排多个 Lyapunov 函数. 转移依赖 Lyapunov 函数充分考虑不同子系统间的切换特性, 能够增加滤波器设计的灵活性, 减小切换点处条件的限制性, 降低所得性能分析条件的保守性. 另外, 由于凸函数的引入, 转移依赖凸 Lyapunov 函数成为一个时变函数, 为 Lyapunov 函数提供了更大的设计自由度, 这一点已在文献 [1-2, 11] 中详细讨论.

### 2.2 $l_2$ - $l_\infty$ 滤波性能分析

在异步切换下, 通过转移依赖凸 Lyapunov 函数 (7)~(9) 和 AED-IDT 切换技术, 能够推导出系统稳定性和  $l_2$ - $l_\infty$  性能所需的充分条件. 由于空间的限制, 本文假设符号  $\text{Sym}(A) = A + A^T$ .

**定理 1** 对于  $\forall g, h, j \in \Phi, g \neq h, h \neq j$ , 考虑滤波误差系统 (3) 和 (4). 给定标量  $0 < \alpha_j < 1, \beta_j > 1, \lambda_{h,j} > 1$ , 且满足  $\alpha_j^{-\Delta_Q} \beta_j^{\Delta_Q} \lambda_{h,j} > 1$ , 假设存在矩阵

$\mathcal{P}_{ghs} > 0, \mathcal{P}_{hjs} > 0, \forall s \in \mathcal{S}$ , 矩阵  $\mathcal{M}_{gh}, \overline{\mathcal{M}}_{hj}$ , 使得

$$\begin{bmatrix} -\beta_j \sum_{s=1}^S d_{ghs} \mathcal{P}_{ghs} & * & * \\ 0 & -I & * \\ \mathcal{M}_{gh} \mathcal{A}_j & \mathcal{M}_{gh} \mathcal{B}_j & \Psi_{33}^1 \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_j \mathcal{P}_{hjs} & * & * \\ 0 & -I & * \\ \overline{\mathcal{M}}_{hj} \overline{\mathcal{A}}_j & \overline{\mathcal{M}}_{hj} \overline{\mathcal{B}}_j & \Psi_{33}^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_j \sum_{s=1}^S d_{hjs} \mathcal{P}_{hjs} & * & * \\ 0 & -I & * \\ \overline{\mathcal{M}}_{hj} \overline{\mathcal{A}}_j & \overline{\mathcal{M}}_{hj} \overline{\mathcal{B}}_j & \Psi_{33}^3 \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{ghs} \mathcal{P}_{ghs} & * \\ \mathcal{C}_j & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \delta \mathcal{P}_{hjs} & * \\ \overline{\mathcal{C}}_j & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{hjs} \mathcal{P}_{hjs} & * \\ \overline{\mathcal{C}}_j & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

$$\sum_{s=1}^S c_{hjs} \mathcal{P}_{hjs} \leq \lambda_{h,j} \sum_{s=1}^S d_{ghs} \mathcal{P}_{ghs} \quad (21)$$

成立, 其中

$$\Psi_{33}^1 = \sum_{s=1}^S (d_{ghs} + \varphi_{ghs}) \mathcal{P}_{ghs} - \text{Sym}(\mathcal{M}_{gh}),$$

$$\Psi_{33}^2 = \mathcal{P}_{hjs} + \sum_{z=1}^S \varphi_{hjz} \mathcal{P}_{hjz} - \text{Sym}(\overline{\mathcal{M}}_{hj}),$$

$$\Psi_{33}^3 = \sum_{s=1}^S (d_{hjs} + \varphi_{hjs}) \mathcal{P}_{hjs} - \text{Sym}(\overline{\mathcal{M}}_{hj}),$$

$$\varphi_{hjs} = \frac{d_{hjs} - c_{hjs}}{\tau_{h,j}^i - \Delta_Q}.$$

则当  $\forall h, j \in \Phi, h \neq j$ , AED-IDT 满足

$$\tau_{h,j}^a > \max \left\{ \tau_{h,j}^i, \frac{\ln(\alpha_j^{-\Delta_Q} \beta_j^{\Delta_Q} \lambda_{h,j})}{-\ln \alpha_j} \right\} \quad (22)$$

时, 滤波误差系统 (3) 和 (4) 是全局一致指数稳定的, 且具有  $l_2$ - $l_\infty$  性能指标  $\gamma$ .

**证明** 当  $\forall n \in [n_{qa}, n_{qb}]$  时, 由式 (14) 和 (16), 得到

$$\begin{bmatrix} -\alpha_j \mathcal{P}_{hj}(n) & * & * \\ 0 & -I & * \\ \overline{\mathcal{M}}_{hj} \overline{\mathcal{A}}_j & \overline{\mathcal{M}}_{hj} \overline{\mathcal{B}}_j & \Omega_{33} \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

由引理 3<sup>[11]</sup>, 可进一步得到

$$\tilde{x}^T U(n) \tilde{x} < 0. \quad (24)$$

由式 (24), 有

$$V_{hj}(n+1) \leq \alpha_j V_{hj}(n) + \omega^T(n)\omega(n),$$

$$\forall n \in [n_{qa}, n_{qb}], \forall h, j \in \Phi, h \neq j. \quad (25)$$

通过上述相同的步骤,若式(15)和(17)能够成立,则可分别得到

$$V_{gh}(n+1) \leq \beta_j V_{gh}(n) + \omega^T(n)\omega(n),$$

$$\forall n \in [n_q, n_{qa}], \forall g, h \in \Phi, g \neq h; \quad (26)$$

$$V_{hj}(n+1) \leq \alpha_j V_{hj}(n) + \omega^T(n)\omega(n),$$

$$\forall n \in [n_{qb}, n_{q+1}], \forall h, j \in \Phi, h \neq j. \quad (27)$$

在切换点  $n_{qa}$  处,  $q = 2, 3, \dots$ , 假设  $\sigma(n_{q-2}) = g, \sigma(n_{q-1}) = h, \sigma(n_q) = j, \forall g, h, j \in \Phi, g \neq h, h \neq j$ . 由式(21),有

$$\sum_{s=1}^S f_{hjs}(0) \mathcal{P}_{hjs} \leq$$

$$\lambda_{h,j} \sum_{s=1}^S f_{ghs}(n_{(q-1)b} - n_{(q-1)a}) \mathcal{P}_{ghs},$$

$$\forall g, h, j \in \Phi, g \neq h, h \neq j.$$

进一步得到

$$V_{hj}(n_{qa}) \leq \lambda_{h,j} V_{gh}(n_{qa}), \forall g, h, j \in \Phi, g \neq h, h \neq j.$$

当  $\forall n \in [n_q, n_{q+1}]$  时,由式(25)和(26),有

$$V_{\sigma(n_{q-1}),\sigma(n_q)}(n) \leq$$

$$\lambda_{\sigma(n_{q-1}),\sigma(n_q)} \alpha_{\sigma(n_q)}^{n-n_{qa}} \beta_{\sigma(n_q)}^{\Delta Q} V_{\sigma(n_{q-2}),\sigma(n_{q-1})}(n_q) +$$

$$\lambda_{\sigma(n_{q-1}),\sigma(n_q)} \alpha_{\sigma(n_q)}^{n-n_{qa}} \sum_{l=n_q}^{n_{qa}-1} \beta_{\sigma(n_q)}^{n_{qa}-1-l} \omega^T(l)\omega(l) +$$

$$\sum_{l=n_{qa}}^{n-1} \alpha_{n_q}^{n-1-l} \omega^T(l)\omega(l). \quad (28)$$

由式(28)继续迭代至  $n_0$ ,由定义1,进一步得到

$$V_{\sigma(n_{q-1}),\sigma(n_q)}(n) \leq$$

$$\beta_{\sigma(n_0)}^{-\Delta Q} e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} N_{h,j}^0 \ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})} \times$$

$$e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} (\frac{\ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})}{\tau_{h,j}^a} + \ln \alpha_j) T_{h,j}(n_0, n)} \times$$

$$V_{\sigma(n_2),\sigma(n_0)}(n_0) +$$

$$\sum_{r=1}^q \left\{ e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} N_{h,j}^0 (\ln \alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})} \times$$

$$e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} (\frac{\ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})}{\tau_{h,j}^a} + \ln \alpha_j) T_{h,j}(n_r, n)} \times$$

$$\left( \sum_{l=n_{(r-1)a}}^{n_r-1} \alpha_{\sigma(n_{r-1})}^{n_r-1-l} \omega^T(l)\omega(l) + \right.$$

$$\left. \beta_{\sigma(n_r)}^{-\Delta Q} \sum_{l=n_r}^{n_{ra}-1} \beta_{\sigma(n_r)}^{n_{ra}-1-l} \omega^T(l)\omega(l) \right) \Big\} +$$

$$\sum_{l=n_{qa}}^{n-1} \alpha_{\sigma(n_q)}^{n-1-l} \omega^T(l)\omega(l). \quad (29)$$

下面针对  $\omega(n)$  是否为0的2种情况展开论述.

1) 当  $\omega(n) = 0$  时,式(29)可简化为

$$V_{\sigma(n_{q-1}),\sigma(n_q)}(n) \leq$$

$$\beta_{\sigma(n_0)}^{-\Delta Q} e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} N_{h,j}^0 \ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})} \times$$

$$e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} (\frac{\ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})}{\tau_{h,j}^a} + \ln \alpha_j) T_{h,j}(n_0, n)} \times$$

$$V_{\sigma(n_2),\sigma(n_0)}(n_0).$$

由式(22),得到  $\ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j}) / \tau_{h,j}^a + \ln \alpha_j < 0$ . 因此,由定义3<sup>[16]</sup>,滤波误差系统(3)和(4)是全局一致指数稳定的.

2) 当  $\omega(n) \neq 0$  时,对于  $\forall h, j \in \Phi$ ,给出的系统参数  $0 < \alpha_j < 1, \beta_j > 1, \lambda_{h,j} > 1$ ,且满足  $\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j} > 1$ ,由式(22),得到

$$e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} N_{h,j}^0 (\ln \alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})} \geq 1,$$

$$0 < e^{\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} (\frac{\ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})}{\tau_{h,j}^a} + \ln \alpha_j) T_{h,j}(n_r, n)} \leq 1.$$

在0初始条件下,由式(29),可知

$$V_{\sigma(n_{q-1}),\sigma(n_q)}(n) \leq \delta^{-1} \sum_{l=n_0}^{n-1} \omega^T(l)\omega(l), \quad (30)$$

其中  $\delta = e^{-\sum_{j \in \Phi} \sum_{h \in \Phi, h \neq j} \ln(\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j})}$ .

当  $n \in [n_{qa}, n_{qb}]$  时,由式(19),得到

$$\bar{C}_j^T \bar{C}_j - \gamma^2 \delta \mathcal{P}_{hjs} < 0. \quad (31)$$

结合式(30)和(31),有

$$e^T(n)e(n) - \gamma^2 \sum_{l=n_0}^{n-1} \omega^T(l)\omega(l) \leq$$

$$\bar{x}^T(n)(\bar{C}_j^T \bar{C}_j - \gamma^2 \delta \mathcal{P}_{hjs}) \bar{x}(n) < 0. \quad (32)$$

当  $n \in [n_q, n_{qa}]$  和  $n \in [n_{qb}, n_{q+1}]$  时,若式(18)和(20)能够分别成立,则能够得到与式(32)相同的证明结果. 综上所述,在0初始条件下,对于任意的  $\omega(n) \in l_2[0, \infty)$  可证出  $\|e\|_\infty < \gamma \|\omega\|_2$ .  $\square$

### 2.3 $l_2$ - $l_\infty$ 滤波器设计

基于定理1的分析,本节将会运用转移依赖凸 Lyapunov 函数和 AED-IDT 切换技术为系统(1)设计异步  $l_2$ - $l_\infty$  滤波器,并给出滤波器增益的求解方法.

**推论1** 对于  $\forall g, h, j \in \Phi, g \neq h, h \neq j$ ,考虑滤波误差系统(3)和(4). 给定标量  $0 < \alpha_j < 1, \beta_j > 1, \lambda_{h,j} > 1$ ,且满足  $\alpha_j^{-\Delta Q} \beta_j^{\Delta Q} \lambda_{h,j} > 1$ ,假设存在矩阵正定  $P_{ghs}^1, P_{ghs}^2, P_{ghs}^4, P_{hjs}^1, P_{hjs}^2, P_{hjs}^4$  以及矩阵  $\tilde{M}_{gh}^1, \tilde{M}_{hj}^1, M, A_j^F, B_j^F, C_j^F (\forall s \in \mathcal{S})$ ,使得

$$\begin{bmatrix} -\beta_j \sum_{s=1}^S d_{ghs} P_{ghs}^1 & * & * & * & * \\ -\beta_j \sum_{s=1}^S d_{ghs} P_{ghs}^2 & \Xi_{22}^1 & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * \\ \tilde{M}_{gh}^1 A_j & 0 & \tilde{M}_{gh}^1 B_j & \Xi_{44}^1 & * \\ B_h^F C_j & A_h^F & B_h^F D_j & \Xi_{54}^1 & \Xi_{55}^1 \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_j P_{hjs}^1 & * & * & * & * \\ -\alpha_j P_{hjs}^2 & -\alpha_j P_{hjs}^4 & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * \\ \bar{M}_{hj}^1 A_j & 0 & \bar{M}_{hj}^1 B_j & \Xi_{44}^2 & * \\ B_j^F C_j & A_j^F & B_j^F D_j & \Xi_{54}^2 & \Xi_{55}^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_j \sum_{s=1}^S d_{hjs} P_{hjs}^1 & * & * & * & * \\ -\alpha_j \sum_{s=1}^S d_{hjs} P_{hjs}^2 & \Xi_{22}^3 & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * \\ \bar{M}_{hj}^1 A_j & 0 & \bar{M}_{hj}^1 B_j & \Xi_{44}^3 & * \\ B_j^F C_j & A_j^F & B_j^F D_j & \Xi_{54}^3 & \Xi_{55}^3 \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{ghs} P_{ghs}^1 & * & * \\ -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{ghs} P_{ghs}^2 & -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{ghs} P_{ghs}^4 & * \\ G_j & -C_h^F & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \delta P_{hjs}^1 & * & * \\ -\gamma^2 \delta P_{hjs}^2 & -\gamma^2 \delta P_{hjs}^4 & * \\ G_j & -C_j^F & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{hjs} P_{hjs}^1 & * & * \\ -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{hjs} P_{hjs}^2 & -\gamma^2 \delta \sum_{s=1}^S d_{hjs} P_{hjs}^4 & * \\ G_j & -C_j^F & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

$$\sum_{s=1}^S c_{hjs} P_{hjs} \leq \lambda_{h,j} \sum_{s=1}^S d_{ghs} P_{ghs} \quad (39)$$

成立. 其中

$$\begin{aligned} \Xi_{22}^1 &= -\beta_j \sum_{s=1}^S d_{ghs} P_{ghs}^4, \\ \Xi_{54}^1 &= \sum_{s=1}^S (d_{ghs} + \varphi_{ghs}) P_{ghs}^2, \\ \Xi_{44}^1 &= \sum_{s=1}^S (d_{ghs} + \varphi_{ghs}) P_{ghs}^1 - \text{Sym}(\tilde{M}_{gh}^1), \end{aligned}$$

$$\Xi_{55}^1 = \sum_{s=1}^S (d_{ghs} + \varphi_{ghs}) P_{ghs}^4 - \text{Sym}(M),$$

$$\Xi_{44}^2 = P_{hjs}^1 + \sum_{z=1}^S \varphi_{hjs} P_{hjs}^1 - \text{Sym}(\bar{M}_{hj}^1),$$

$$\Xi_{54}^2 = P_{hjs}^2 + \sum_{z=1}^S \varphi_{hjs} P_{hjs}^2,$$

$$\Xi_{55}^2 = P_{hjs}^4 + \sum_{z=1}^S \varphi_{hjs} P_{hjs}^4 - \text{Sym}(M),$$

$$\Xi_{22}^3 = -\alpha_j \sum_{s=1}^S d_{hjs} P_{hjs}^4,$$

$$\Xi_{54}^3 = \sum_{s=1}^S (d_{hjs} + \varphi_{hjs}) P_{hjs}^2,$$

$$\Xi_{44}^3 = \sum_{s=1}^S (d_{hjs} + \varphi_{hjs}) P_{hjs}^1 - \text{Sym}(\bar{M}_{hj}^1),$$

$$\Xi_{55}^3 = \sum_{s=1}^S (d_{hjs} + \varphi_{hjs}) P_{hjs}^4 - \text{Sym}(M).$$

则当AED-IDT切换信号满足条件(22)时,会存在一个形如式(2)的滤波器使得相应的滤波误差系统(3)和(4)是全局一致指数稳定的,且具有 $l_2$ - $l_\infty$ 性能指标 $\gamma$ . 与此同时,得到的滤波参数为

$$A_j^f = M^{-1} A_j^F, B_j^f = M^{-1} B_j^F, C_j^f = C_j^F.$$

**证明** 对于滤波误差系统(3)和(4),假设定理1中的矩阵存在如下形式:

$$P_{ghs} = \begin{bmatrix} P_{ghs}^1 & P_{ghs}^2 \\ P_{ghs}^2 & P_{ghs}^4 \end{bmatrix}, \mathcal{M}_{gh} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{gh}^1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

$$P_{hjs} = \begin{bmatrix} P_{hjs}^1 & P_{hjs}^2 \\ P_{hjs}^2 & P_{hjs}^4 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{M}}_{hj} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{hj}^1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}.$$

令 $MA_j^f = A_j^F, MB_j^f = B_j^F, C_j^f = C_j^F$ ,则式(33)~(39)等价于式(15)~(21),其中矩阵变量 $P_{ghs}^1, P_{ghs}^2, P_{ghs}^4, P_{hjs}^1, P_{hjs}^2, P_{hjs}^4, \tilde{M}_{gh}^1, \bar{M}_{hj}^1, M$ 被设计为合适维度的矩阵. 由此可知,滤波误差系统(3)和(4)是全局一致指数稳定的,且具有 $l_2$ - $l_\infty$ 性能指标 $\gamma$ .  $\square$

### 2.4 仿真结果

给出一个数值实例和一个实际例子来验证所提出滤波器设计方法的有效性.

**例1** 考虑切换系统(1)包含3个子系统,有

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.31 \\ 0.16 & -0.32 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix}, C_1 = [-0.2 \quad 0.2],$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.54 & -0.22 \\ 0.32 & -0.51 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}, C_2 = [0.4 \quad 0.15],$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.35 & -0.48 \\ -0.32 & 0.22 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = [-0.1 \quad 0.15], G_1 = [0.17 \quad 0.2], D_1 = 0.4,$$

$$G_2 = [0.15 \quad -0.1], D_2 = -0.3, G_3 = [-0.1 \quad 0.15],$$

$$D_3 = -0.3.$$

离散切换系统的异步  $l_2-l_\infty$  滤波文献相对较少, 因此, 选择文献 [16] 定理 3 中同步  $l_2-l_\infty$  滤波的结果与本文的推论 1 进行对比. 表 1 为系统相关参数以及在多 Lyapunov 函数和转移依赖凸 Lyapunov 函数下驻留时间的对比结果. 每个子系统与滤波器间的最大延迟时间  $\Delta_Q = 2$ . 目标是设计出一组滤波器, 同时找到 AED-IDT 切换信号使得相应的滤波误差系统是稳定的, 且具有  $l_2-l_\infty$  性能. 通过使用 Matlab 中的线性矩阵不等式工具箱求解式 (33)~(39), 得到滤波器参数

$$A_1^f = \begin{bmatrix} 0.0022 & -0.0375 \\ 0.0253 & -0.0593 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A_2^f &= \begin{bmatrix} 0.0278 & -0.0190 \\ 0.0251 & -0.0244 \end{bmatrix}, \\ A_3^f &= \begin{bmatrix} 0.0211 & -0.0165 \\ 0.0095 & -0.0080 \end{bmatrix}, \\ B_1^f &= [-0.0010 \quad -0.0088]^T, \\ B_2^f &= [-0.0035 \quad -0.0153]^T, \\ B_3^f &= [0.0040 \quad -0.0161]^T, \\ C_1^f &= [-0.0056 \quad -0.0209], \\ C_2^f &= [-0.0462 \quad -0.0544], \\ C_3^f &= [-0.0468 \quad -0.0537]. \end{aligned}$$

表 1 在 AED-ADT 和 AED-IDT 下的计算结果, 且  $\gamma = 0.2723$

稳定性分析工具	多 Lyapunov 函数 <sup>[16]</sup>	转移依赖凸 Lyapunov 函数
准则	定理 3	推论 1
参数	$\lambda_{2,1} = 12.4, \lambda_{3,1} = 12.3, \lambda_{1,2} = 13.5$ $\lambda_{3,2} = 12.8, \lambda_{1,3} = 12.5, \lambda_{2,3} = 12.7$ $\alpha_1 = 0.43, \alpha_2 = 0.46, \alpha_3 = 0.45$	$\lambda_{2,1} = 1.23, \lambda_{3,1} = 1.22, \lambda_{1,2} = 1.20$ $\lambda_{3,2} = 1.19, \lambda_{1,3} = 1.13, \lambda_{2,3} = 1.11$ $\alpha_1 = 0.89, \alpha_2 = 0.86, \alpha_3 = 0.91$ $\beta_1 = 1.01, \beta_2 = 1.04, \beta_3 = 1.03$
切换信号	$\tau_{2,1}^{a*} = 4.4789, \tau_{3,1}^{a*} = 4.4645, \tau_{1,2}^{a*} = 4.2239$ $\tau_{3,2}^{a*} = 4.1375, \tau_{1,3}^{a*} = 4.2248, \tau_{2,3}^{a*} = 4.2513$	$\tau_{2,1}^{a*} = 3.9472, \tau_{3,1}^{a*} = 3.8722, \tau_{1,2}^{a*} = 3.7289$ $\tau_{3,2}^{a*} = 3.6735, \tau_{1,3}^{a*} = 3.9227, \tau_{2,3}^{a*} = 3.7334$

给定系统初始条件为  $x(0) = [-0.3 \quad 0.4]^T$ , 同时规定子系统按照  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$  周期切换. 当所提出 AED-IDT 切换策略选取  $\tau_{2,1}^a = 4, \tau_{1,3}^a = 4, \tau_{3,2}^a = 4$ , AED-ADT<sup>[16]</sup> 切换策略选取  $\tau_{2,1}^a = 5, \tau_{1,3}^a = 5, \tau_{3,2}^a = 5$  时, 图 2~图 4 为  $x(n)$  和  $x_f(n)$ 、同步和异步切换信号  $\sigma(n)$ 、 $z(n)$  和  $z_f(n)$  的对比仿真, 以及所提出方法的滤波误差  $e(n)$  效果.

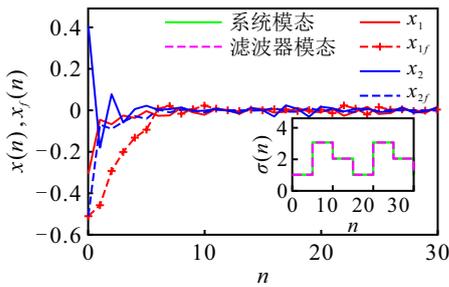


图 2 多 Lyapunov 函数<sup>[16]</sup>下的  $x(n)$  和  $x_f(n)$

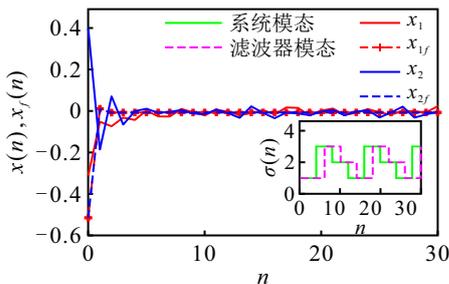


图 3 转移依赖凸 Lyapunov 函数下的  $x(n)$  和  $x_f(n)$

相比于多 Lyapunov 函数方法, 通过观察图 2~图 4, 在转移依赖凸 Lyapunov 函数方法下, 不难发现不

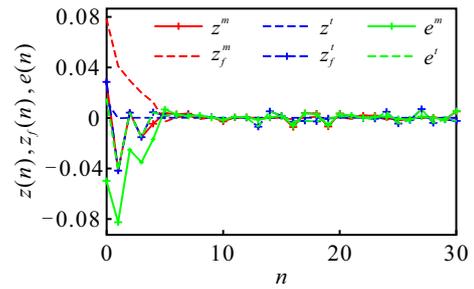


图 4 多 Lyapunov 函数<sup>[16]</sup>下  $z^m(n), z_f^m(n), e^m(n)$  和转移依赖凸 Lyapunov 函数下  $z^t(n), z_f^t(n), e^t(n)$

管是系统的状态响应  $x(n)$ , 还是滤波器的状态响应  $x_f(n)$  均实现了较小的超调, 同时还能够快速实现稳定. 此外, 所提出转移依赖凸 Lyapunov 函数能够保证系统具有比较小的驻留时间下界. 因此, 即使所提出方法应用于系统与滤波器存在异步切换, 文献 [16] 仅考虑同步的情况, 转移依赖凸 Lyapunov 函数仍然能够保证系统得到更紧的驻留时间界和更快的收敛速度, 进一步放松了多 Lyapunov 函数在分析和设计方面的限制, 如图 3 所示.

例 2 本文选用文献 [18] 中的切换 RLC 应用电路, 该电路系统模型可进一步表示为

$$\dot{x}(n) = \mathcal{A}_{\sigma(n)} x(n). \quad (40)$$

其中:  $x(n) = [q_c \quad \phi_L \quad 1]^T, \sigma(n)$  可取  $\{1, 2, 3\}$ ,

$$\mathcal{A}_{\sigma(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L & 0 \\ -1/C_{\sigma(n)} & -R/L & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

为了更合理地使用所提出滤波方法, 首先运用某种控

制规则使得系统(40)的每个模态均是稳定的,进而得到一个闭环连续时间切换系统

$$\dot{x}(n) = \bar{\mathcal{A}}_{\sigma(n)}x(n), \sigma(n) = \{1, 2, 3\}. \quad (41)$$

利用归一化等技术<sup>[18]</sup>,系统(40)的每个矩阵可设置为

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对于系统(40),分别给出控制矩阵和一组控制器增益

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= [0.1 \ 0.3 \ 0.2]^T, \mathcal{B}_2 = [0.1 \ 0.2 \ 0.2]^T, \\ \mathcal{B}_3 &= [0.3 \ 0.2 \ 0.5]^T, \\ \mathcal{K}_1 &= [-2.53 \ -2.87 \ -1.52], \\ \mathcal{K}_2 &= [-1.22 \ -1.61 \ -1.17], \\ \mathcal{K}_3 &= [-1.41 \ -1.32 \ -2.32]. \end{aligned}$$

考虑扰动 $\omega(n) = 0.5 \times \sin(2n + 1)/(n^2 + 1)$ 和设置采样时间 $T_s = 0.5$ ,可进一步得到

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.7798 & 0.2098 & -0.0307 \\ -0.5225 & 0.2908 & 0.1743 \\ -0.1255 & -0.1904 & 0.8364 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.8418 & 0.2848 & 0.0087 \\ -0.4344 & 0.4139 & 0.2624 \\ -0.0693 & -0.1236 & 0.8670 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.7741 & 0.2292 & -0.2040 \\ -0.4404 & 0.4392 & 0.2103 \\ -0.1667 & -0.2071 & 0.5641 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

假设式(1)中的其他矩阵为

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [-0.8 \ 0.2 \ -0.1], C_2 = [0 \ 0.3 \ 0.5], \\ C_3 &= [-0.2 \ 0.1 \ -0.3], G_1 = [0.4 \ 0.2 \ 0.3], \\ G_2 &= [0.2 \ -0.1 \ 0.2], G_3 = [-0.1 \ 0.3 \ -0.2], \\ D_1 &= 0.4, D_2 = -0.3, D_3 = -0.2. \end{aligned}$$

每个子系统与滤波器间的最大延迟时间 $\Delta_Q = 2$ .基于转移依赖凸Lyapunov函数方法,采用推论1,求得的 $l_2$ - $l_\infty$ 性能指标 $\gamma = 0.5812$ .表2为相关参数和对应的AED-IDT计算结果.

表2 在AED-IDT切换下的结果,且 $\gamma = 0.5812$

稳定性分析工具	转移依赖凸Lyapunov函数
准则	推论1
参数	$\lambda_{2,1} = 1.01, \lambda_{3,1} = 1.02, \lambda_{1,2} = 1.05$ $\lambda_{3,2} = 1.06, \lambda_{1,3} = 1.03, \lambda_{2,3} = 1.04$ $\alpha_1 = 0.95, \alpha_2 = 0.93, \alpha_3 = 0.91$ $\beta_1 = 1.06, \beta_2 = 1.08, \beta_3 = 1.12$
切换信号	$\tau_{2,1}^{a*} = 4.4660, \tau_{3,1}^{a*} = 4.6581$ $\tau_{1,2}^{a*} = 4.7933, \tau_{3,2}^{a*} = 4.9239$ $\tau_{1,3}^{a*} = 4.7167, \tau_{2,3}^{a*} = 4.8192$

通过求解式(33)~(39),得到相应的滤波器参数

$$\begin{aligned} A_1^f &= \begin{bmatrix} -0.0370 & 0.0226 & 0.0070 \\ -0.0238 & 0.0218 & 0.0135 \\ 0.0025 & -0.0108 & -0.0286 \end{bmatrix}, \\ B_1^f &= \begin{bmatrix} 0.0045 \\ -0.0014 \\ -0.0030 \end{bmatrix}, \\ A_2^f &= \begin{bmatrix} 0.0140 & 0.0007 & -0.0048 \\ -0.0126 & 0.0116 & 0.0015 \\ -0.0039 & -0.0026 & -0.0053 \end{bmatrix}, \\ B_2^f &= \begin{bmatrix} -0.0090 \\ -0.0009 \\ -0.0056 \end{bmatrix}, \\ A_3^f &= \begin{bmatrix} 0.0050 & 0.0028 & 0.0002 \\ -0.0040 & 0.0110 & 0.0030 \\ -0.0001 & -0.0005 & 0.0033 \end{bmatrix}, \\ B_3^f &= \begin{bmatrix} 0.0045 \\ -0.0064 \\ -0.0071 \end{bmatrix}, \\ C_1^f &= [-0.0220 \ -0.0148 \ -0.0070], \\ C_2^f &= [-0.0305 \ -0.0162 \ -0.0019], \\ C_3^f &= [0.0118 \ -0.0687 \ 0.0131]. \end{aligned}$$

设置系统的初始条件 $x(0) = [-0.4 \ 0.3 \ -0.2]^T$ ,且子系统间的切换顺序参考例1.由表2中的结果,当 $\tau_{2,1}^a = 5, \tau_{1,3}^a = 5, \tau_{3,2}^a = 5$ 时,异步切换下的系统状态响应 $x(n)$ 以及与其对应的 $z(n)$ 、 $z_f(n)$ 、 $e(n)$ 和切换信号 $\sigma(n)$ 如图5所示.由图5可见,通过设计滤波器,即使滤波器模态切换滞后于系统模态切换,滤波误差系统仍然具有 $l_2$ - $l_\infty$ 性能.

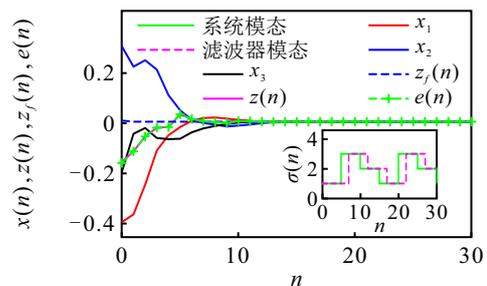


图5  $x(n)$ 、 $z(n)$ 、 $z_f(n)$ 、 $e(n)$ 和 $\sigma(n)$

### 3 结论

本文采用新设计的异步转移依赖凸Lyapunov函数和AED-IDT切换策略,研究了一类具有异步切换行为离散时间切换系统的 $l_2$ - $l_\infty$ 滤波问题.根据当前激活的滤波器模态和相邻运行结束的滤波器模态,设计出一个新型的Lyapunov函数.基于所提出Lyapunov函数得到的滤波器设计方法可根据切换情况给滤波器模态安排不只一个Lyapunov函数,增加了设计灵活性.此外,转移依赖凸Lyapunov函数是一个时变凸函数,提升了设计自由度,进一步减小了所得结果的保守性.需要注意的是,凸结构同时带来一

定的计算复杂度,要适当选取凸参数. 基于所得滤波误差系统的性能分析结果,给出计算滤波器增益的方法. 最后,通过一个切换 RLC 电路验证了所得结果的有效性.

#### 参考文献(References)

- [1] Wang R H, Zong G D, Shen H, et al. A new  $l_2$ -gain analysis framework for discrete-time switched systems based on predictive Lyapunov function[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(1): 101-125.
- [2] Hu S Y, Wang R H, Jiao T C, et al. Output-based optimal  $L_1$ -gain control of weighted edge-dependent switching positive systems by a new copositive Lyapunov function[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2022, 46: 101260.
- [3] 杨柳, 费中阳, 史爽, 等. 基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(10): 2467-2474.  
(Yang L, Fei Z Y, Shi S, et al. The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger[J]. Control and Decision, 2021, 36(10): 2467-2474.)
- [4] 孙丽颖, 林永鑫. 基于切换系统的独立微电网稳定控制设计[J]. 控制工程, DOI: 10.14107/j.cnki.kzgc.20210448.  
(Sun L Y, Lin Y X. Stability control design of isolated microgrid based on switched system[J]. Control Engineering of China, DOI: 10.14107/j.cnki.kzgc.20210448.)
- [5] Zhao Y, Zhao J, Fu J, et al. Rate bumpless transfer control for switched linear systems with stability and its application to aero-engine control design[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(6): 4900-4910.
- [6] 王思尹, 粟时平, 王海明, 等. 基于切换系统理论的终端能量路由器能量路由控制方法研究[J]. 电力系统保护与控制, 2022, 50(15): 81-90.  
(Wang S Y, Su S P, Wang H M, et al. An energy routing control method for a terminal energy router based on switching system theory[J]. Power System Protection and Control, 2022, 50(15): 81-90.)
- [7] 王佳伟, 崔一鸣, 王振华, 等. 切换系统  $H_2/H_\infty$  异步切换故障检测滤波器设计[J]. 控制与决策, 2017, 32(2): 223-231.  
(Wang J W, Cui Y M, Wang Z H, et al.  $H_2/H_\infty$  asynchronous fault detection filter design for switched systems[J]. Control and Decision, 2017, 32(2): 223-231.)
- [8] 郝现志, 黄金杰, 潘晓真. 离散切换线性系统的异步滤波器设计[J]. 控制与决策, 2022, 37(7): 1785-1793.  
(Hao X Z, Huang J J, Pan X Z. Asynchronous filter design for discrete-time switched linear systems[J]. Control and Decision, 2022, 37(7): 1785-1793.)
- [9] 张霄力, 刘玉忠, 赵军. 一类离散切换系统的渐近稳定性[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(5): 774-776.  
(Zhang X L, Liu Y Z, Zhao J. Asymptotic stability of a class of discrete switched systems[J]. Control Theory & Applications, 2002, 19(5): 774-776.)
- [10] 张霞, 高岩, 夏尊铨. 切换线性系统稳定性研究进展[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1441-1450.  
(Zhang X, Gao Y, Xia Z Q. Advances on stability for switched linear systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1441-1450.)
- [11] Wang R H, Jiao T C, Zhang T, et al. Improved stability results for discrete-time switched systems: A multiple piecewise convex Lyapunov function approach[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 353: 54-65.
- [12] 李艳辉, 柳桐. 具有分布时滞和随机测量数据丢失的离散切换系统  $H_\infty$  滤波[J]. 控制与决策, 2017, 32(8): 1486-1492.  
(Li Y H, Liu T.  $H_\infty$  filtering for discrete switched systems with distributed delays and random measurement data missing[J]. Control and Decision, 2017, 32(8): 1486-1492.)
- [13] Sang H, Nie H, Zhao J. Dwell-time-dependent asynchronous  $H_\infty$  filtering for discrete-time switched systems with missing measurements[J]. Signal Processing, 2018, 151: 56-65.
- [14] Yuan S, Zhang L X, de Schutter B, et al. A novel Lyapunov function for a non-weighted  $L_2$  gain of asynchronously switched linear systems[J]. Automatica, 2018, 87: 310-317.
- [15] Yang J Q, Zhao X D, Bu X H, et al. Stabilization of switched linear systems via admissible edge-dependent switching signals[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2018, 29: 100-109.
- [16] Hou L L, Zhao X D, Sun H B, et al.  $l_2$ - $l_\infty$  filtering of discrete-time switched systems via admissible edge-dependent switching signals[J]. Systems & Control Letters, 2018, 113: 17-26.
- [17] de Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition[J]. Systems & Control Letters, 1999, 37(4): 261-265.
- [18] Zhao Y, Zhao J. Event-triggered bumpless transfer control for switched systems with its application to switched RLC circuits[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 98(3): 1615-1628.

#### 作者简介

王瑞华(1985—), 女, 副教授, 博士, 从事混杂系统、云控制系统、信息物理融合系统等研究, E-mail: 123.wrh@163.com;

李福鹏(1995—), 男, 硕士生, 从事切换系统的研究, E-mail: LFP\_123@163.com;

胡硕洋(1996—), 男, 硕士生, 从事切换系统、正系统等研究, E-mail: hsy\_923@163.com;

费树珉(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、时变系统等研究, E-mail: smfei@seu.edu.cn.