



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

# 控制与决策

CONTROL AND DECISION



## 基于优先使用权的温贮备可修重试系统可靠性与期望成本模型

康佳, 胡林敏, 王妍

引用本文:

康佳, 胡林敏, 王妍. 基于优先使用权的温贮备可修重试系统可靠性与期望成本模型[J]. 控制与决策, 2024, 39(4): 1351–1360.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1212>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型

Multi-component system state space partition model based on Markov process

控制与决策. 2021, 36(2): 418–428 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0480>

#### 两部件系统视情维修与生产调度的联合优化模型

Joint optimization model for condition-based maintenance and production scheduling of two-component systems

控制与决策. 2021, 36(6): 1377–1386 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1357>

#### 基于随机系数回归模型的退化过程及维修策略

Degradation process and maintenance planning based on random coefficient regression model

控制与决策. 2021, 36(3): 754–760 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1087>

#### 事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 $H_\infty$ 故障检测

Event-triggered  $H_\infty$  fault detection for networked control systems with distributed delays

控制与决策. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

#### 双层多态加权 $k/n$ 系统可用性模型与冗余设计优化

Availability modeling and redundancy design optimization of dual hierarchical multi-state weighted  $k/n$  system

控制与决策. 2020, 35(11): 2752–2760 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1752>

# 基于优先使用权的温贮备可修重试系统可靠性与期望成本模型

康佳, 胡林敏<sup>†</sup>, 王妍

(燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 针对具有两种不同类型部件的温贮备可修系统, 基于优先使用权规则, 将部件的重试特性和不可靠修理设备引入系统, 建立一种新的系统可靠性和成本模型. 失效部件由一个不可靠修理设备维修, 当正常的修理设备维修失效部件时会发生不完全故障, 此时, 它或以一定的概率立即被维修, 或以一定的概率继续低效维修失效部件. 在不完全故障下, 修理设备有可能发生完全性故障, 完全性故障后会立即被维修. 鉴于维修环境的随机波动性, 利用PH分布对修理设备的修理时间进行建模, 这在一定程度上拓展了模型的适用性. 通过概率讨论得到稳态下系统的一些主要性能指标, 构建单位时间的总期望成本函数, 并就总期望成本关于各参数的敏感性进行分析. 通过数值实例展示系统参数对系统稳态性能指标和系统成本的影响, 为系统可靠性设计者和决策者提供理论支撑和参考.

**关键词:** 重试; 不可靠修理设备; PH分布; 稳态指标; 期望成本

中图分类号: TH17; O213

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1212

引用格式: 康佳, 胡林敏, 王妍. 基于优先使用权的温贮备可修重试系统可靠性与期望成本模型[J]. 控制与决策, 2024, 39(4): 1351-1360.

## Reliability and expected cost model of warm standby repairable retrial system with priority in use

KANG Jia, HU Lin-min<sup>†</sup>, WANG Yan

(School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract:** For the warm standby repairable system with two types of components, this paper introduces the retrial characteristics of components and unreliable repair facility into the system, and establishes a new system reliability and cost model based on the priority in use rule. Failed components are repaired by an unreliable repair facility. The repair facility may partially breakdown in normal busy state, then it can be immediately repaired with a certain probability or continue to provide service for failed components at a lower efficiency with a certain probability. The repair facility may occur completely breakdown during partially breakdown idle or busy state, and it will be immediately repaired after completely breakdown. Due to the random volatility of the maintenance environment, the PH distribution is used to model the repair time of failed components, which extends the applicability of the model to a certain extent. Some system steady-state performance indices are obtained by probability discussion, the expected total cost function per unit time of system is constructed, and the sensitivity of the expected total cost to each parameter is analyzed. The effect of various parameters on the steady-state performance indices and cost of the system is demonstrated by numerical results, which provides theoretical support and reference for system reliability designers and decision makers.

**Keywords:** retrial; unreliable repair facility; PH distribution; steady-state indices; expected cost

## 0 引言

备用冗余技术是提高系统可靠性的常用方法, 根据贮备部件的故障特征, 可分为冷贮备、温贮备和

热贮备3种备用冗余. 温贮备可修系统可靠性模型是系统可靠性研究的一类重要模型. 温贮备是指贮备部件在贮备状态下可能会发生失效, 且失效率低于工

收稿日期: 2022-07-08; 录用日期: 2022-12-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(72071175).

责任编委: 张维海.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: linminhu@ysu.edu.cn.

\*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

作部件的失效率. 当工作部件发生失效时, 处于完好状态的温贮备部件会接替工作. 由于温贮备系统在工程实际问题中具有广泛的应用, 很多研究者针对不同背景下的温贮备系统可靠性模型进行了研究. She等<sup>[1]</sup>对具有相同部件的  $k$ -out-of- $n$ :G 温贮备系统进行了可靠性分析. Zhang等<sup>[2]</sup>研究了由两类不同部件组成的  $3/4$ :G 温贮备可修系统. Zhang等<sup>[3]</sup>将文献[2]的研究拓展到一般的  $k/(m+n)$ :G 温贮备可修系统模型, 并通过马尔可夫过程理论对系统进行了可靠性分析. Amari等<sup>[4]</sup>研究了具有相同部件的  $k/n$ :G 温贮备系统的可靠性指标. 尹东亮等<sup>[5]</sup>构建了具有维修优先权的多状态温贮备系统可靠性模型, 得到了系统的可靠性指标. 尹东亮等<sup>[6]</sup>将多维修台异步多重休假策略引入温贮备可修系统, 对系统进行了可靠性分析. 左凯等<sup>[7]</sup>研究了具有多重休假策略的  $k/n$  温贮备系统, 其中修理设备发生故障后可进行更换.

在可修系统可靠性研究中, 通常假定修理设备完全可靠, 但是, 一些实际情况并非如此, 因此, 研究修理设备可能发生故障的可修系统可靠性具有重要的现实意义. Chakravarthy等<sup>[8]</sup>和 Jain等<sup>[9]</sup>考虑了具有一个不可靠服务台(修理设备)的机器维修系统. Wang等<sup>[10]</sup>和 Ke等<sup>[11]</sup>考虑了具有多个不可靠服务台(修理设备)的机器维修系统, 分析了系统的可靠性指标. 文献[12]研究了修理设备可修的单部件可修系统. 文献[13]对修理设备和开关不完全可靠的温贮备可修系统进行了可靠性分析. 这些均是假定修理设备只有正常和故障两种模式, 修理设备发生故障, 立即维修. 在一些工程系统中存在故障修理设备不是完全停止工作而是继续以低修复率维修失效部件的情形, 称为修理设备工作故障. 修理设备的工作故障是指修理设备有高修复率(正常工作)和低修复率(不完全故障工作)两种工作效率情形, 这种考虑可变修复效率的系统模型设计更符合一些系统的实际情况. 在多重休假和工作故障策略下, Liou<sup>[14]</sup>对具有温贮备部件的机器维修问题进行了研究, 建立并求解了系统总期望利润的优化问题. Yen等<sup>[15]</sup>对具有温贮备部件和工作故障的可控机器维修问题进行了可靠性和敏感性分析. Chen<sup>[16]</sup>研究了具有工作故障、阈值恢复策略和温贮备部件的重试机器维修系统, 得到了系统可用度和首次故障前平均时间. Jain等<sup>[17]</sup>分析了具有工作休假、工作故障和温贮备部件的机器维修系统的瞬态性能指标. Kumar等<sup>[18]</sup>研究了具有不完全覆盖、重启、工作故障、休假的机器维修系统的可靠性指标和排队指标. 在 Bernoulli 控制策略下, Yang

等<sup>[19]</sup>构建了一个具有多重休假、工作故障和贮备转换失效的可修系统模型, 并对其进行了可靠性分析.

重试排队模型是在排队论发展过程中形成的一类特殊排队模型, 与经典的排队模型不同之处是加入了重试规则. 重试排队是指当顾客到达系统后发现服务台正在忙, 顾客必须离开服务区域进入一个重试队列等待, 一段时间后重新尝试得到服务, 直至重试成功. 具有重试特征的排队现象具有一定的现实意义, 在日常生活中普遍存在, 广泛应用于电话交换系统、通信系统和计算机网络等领域. Krishnamoorthy等<sup>[20]</sup>首先将部件重试特性引入  $k/n$  可修系统, 分析了3种不同的可修重试系统模型的可靠性指标. Ke等<sup>[21]</sup>对具有温贮备部件的可修重试系统进行了研究, 运用补充变量法得到了系统的稳态概率, 并建立了一种求解系统稳态可用度的有效算法. Kuo等<sup>[22]</sup>对具有混合贮备部件的可修重试系统进行了可靠性和敏感性分析, 并通过数值实例比较分析了系统有无重试的成本效益比. Yang等<sup>[23]</sup>分析了具有工作休假的温贮备可修重试系统的可靠性指标. Hu等<sup>[24]</sup>对部件具有重试特性和两类失效模式的可修系统进行了可靠性和敏感性分析. Gao等<sup>[25]</sup>对具有混合贮备部件和不可靠修理设备的可修重试系统进行了建模和可靠性分析, 并对系统成本效益比进行了优化分析. Chen等<sup>[26]</sup>和 Wang等<sup>[27]</sup>研究了具有N策略和工作故障的重试机器维修问题. Yen等<sup>[28-29]</sup>研究了具有F策略和工作故障的重试机器维修问题.

在具有恒定失效率或修复率的可修系统可靠性建模和分析中, 指数分布发挥着重要的作用. 但是, 对于一般系统而言, 指数分布存在一定的局限性, 在一定程度上降低了模型的实际应用价值. PH分布作为指数分布的一种推广, 保留了指数分布易于处理的特点, 具有更好的适用性, 可满足复杂系统模型的需要. 关于PH分布的相关理论见文献[30]. 由于PH分布的优良特性, PH分布被广泛用于描述失效时间、维修时间等随机变量. Neuts等<sup>[31]</sup>采用PH分布对温贮备系统的工作时间和维修时间进行了建模. Chakravarthy等<sup>[32]</sup>基于故障部件的维修时间服从PH分布的假设, 研究了具有  $(N, T)$  策略的  $k/n$  可靠性系统. Barron等<sup>[33]</sup>分析了具有多个修理工的  $r/n$  系统, 其中维修时间服从位相分布. Liu等<sup>[34]</sup>利用位相分布对具有多重休假策略的冷贮备冗余系统进行了建模, 得到了系统的一些瞬态和稳态性能指标.

不同类型部件具有不同的可靠性特征, 可执行不同的任务. 如由不同功率灯泡组成的照明系统, 由不

同类型输油泵站组成的输油管道系统. 部件在运行过程中发生失效, 需要修理设备对其进行修理, 而修理设备在实际情形中不一定是完全可靠的, 可能会发生不完全故障, 继续以较低维修率修理失效部件, 也可能发生完全性故障, 停止维修失效部件. 重试可修系统的可靠性分析吸引了一些学者的关注, 针对温贮备可修重试系统可靠性建模和评估问题, 对于部件类型不同且修理设备不可靠的情形, 还未进行深入研究.

基于可修重试系统可靠性的研究现状和应用背景, 本文旨在构建具有不同类型部件且修理设备不可靠的可修重试系统可靠性和成本模型, 考虑部件的使用优先权. 本文的内容如下: 1) 针对具有两种不同类型部件的温贮备可修系统, 引入部件的重试特性和不可靠修理设备, 构建一类新型系统可靠性和成本模型. 2) 基于维修环境的随机波动性, 提出PH型维修时间模型, 拓宽模型的潜在适用性.

## 1 系统模型

### 1.1 模型描述

本文所研究的系统模型是由  $M$  个类型 1 部件和  $N$  个类型 2 部件构成的,  $M \geq N$ , 其中类型 1 部件有优先使用权. 所有部件具有 3 种状态: 工作、贮备和失效. 失效部件由一个不可靠的修理设备进行维修且具有重试特性. 当系统中至少有  $N$  个部件正常时系统处于工作状态. 系统故障后, 未失效的部件会继续发生失效. 系统参数解释具体如下.

$M$ : 类型 1 部件的数量;

$N$ : 类型 2 部件的数量;

$\lambda_1$ : 工作的类型 1 部件失效率;

$\lambda_2$ : 正常工作的类型 2 部件失效率;

$\lambda'_1$ : 温贮备的类型 1 部件失效率;

$\lambda'_2$ : 温贮备的类型 2 部件失效率;

$\gamma$ : 重试空间中失效部件的重试率;

$\alpha_1$ : 正常维修失效部件期间修理设备的故障率;

$\sigma$ : 修理设备以较低维修率继续修理失效部件的概率;

$\bar{\sigma}$ : 修理设备发生不完全故障后被维修的概率;

$\alpha_2$ : 不完全故障期间修理设备发生完全性故障的故障率;

$\beta$ : 维修不完全故障或完全性故障的修理设备的维修率.

系统模型的详细描述如下.

1) 初始时刻,  $N$  个类型 1 部件工作,  $M - N$  个类型 1 部件和所有类型 2 部件处于温贮备状态, 修理设

备正常且空闲.

2) 当系统中有一个工作部件发生失效时, 首先由未失效的类型 1 温贮备部件立即替换, 若没有正常的类型 1 温贮备部件, 则由正常的类型 2 温贮备部件替换.

3) 正常工作的类型 1 部件和类型 2 部件的寿命分别服从失效率为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的指数分布, 温贮备的类型 1 部件和类型 2 部件的寿命分别服从失效率为  $\lambda'_1$  和  $\lambda'_2$  ( $\lambda'_1 < \lambda'_2 < \lambda_1 < \lambda_2$ ) 的指数分布.

4) 修理设备对失效部件进行维修, 且失效部件没有等待空间. 部件失效后, 若修理设备空闲, 则失效部件立即得到维修; 若修理设备正在维修失效部件或正在被技术人员维修, 则失效部件会进入重试空间, 一段时间后再次请求服务, 直至得到修理. 重试空间中失效部件遵循“先进先出”的重试规则. 失效部件的重试时间服从参数为  $\gamma$  的指数分布.

5) 修理设备不完全可靠, 但是, 在正常空闲状态下不会发生故障或劣化. 正常的修理设备在维修失效部件时会以故障率  $\alpha_1$  发生不完全故障. 修理设备在发生不完全故障后或以  $\bar{\sigma} = 1 - \sigma$  的概率被维修, 或以  $\sigma$  的概率和较低维修率继续修理失效部件. 在不完全故障工作和不完全故障空闲期间, 修理设备会以故障率  $\alpha_2$  发生完全性故障 (不能再继续维修失效部件), 然后修理设备会被维修. 修理设备被维修时, 被暂停维修的失效部件等待修理, 待修理设备被修复后继续修理该部件. 维修故障 (不完全故障和完全性故障) 修理设备的时间服从参数为  $\beta$  的指数分布, 且修复如新.

6) 当修理设备正常工作时, 修理失效部件的时间服从  $m$  阶 PH 分布, 表示为  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})$ . 其中:  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ ,  $\mathbf{T} = (T_{ij})_{m \times m}$ ,  $T_{ii} < 0$ ,  $T_{ij} > 0$ ,  $i \neq j$ ,  $\mathbf{T}^0 = -\mathbf{T}\mathbf{e}_{m \times 1} = (T_1^0, T_2^0, \dots, T_m^0)^T$ , 概率分布为  $\mathbf{V}_1(t) = 1 - \boldsymbol{\theta} \exp(\mathbf{T}t)\mathbf{e}_{m \times 1}$  ( $t \geq 0$ ), 均值为  $\mathbf{E}(\mathbf{V}_1) = -\boldsymbol{\theta}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{e}_{m \times 1}$ . 其中:  $\mathbf{e}_{m \times 1}$  表示元素均为 1 的  $m$  维列向量,  $T_{ij}$  为由相位  $i$  到相位  $j$  的转移率,  $\mathbf{T}^0$  为由各瞬时状态进入吸收状态的吸收率. 当修理设备在不完全故障期间以低修复率修理失效部件时, 修理失效部件的时间服从  $m$  阶 PH 分布, 表示为  $(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{S})$ . 其中:  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ ,  $\mathbf{S} = (S_{ij})_{m \times m}$ ,  $S_{ii} < 0$ ,  $S_{ij} > 0$ ,  $i \neq j$ ,  $\mathbf{S}^0 = -\mathbf{S}\mathbf{e}_{m \times 1} = (S_1^0, S_2^0, \dots, S_m^0)^T$ , 概率分布为  $\mathbf{V}_2(t) = 1 - \boldsymbol{\eta} \exp(\mathbf{S}t)\mathbf{e}_{m \times 1}$  ( $t \geq 0$ ), 均值为  $\mathbf{E}(\mathbf{V}_2) = -\boldsymbol{\eta}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{e}_{m \times 1}$ ,  $S_{ij}$  为由相位  $i$  到相位  $j$  的转移率,  $\mathbf{S}^0$  为由各瞬时状态进入吸收状态的吸收率.

7) 失效部件可修复如新. 类型 1 部件修复好后,

若系统正常且有正在工作的类型2部件,则修复好的类型1部件替换正在工作的类型2部件,类型2部件转为温贮备状态,否则修复好的类型1部件去贮备;若系统故障,则修复好的类型1部件直接进入系统工作.

8) 若正常的修理设备在修理失效部件期间发生不完全故障,修理设备从正常且在相位 $r_1$ 修理失效部件状态转移到不完全故障且在相位 $r_2$ 修理失效部

件状态的概率为 $P_{r_1 r_2}$ ,则 $m$ 阶转移概率矩阵为 $P = (P_{r_1 r_2})$ .

### 1.2 系统模型状态分析

令 $(H(t), I(t), J(t))$ 表示时刻 $t(t \geq 0)$ 系统所处的状态.其中: $I(t) = i(i = 0, 1, \dots, M)$ 为时刻 $t$ 重试空间中失效的类型1部件个数; $J(t) = j(j = 0, 1, \dots, N)$ 为时刻 $t$ 重试空间中失效的类型2部件个数; $H(t)$ 为时刻 $t$ 修理设备的状态,即

$$H(t) = \begin{cases} k_{a_1}(k = 1, 2, \dots, m), & \text{修理设备正常且在相位 } k \text{ 修理类型 } 1 \text{ 部件;} \\ 0_1, & \text{修理设备正常且空闲;} \\ k_{b_1}(k = 1, 2, \dots, m), & \text{修理设备正常且在相位 } k \text{ 修理类型 } 2 \text{ 部件;} \\ l_{a_2}(l = 1, 2, \dots, m), & \text{修理设备不完全故障且在相位 } l \text{ 修理类型 } 1 \text{ 部件;} \\ 0_2, & \text{修理设备不完全故障且空闲;} \\ l_{b_2}(l = 1, 2, \dots, m), & \text{修理设备不完全故障且在相位 } l \text{ 修理类型 } 2 \text{ 部件;} \\ 3_{a_3}, & \text{修理设备因修理类型 } 1 \text{ 部件时发生不完全故障或完全性故障而被维修;} \\ 0_3, & \text{修理设备因不完全故障且空闲时发生完全性故障而被维修;} \\ 3_{b_3}, & \text{修理设备因修理类型 } 2 \text{ 部件时发生不完全故障或完全性故障而被维修.} \end{cases}$$

基于指数和PH分布特性可知, $\{H(t), I(t), J(t), t \geq 0\}$ 是一个连续时间Markov过程,其状态空间为 $\Omega = \{(h, i, j) : 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1, h = 0_1, 1_{a_1}, \dots, m_{a_1}, 1_{b_1}, \dots, m_{b_1}, 0_2, 1_{a_2}, \dots, m_{a_2}, 1_{b_2}, \dots, m_{b_2}, 0_3, 3_{a_3}, 3_{b_3}\} \cup \{(h, i, N) : 0 \leq i \leq M-1, h = 0_1, 1_{a_1}, \dots, m_{a_1}, 0_2, 1_{a_2}, \dots, m_{a_2}, 0_3, 3_{a_3}\} \cup \{(h, M, j) : 0 \leq j \leq N-1, h = 0_1, 1_{b_1}, \dots, m_{b_1}, 0_2, 1_{b_2}, \dots, m_{b_2}, 0_3, 3_{b_3}\} \cup \{(h, M, N) : h = 0_1, 0_3\}$ .

## 2 系统性能指标分析

### 2.1 系统稳态可用度

令 $P_{h,ij}(t)(h, i, j \in \Omega)$ 为时刻 $t$ 修理设备处于状态 $h$ 且重试空间中有 $i$ 个失效的类型1部件和 $j$ 个失效的类型2部件的概率,有

$$P_{h,ij}(t) = P\{H(t) = h, I(t) = i, J(t) = j\}.$$

系统在稳态条件下的状态概率可表示为

$$P_{h,ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{h,ij}(t), h, i, j \in \Omega.$$

令

$$\begin{aligned} P_{ij} = & (P_{0_1,ij}, P_{1_{a_1},ij}, \dots, P_{m_{a_1},ij}, P_{1_{b_1},ij}, \dots, P_{m_{b_1},ij}, \\ & P_{0_2,ij}, P_{1_{a_2},ij}, \dots, P_{m_{a_2},ij}, P_{1_{b_2},ij}, \dots, P_{m_{b_2},ij}, \\ & P_{0_3,ij}, P_{3_{a_3},ij}, P_{3_{b_3},ij}), \\ & i = 0, 1, \dots, M-1, j = 0, 1, \dots, N-1; \\ P_{iN} = & (P_{0_1,iN}, P_{1_{a_1},iN}, \dots, P_{m_{a_1},iN}, P_{0_2,iN}, P_{1_{a_2},iN}, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_{m_{a_2},iN}, P_{0_3,iN}, P_{3_{a_3},iN}), i = 0, 1, \dots, M-1; \\ P_{Mj} = & (P_{0_1,Mj}, P_{1_{b_1},Mj}, \dots, P_{m_{b_1},Mj}, P_{0_2,Mj}, P_{1_{b_2},Mj}, \dots, \\ & P_{m_{b_2},Mj}, P_{0_3,Mj}, P_{3_{b_3},Mj}), j = 0, 1, \dots, N-1; \\ P_{MN} = & (P_{0_1,MN}, P_{0_3,MN}). \end{aligned}$$

系统稳态概率分布满足如下矩阵方程:

$$PQ = 0. \tag{1}$$

其中: $P = (P_{00}, \dots, P_{0(N-1)}, P_{0N}, P_{10}, \dots, P_{1(N-1)}, P_{1N}, \dots, P_{(M-1)0}, \dots, P_{(M-1)(N-1)}, P_{(M-1)N}, P_{M0}, \dots, P_{M(N-1)}, P_{MN})$ ;  $Q$ 为 $(4m + 5)MN + (2m + 4) \times (M + N) + 2$ 阶的系统状态转移率矩阵,它能够通过系统各状态间的转移率得到; $0$ 表示分量全为0的 $(4m + 5)MN + (2m + 4)(M + N) + 2$ 维行向量.

正则性条件为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} P_{ij} e_{4m+5} + P_{iN} e_{2m+4} \right) + \\ & \sum_{j=0}^{N-1} P_{Mj} e_{2m+4} + P_{MN} e_2 = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

其中: $e_{4m+5}$ 是分量全为1的 $4m + 5$ 维列向量, $e_{2m+4}$ 是分量全为1的 $2m + 4$ 维列向量, $e_2$ 是分量全为1的2维列向量.

联合式(1)和(2),可解得系统稳态概率,从而可得到系统稳态可用度

$$A(\infty) = 1 - \sum_{i+j>M} (P_{0_1,ij} + P_{0_2,ij} + P_{0_3,ij}) -$$

$$\sum_{i+j \geq M} ((P_{m_{a_1}ij} + P_{m_{b_1}ij} + P_{m_{a_2}ij} + P_{m_{b_2}ij})e_m + P_{3_{a_3},ij} + P_{3_{b_3},ij}). \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{m_{a_1}ij} &= (P_{1_{a_1},ij}, P_{2_{a_1},ij}, \dots, P_{m_{a_1},ij}), \\ i &= 0, 1, \dots, M-1, j = 0, 1, \dots, N; \\ P_{m_{b_1}ij} &= (P_{1_{b_1},ij}, P_{2_{b_1},ij}, \dots, P_{m_{b_1},ij}), \\ i &= 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, N-1; \\ P_{m_{a_2}ij} &= (P_{1_{a_2},ij}, P_{2_{a_2},ij}, \dots, P_{m_{a_2},ij}), \\ i &= 0, 1, \dots, M-1, j = 0, 1, \dots, N; \\ P_{m_{b_2}ij} &= (P_{1_{b_2},ij}, P_{2_{b_2},ij}, \dots, P_{m_{b_2},ij}), \\ i &= 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

### 2.2 其他稳态性能指标

由系统状态概率, 还可得到以下一些性能指标.

1) 重试空间中失效的类型1部件期望数为

$$\begin{aligned} EN_1 &= \sum_{i=0}^{M-1} i \left( \sum_{j=0}^{N-1} P_{ij} e_{4m+5} + P_{iN} e_{2m+4} \right) + \\ &M \left( \sum_{j=0}^{N-1} P_{Mj} e_{2m+4} + P_{MN} e_2 \right). \quad (4) \end{aligned}$$

2) 重试空间中失效的类型2部件期望数为

$$\begin{aligned} EN_2 &= \sum_{j=0}^{N-1} j \left( \sum_{i=0}^{M-1} P_{ij} e_{4m+5} + P_{Mj} e_{2m+4} \right) + \\ &N \left( \sum_{i=0}^{M-1} P_{iN} e_{2m+4} + P_{MN} e_2 \right). \quad (5) \end{aligned}$$

3) 修理设备正常且空闲的概率为

$$P_{W1} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} P_{01,ij} + \sum_{i=0}^{M-1} P_{01,iN} + \sum_{j=0}^N P_{01,Mj}. \quad (6)$$

4) 修理设备不完全故障且空闲的概率为

$$P_{D1} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} P_{02,ij} + \sum_{i=0}^{M-1} P_{02,iN} + \sum_{j=0}^{N-1} P_{02,Mj}. \quad (7)$$

5) 修理设备因不完全故障且空闲时发生完全性故障而被维修的概率为

$$P_{R1} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} P_{03,ij} + \sum_{i=0}^{M-1} P_{03,iN} + \sum_{j=0}^N P_{03,Mj}. \quad (8)$$

6) 修理设备正常且忙于修理类型1部件的概率为

$$P_{W1} = \sum_{i=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^N P_{m_{a_1}ij} e_m \right). \quad (9)$$

7) 修理设备正常且忙于修理类型2部件的概率为

$$P_{W2} = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^M P_{m_{b_1}ij} e_m \right). \quad (10)$$

8) 修理设备不完全故障且忙于修理类型1部件的概率为

$$P_{D1} = \sum_{i=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^N P_{m_{a_2}ij} e_m \right). \quad (11)$$

9) 修理设备不完全故障且忙于修理类型2部件的概率为

$$P_{D2} = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^M P_{m_{b_2}ij} e_m \right). \quad (12)$$

10) 修理设备因修理部件时发生不完全故障和完全性故障而被维修的概率为

$$P_{BR} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^N P_{3_{a_3},ij} + \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{N-1} P_{3_{b_3},ij}. \quad (13)$$

### 2.3 系统稳态期望繁忙周期长度

系统繁忙周期  $T_c$  定义为从系统所有部件均正常且修理设备正常空闲再次到所有部件均正常且修理设备正常空闲的时间长度. 令  $T_{01,00}$  为修理设备正常空闲且重试空间中无失效部件的时间长度, 则稳态条件下  $E[T_{01,00}] = \frac{1}{N\lambda_1 + (M-N)\lambda'_1 + N\lambda'_2}$ . 由交替更新过程, 得到  $P_{01,00} = \frac{E[T_{01,00}]}{E[T_c]}$ , 然后可得到系统稳态期望繁忙周期长度  $E[T_c] = \frac{E[T_{01,00}]}{P_{01,00}}$ .

### 3 系统总期望成本

系统单位时间的成本要素定义如下.

$C_{H_1}$ : 重试空间中的失效类型1部件所需成本;

$C_{H_2}$ : 重试空间中的失效类型2部件所需成本;

$C_{W1}$ : 修理设备正常且空闲的成本;

$C_{D1}$ : 修理设备不完全故障且空闲的成本;

$C_{R1}$ : 修理设备因不完全故障且空闲时发生完全性故障而被维修的成本;

$C_{W1}(C_{W2})$ : 正常修理设备修理类型1(类型2)部件的成本;

$C_{D1}(C_{D2})$ : 不完全故障修理设备修理类型1(类型2)部件的成本;

$C_{BR}$ : 修理设备因修理部件时发生不完全故障或完全性故障而被维修的成本;

$C_R$ : 修理设备以维修率  $\beta$  被维修的成本;

$C_s$ : 每个周期的构建成本.

基于各成本要素的定义和相对应的系统性能指标, 构造了关于失效部件和修理设备的系统总期望成本, 如下式所示:

$$TC = C_{H_1}EN_1 + C_{H_2}EN_2 + C_{W1}P_{W1} + C_{D1}P_{D1} +$$

$$C_{RI}P_{RI} + C_{W1}P_{W1} + C_{W2}P_{W2} + C_{D1}P_{D1} + C_{D2}P_{D2} + C_{BR}P_{BR} + C_R\beta + \frac{C_s}{E[T_c]} \quad (14)$$

系统参数  $\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2, \alpha_1, \alpha_2, \sigma, \beta, \gamma)$  对总期望成本的敏感性计算公式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial TC}{\partial \varepsilon} = & C_{H1} \frac{\partial EN_1}{\partial \varepsilon} + C_{H2} \frac{\partial EN_2}{\partial \varepsilon} + C_{W1} \frac{\partial P_{W1}}{\partial \varepsilon} + \\ & C_{D1} \frac{\partial P_{D1}}{\partial \varepsilon} + C_{RI} \frac{\partial P_{RI}}{\partial \varepsilon} + C_{W1} \frac{\partial P_{W1}}{\partial \varepsilon} + \\ & C_{W2} \frac{\partial P_{W2}}{\partial \varepsilon} + C_{D1} \frac{\partial P_{D1}}{\partial \varepsilon} + C_{D2} \frac{\partial P_{D2}}{\partial \varepsilon} + \\ & C_{BR} \frac{\partial P_{BR}}{\partial \varepsilon} + C_R \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon} + C_s \frac{\partial \frac{1}{E[T_c]}}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (15)$$

### 4 数值算例

本节通过数值实例验证所提出模型,分析系统参数对系统稳态可用度和总期望成本的影响情况.

令  $M = 2, N = 1, \lambda_1 = 0.12, \lambda_2 = 0.18, \lambda'_1 = 0.004, \lambda'_2 = 0.008, \sigma = 0.5, \alpha_1 = 0.15, \alpha_2 = 0.1, \beta = 1.0, \gamma = 1.5$  为基本数值. 正常修理设备修理失效部件的时间服从  $\theta = (0.5 \ 0.5), T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  的PH分布, 不完全故障修理设备修理失效部件的时间服从  $\eta = (0.5 \ 0.5), S = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}$  的PH分布, 修理设备从正常状态下的修理相位到不完全故障状态下的修理相位的转移概率矩阵  $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$ . 利用式(1)~(3), 可得到系统稳态可用度  $A(\infty) = 0.9938$ .

图1~图4为修理设备参数和部件重试率对系统可用度的影响, 其中  $A(\infty)$  随着  $\gamma$  的增大而增大, 因为  $\gamma$  的增大会减少失效部件的等待修理时间, 所以  $A(\infty)$  增大. 由图1可见:  $A(\infty)$  随着  $\sigma$  的增大而减小, 且  $\sigma$  对  $A(\infty)$  的影响很小, 这是因为修理设备不完全故障后,  $\sigma$  越大, 修理设备以较低维修率继续修理失效部件的概率越大, 所以  $A(\infty)$  会减小但是影响比较小. 由图2可见:  $A(\infty)$  随着  $\alpha_1$  的增大而减小, 这是因为  $\alpha_1$  的增大会导致修理设备加快进入不完全故障状态, 所以  $A(\infty)$  会减小. 由图3可见:  $A(\infty)$  随着  $\beta$  的增大而增大, 因为  $\beta$  的增大会加快修理设备恢复正常状态, 所以  $A(\infty)$  会增大. 由图4可见: 当  $\beta$  值较小时,  $A(\infty)$  随着  $\alpha_2$  的增大而减小; 当  $\beta$  值较大时,  $A(\infty)$  随着  $\alpha_2$  的增大而增大. 这种情形产生的原因是  $\alpha_2$  的增大会使得修理设备加快进入完全性故障状态, 若  $\beta$  值较小时, 处于完全性故障状态的修理设备恢复正常状态比较慢, 则  $A(\infty)$  会减小; 若  $\beta$  值较大

时, 处于完全性故障状态的修理设备可以较快恢复正常状态, 则  $A(\infty)$  会增大.

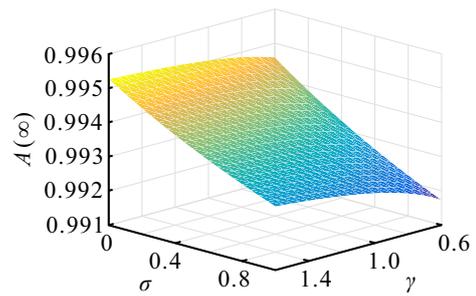


图1 不同  $\sigma$  和  $\gamma$  对  $A(\infty)$  的影响

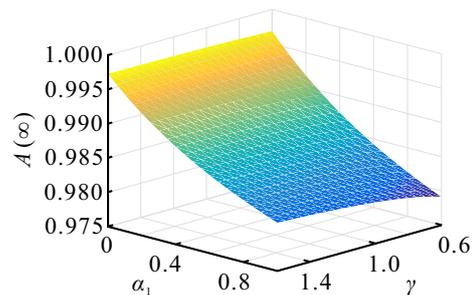


图2 不同  $\alpha_1$  和  $\gamma$  对  $A(\infty)$  的影响

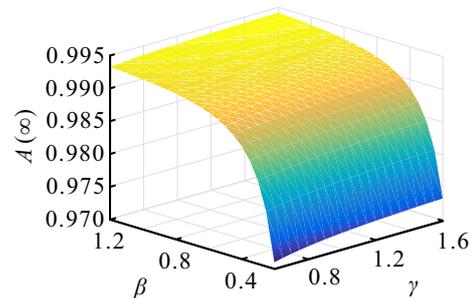
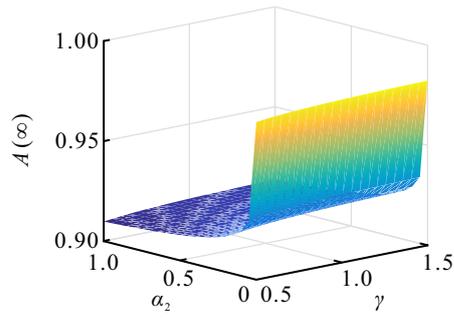


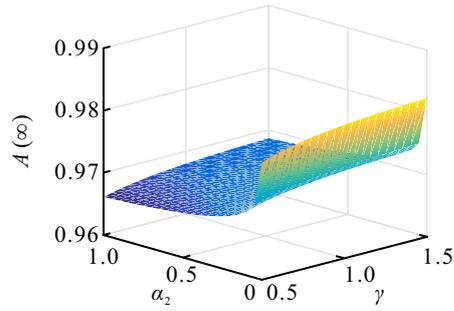
图3 不同  $\beta$  和  $\gamma$  对  $A(\infty)$  的影响

图5~图12为修理设备正常时和不完全故障时的平均修理时间以及部件失效对系统稳态可用度的影响. 对于固定的  $E(V_1)$  和  $E(V_2)$ ,  $A(\infty)$  随着  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1$  和  $\lambda'_2$  的增大而减小, 其中  $\lambda_1$  对  $A(\infty)$  的影响最大, 这是由于类型1部件优先使用造成的. 由图5~图12可见,  $A(\infty)$  随着  $E(V_1), E(V_2)$  的增大而减小, 这是因为处于正常状态或处于不完全故障状态的修理设备对失效部件的修理时间越长, 失效部件返回正常状态越慢, 因而  $A(\infty)$  会减小.

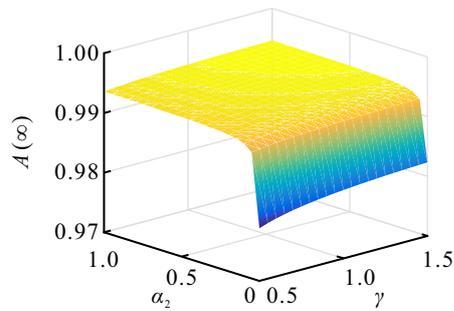
为了得到系统总期望成本关于参数  $\delta(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, \sigma, \beta, \gamma)$  的敏感性数值分析结果, 固定系统各成本要素为  $C_{H1} = 30, C_{H2} = 40, C_{W1} = 15, C_{D1} = 18, C_{RI} = 120, C_{W1} = 30, C_{W2} = 40, C_{D1} = 40, C_{D2} = 50, C_{BR} = 120, C_R = 30, C_s = 150$ , 然后分别改变  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, \sigma, \beta, \gamma$ , 其余参数取基本数值, 所得结果如图13~图19所示.



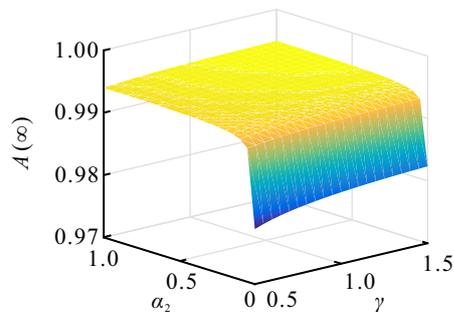
(a)  $\beta=0.1$



(b)  $\beta=0.2$



(c)  $\beta=0.9$



(d)  $\beta=1.0$

图4 不同 $\alpha_2$ 和 $\gamma$ 对 $A(\infty)$ 的影响

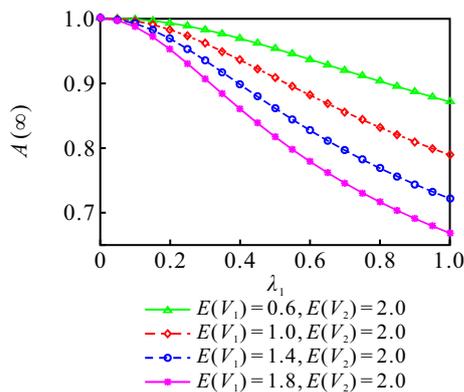


图5 不同 $E(V_1)$ 和 $\lambda_1$ 对 $A(\infty)$ 的影响

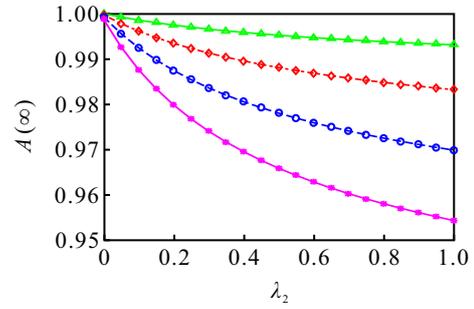


图6 不同 $E(V_1)$ 和 $\lambda_2$ 对 $A(\infty)$ 的影响

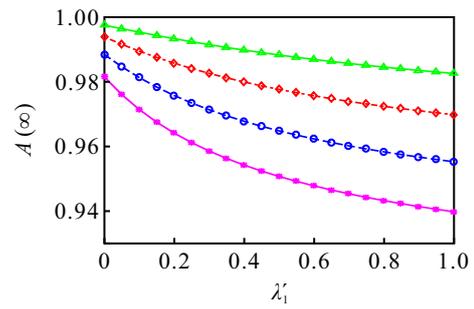


图7 不同 $E(V_1)$ 和 $\lambda_1$ 对 $A(\infty)$ 的影响

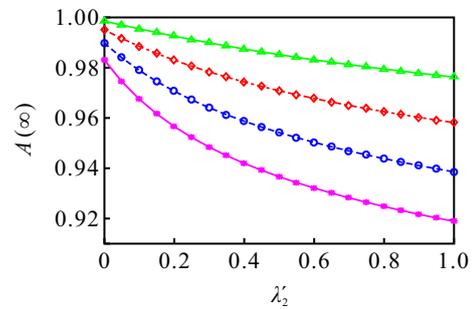


图8 不同 $E(V_1)$ 和 $\lambda_2$ 对 $A(\infty)$ 的影响

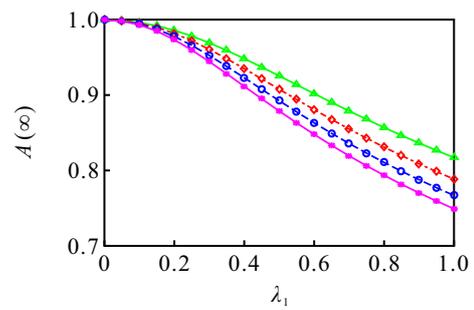


图9 不同 $E(V_2)$ 和 $\lambda_1$ 对 $A(\infty)$ 的影响

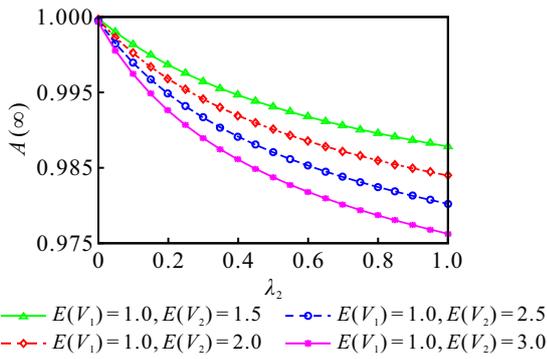


图 10 不同  $E(V_2)$  和  $\lambda_2$  对  $A(\infty)$  的影响

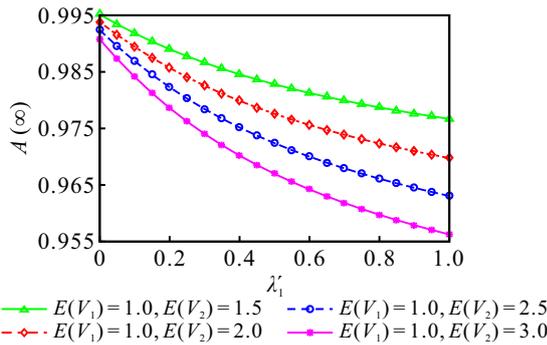


图 11 不同  $E(V_2)$  和  $\lambda_1$  对  $A(\infty)$  的影响

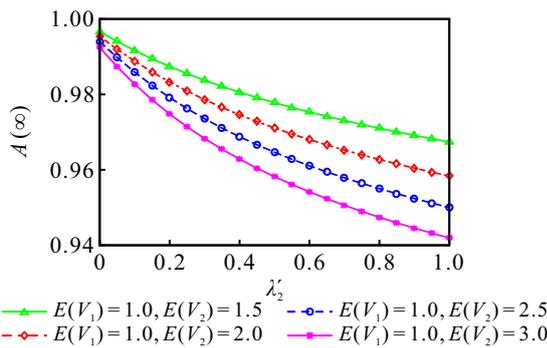


图 12 不同  $E(V_2)$  和  $\lambda_2$  对  $A(\infty)$  的影响

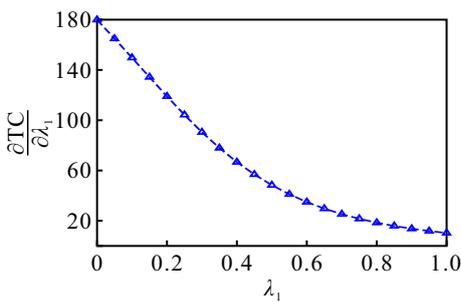


图 13 TC 对参数  $\lambda_1$  的敏感性分析结果

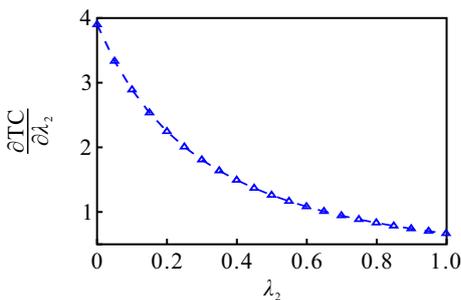


图 14 TC 对参数  $\lambda_2$  的敏感性分析结果

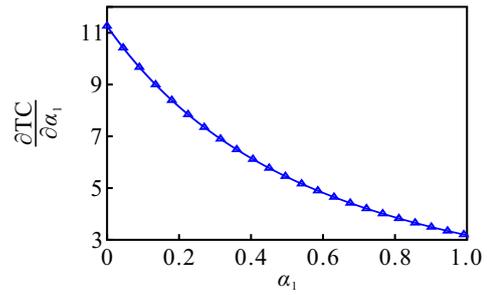


图 15 TC 对参数  $\alpha_1$  的敏感性分析结果

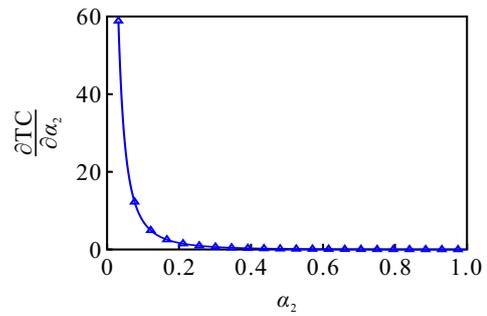


图 16 TC 对参数  $\alpha_2$  的敏感性分析结果

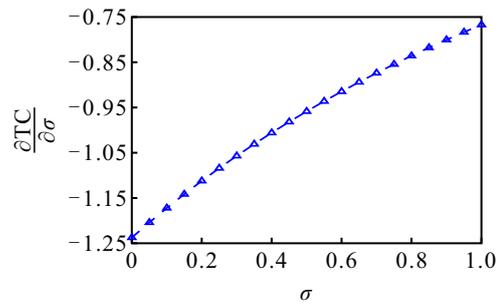


图 17 TC 对参数  $\sigma$  的敏感性分析结果

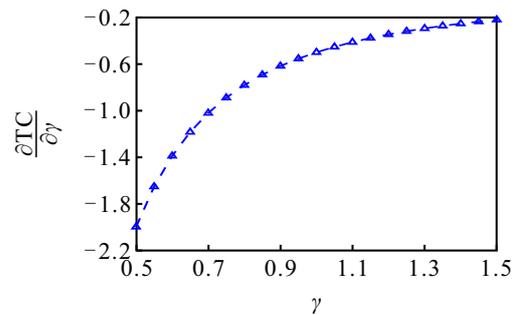


图 18 TC 对参数  $\gamma$  的敏感性分析结果

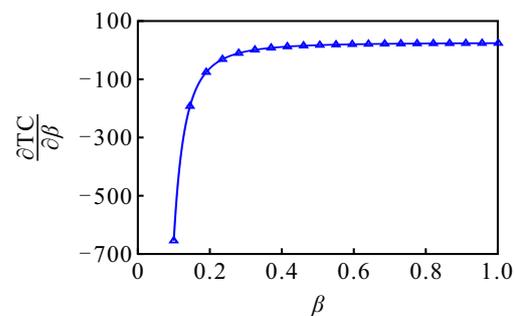


图 19 TC 对参数  $\beta$  的敏感性分析结果

由图 13~图 16 可见:  $\frac{\partial TC}{\partial \lambda_1}$ 、 $\frac{\partial TC}{\partial \lambda_2}$ 、 $\frac{\partial TC}{\partial \alpha_1}$ 、 $\frac{\partial TC}{\partial \alpha_2}$  均大于 0, 这表明参数  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  与总期望成本

成正相关, 增大  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  会增加系统总期望成本; 由图 17 和图 18 可见:  $\frac{\partial TC}{\partial \sigma}$ 、 $\frac{\partial TC}{\partial \gamma}$  均小于 0, 这表明参数  $\sigma$ 、 $\gamma$  与总期望成本成负相关, 增加  $\sigma$ 、 $\gamma$  可减小系统总期望成本; 由图 19 可见:  $\frac{\partial TC}{\partial \beta}$  先小于 0 后大于 0, 这表明随着  $\beta$  的增大, 系统总期望成本先减小后增加, 在 0.2~0.3 间存在一个最优  $\beta$  值使得总期望成本最小. 表 1 为 TC 对参数  $\delta$  的敏感性分析数值结果. 由表 1 可见, 7 个参数对总期望成本的总体影响排序为  $\lambda_1 > \beta > \alpha_1 > \alpha_2 > \lambda_2 > \sigma > \gamma$ .

表 1 TC 对参数  $\delta$  的敏感性分析数值结果

	$\delta = \lambda_1$	$\delta = \lambda_2$	$\delta = \alpha_1$	$\delta = \alpha_2$	$\delta = \sigma$	$\delta = \beta$	$\delta = \gamma$
$\frac{\partial TC}{\partial \delta}$	142.9987	2.3697	8.7717	7.0801	-0.9585	28.1641	-0.2266

以参数  $\beta$  作为决策变量, 分析总期望成本随参数  $\beta$  的变化情况, 数值结果如图 20 所示. 由图 20 可见, 有一个  $\beta$  值使得总成本最小. 通过 Matlab 软件计算, 得到最佳  $\beta$  值为 0.2652, 最小成本值为 50.0720, 可用度为 0.9817.

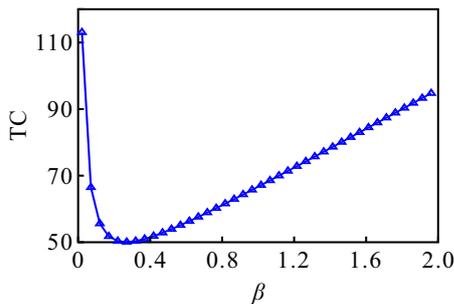


图 20 参数  $\beta$  对 TC 的影响

### 5 结论

针对实际工程中存在修理设备不完全可靠的情形, 本文在具有两类不同部件的温贮备可修重试系统可靠性模型中, 考虑了不可靠修理设备, 其中修理设备会发生不完全故障和完全性故障. 基于维修环境的随机波动性, 利用 PH 分布对正常修理设备和不完全故障修理设备维修失效部件的时间进行建模, 使得系统模型的潜在应用更具普遍性. 通过系统状态转移率分析和系统状态概率方程组, 得到了系统的可用度、重试空间中失效部件期望数、修理设备正常且空闲的概率等稳态性能指标. 基于系统成本要素和一些稳态性能指标, 构建了系统总期望成本模型. 通过数值算例, 分析了系统参数对系统稳态可用度的影响, 并对系统总期望成本进行了敏感性数值分析, 发现存在一个最佳维修率值使得成本最小. 所提出模型可为复杂工程系统的可靠性管理和成本优化提供一定的理论基础和决策依据.

### 参考文献(References)

- [1] She J, Pecht M G. Reliability of a  $k$ -out-of- $n$  warm-standby system[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1992, 41(1): 72-75.
- [2] Zhang T, Horigome M. Availability of 3-out-of-4: G warm standby system[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2000, 83(5): 857-862.
- [3] Zhang T L, Xie M, Horigome M. Availability and reliability of  $k$ -out-of- $(M + N)$ : G warm standby systems[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2006, 91(4): 381-387.
- [4] Amari S V, Pham H, Misra R B. Reliability characteristics of  $k$ -out-of- $n$  warm standby systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(4): 1007-1018.
- [5] 尹东亮, 胡涛, 陈童. 考虑维修优先权的多状态温贮备系统可靠性模型[J]. 控制与决策, 2018, 33(11): 2029-2036.  
(Yin D L, Hu T, Chen T. Reliability analysis for multi-state warm standby system with repair priority[J]. Control and Decision, 2018, 33(11): 2029-2036.)
- [6] 尹东亮, 胡涛, 陈童, 等. 考虑多维修台异步多重休假的温贮备冗余系统可靠性模型[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 973-984.  
(Yin D L, Hu T, Chen T, et al. Reliability analysis for warm standby redundancy system considering multiple asynchronous vacations of multiple maintenance stations[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 973-984.)
- [7] 左凯, 吴文青, 张元元. 修理工多重休假且修理设备可更换的  $n$  中取  $k$  温贮备系统研究[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(6): 1729-1741.  
(Zuo K, Wu W Q, Zhang Y Y. Analysis of a  $k$  out of  $n$  warm standby system with repairman's multiple vacations and replaceable repair facility[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2021, 41(6): 1729-1741.)
- [8] Chakravarthy S R, Agarwal A. Analysis of a machine repair problem with an unreliable server and phase type repairs and services[J]. Naval Research Logistics, 2003, 50(5): 462-480.
- [9] Jain M, Preeti. Cost analysis of a machine repair problem with standby, working vacation and server breakdown[J]. International Journal of Mathematics in Operational Research, 2014, 6(4): 437-451.
- [10] Wang K H, Ke J B, Lee W C. Reliability and sensitivity analysis of a repairable system with warm standbys and R unreliable service stations[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2007, 31(11): 1223-1232.
- [11] Ke J C, Liu T H, Yang D Y. Modeling of machine interference problem with unreliable repairman and standbys imperfect switchover[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2018, 174: 12-18.
- [12] 刘宝亮, 温艳清, 丰月皎. 修理设备和开关不完全可

- 靠的温贮备可修系统的可靠性[J]. 运筹与管理, 2018, 27(10): 113-117.
- (Liu B L, Wen Y Q, Feng Y J. Reliability for warm standby repairable system with unreliable server and switching failure[J]. Operations Research and Management Science, 2018, 27(10): 113-117.)
- [13] 程江, 张广生. 修理设备可修的单部件可修系统[J]. 西南民族大学学报: 自然科学版, 2006, 32(5): 870-873. (Cheng J, Zhang G S. One unit repairable system with repairable equipment[J]. Journal of Southwest University for Nationalities: Natural Science Edition, 2006, 32(5): 870-873.)
- [14] Liou C D. Optimization analysis of the machine repair problem with multiple vacations and working breakdowns[J]. Journal of Industrial & Management Optimization, 2015, 11(1): 83-104.
- [15] Yen T C, Chen W L, Chen J Y. Reliability and sensitivity analysis of the controllable repair system with warm standbys and working breakdown[J]. Computers & Industrial Engineering, 2016, 97: 84-92.
- [16] Chen W L. System reliability analysis of retrieval machine repair systems with warm standbys and a single server of working breakdown and recovery policy[J]. Systems Engineering, 2018, 21(1): 59-69.
- [17] Jain M, Sharma R, Meena R K. Performance modeling of fault-tolerant machining system with working vacation and working breakdown[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2019, 44(3): 2825-2836.
- [18] Kumar P, Jain M. Reliability analysis of a multi-component machining system with service interruption, imperfect coverage, and reboot[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2020, 202: 106991.
- [19] Yang D Y, Wu C H. Evaluation of the availability and reliability of a standby repairable system incorporating imperfect switchovers and working breakdowns[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 207: 107366.
- [20] Krishnamoorthy A, Ushakumari P V. Reliability of a  $k$ -out-of- $n$  system with repair and retrieval of failed units[J]. Top, 1999, 7(2): 293-304.
- [21] Ke J C, Yang D Y, Sheu S H, et al. Availability of a repairable retrieval system with warm standby components[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2013, 90(11): 2279-2297.
- [22] Kuo C C, Sheu S H, Ke J C, et al. Reliability-based measures for a retrieval system with mixed standby components[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(19/20): 4640-4651.
- [23] Yang D Y, Tsao C L. Reliability and availability analysis of standby systems with working vacations and retrieval of failed components[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2019, 182: 46-55.
- [24] Hu L M, Liu S J, Peng R, et al. Reliability and sensitivity analysis of a repairable  $k$ -out-of- $n$ : G system with two failure modes and retrieval feature[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2022, 51(9): 3043-3064.
- [25] Gao S, Wang J T. Reliability and availability analysis of a retrieval system with mixed standbys and an unreliable repair facility[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 205: 107240.
- [26] Chen W L, Wang K H. Reliability analysis of a retrieval machine repair problem with warm standbys and a single server with  $N$ -policy[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2018, 180: 476-486.
- [27] Wang K H, Wang J, Liou C D, et al. Particle swarm optimization to the retrieval machine repair problem with working breakdowns under the  $N$  policy[J]. Queueing Models and Service Management, 2019, 2(1): 61-81.
- [28] Yen T C, Wang K H, Wu C H. Reliability-based measure of a retrieval machine repair problem with working breakdowns under the  $F$ -policy[J]. Computers & Industrial Engineering, 2020, 150: 106885.
- [29] Yen T C, Wu C H, Wang K H, et al. Optimisation analysis of the  $F$ -policy retrieval machine repair problem with working breakdowns[J]. International Journal of Industrial and Systems Engineering, 2022, 40(2): 200-227.
- [30] He Q M. Fundamentals of matrix-analytic methods[M]. New York: Springer, 2014, 10-15.
- [31] Neuts M F, Pérez-Ocón R, Torres-Castro I. Repairable models with operating and repair times governed by phase type distributions[J]. Advances in Applied Probability, 2000, 32(2): 468-479.
- [32] Chakravarthy S R, Krishnamoorthy A, Ushakumari P V. A  $k$ -out-of- $n$  reliability system with an unreliable server and phase type repairs and services: The  $(N, T)$  policy[J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2001, 14(4): 361-380.
- [33] Barron Y, Frostig E, Levikson B. Analysis of  $R$  out of  $N$  systems with several repairmen, exponential life times and phase type repair times: An algorithmic approach[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 169(1): 202-225.
- [34] Liu B L, Cui L R, Wen Y Q, et al. A cold standby repairable system with the repairman having multiple vacations and operational, repair, and vacation times following phase-type distributions[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2016, 45(4): 850-858.

## 作者简介

康佳(1998—), 女, 硕士生, 从事系统可靠性分析的研究, E-mail: kangjia\_ysu@163.com;

胡林敏(1978—), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统可靠性理论、应用和优化设计等研究, E-mail: linminhu@ysu.edu.cn;

王妍(1996—), 女, 硕士生, 从事系统可靠性分析的研究, E-mail: yanwang\_w@163.com.