



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION

基于有限时间指令滤波的非线性系统固定时间预设性能控制

李应森, 陈明, 姜海洋, 苏亚坤, 彭开香

引用本文:

李应森, 陈明, 姜海洋, 苏亚坤, 彭开香. 基于有限时间指令滤波的非线性系统固定时间预设性能控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(5): 1498–1506.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1740>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

输出误差约束下四旋翼无人机预定性能反步控制

Prescribed performance backstepping control for quadrotor UAV with output error constraint

控制与决策. 2021, 36(5): 1059–1068 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1249>

孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid

控制与决策. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty

控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

一类非线性大系统分散自适应预设性能有限时间跟踪控制

Decentralized adaptive prescribed performance finite-time tracking control for a class of large-scale nonlinear systems

控制与决策. 2020, 35(12): 3045–3052 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0623>

基于有限时间指令滤波的非线性系统 固定时间预设性能控制

李应森¹, 陈明^{1†}, 姜海洋¹, 苏亚坤², 彭开香³

(1. 辽宁科技大学电子与信息工程学院, 辽宁鞍山 114044; 2. 渤海大学数学科学学院, 辽宁锦州 121013;
3. 北京科技大学自动化学院, 北京 100083)

摘要: 针对一类严格反馈非线性系统, 提出一种基于有限时间指令滤波的自适应固定时间预设性能控制策略. 首先, 引用非线性映射技术及适当的误差变换, 建立等效的误差模型; 其次, 综合利用反步法、固定时间控制和自适应控制等方法, 设计一种基于有限时间指令滤波的预设性能跟踪控制器. 该策略应用指令滤波器解决了反步法中对虚拟控制律反复求导问题, 减轻了计算负担. 此外, 预设性能控制和固定时间控制保证了系统的跟踪误差能够在固定时间内收敛到预设性能函数限定的范围内, 其收敛时间与系统初始条件无关, 且确保系统中全部信号在有限时间均达到有界区域. 理论分析与仿真验证均表明了所提出设计方法的有效性.

关键词: 有限时间指令滤波; 固定时间控制; 预设性能; 跟踪控制; 反步法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1740

引用格式: 李应森, 陈明, 姜海洋, 等. 基于有限时间指令滤波的非线性系统固定时间预设性能控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(5): 1498-1506.

Finite-time command filtered-based fixed-time prescribed performance control

LI Ying-sen¹, CHEN Ming^{1†}, JIANG Hai-yang¹, SU Ya-kun², PENG Kai-xiang³

(1. School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114044, China; 2. College of Mathematical Sciences, Bohai University, Jinzhou 121013, China; 3. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: For a class of strict-feedback nonlinear systems, an adaptive fixed-time prescribed performance control strategy is proposed based on finite-time command filtering. Firstly, we establish an equivalent error model by using nonlinear mapping technique and appropriate error transformation. Secondly, a finite-time command-filtered based prescribed performance tracking controller is constructed through comprehensive utilization of the backstepping scheme, fixed-time control and adaptive control and so on. In the strategy, a command filter is used to solve the problem of repeated derivation of virtual control laws in the backstepping method and reduce the computational burden. In addition, prescribed performance control and fixed-time control ensure that the tracking error of the system can converge to the range limited by the prescribed performance functions in fixed time, and the convergence time is independent of the initial conditions. And all the signals in the system are guaranteed to reach the bounded region in finite time. Finally, theoretical analysis and simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: finite-time command filter; fixed-time control; prescribed performance control; tracking control; backstepping

0 引言

近年来, 非线性系统有限时间控制 (finite-time control, FTC) 已成为控制领域的热点研究问题之一, 其根本原因在于 FTC 具有快速的收敛性、良好的鲁棒性及抗干扰性. 目前, 关于非线性系统的有限时间

控制理论、方法及其应用成果颇为丰富^[1-3]. 然而, 在传统的有限时间控制中, 其收敛时间往往与系统的初始条件密切相关, 但从实际角度来说, 系统的初始条件往往无法获知. 固定时间控制使得其收敛时间不再依赖系统初始状态, 仅由设计参数决定^[4-6]. 因此,

收稿日期: 2022-10-06; 录用日期: 2023-02-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (U21A20483, 61873024, 61773072).

责任编委: 虞文武.

[†]通讯作者. E-mail: cm8061@sina.com.

研究非线性系统固定时间控制具有重要意义。

实际中很多控制系统会在运行过程中受到某些约束条件的限制。若不满足这些约束条件,会造成很多意想不到的后果,如系统性能指标下降,或是财产损失甚至人员伤亡。为了有效地解决控制系统的约束问题,多种方案被相继提出,如障碍李雅普诺夫函数法^[7]、预设性能控制方法(prescribed performance control, PPC)^[8]等。值得一提的是,跟踪误差是判断跟踪性能的重要指标,若能保证跟踪误差于有限的时间内收敛到预先设定的有界区间里,不仅能提高系统的快速性能,也能兼顾系统的稳态性能。

幸运地是,基于预设性能的有限时间控制成为解决这一问题的有效工具。近些年来该问题受到了越来越多学者的关注,大量优秀的研究成果不断涌现。文献[9]针对一类严格反馈非线性系统,应用一种新的有限时间命令滤波器实现对虚拟变量一阶导数的快速逼近,并将该滤波技术与PPC结合到反步法中,提出一种有限时间自适应预设性能控制器。文献[10]和文献[11]分别针对高阶随机非线性系统和不确定非线性系统,提出了有限时间预设性能控制策略。在上述成果中,系统模型中均存在未知非线性动力学部分,它们亦是影响系统性能的一个重要因素。因此,在对非线性系统进行预设性能控制的同时,采用自适应控制方案也是本文研究的重要内容。在过去许多年中,非线性系统自适应控制一直为控制界中的热点问题,其中以基于反步法的自适应控制最为典型^[12]。但在反步设计中,存在对虚拟控制律反复求导问题,一旦系统阶次过高,将会引起计算繁琐及微分爆炸问题。针对此问题,动态面(dynamic surface control DSC)控制策略应运而生^[13-14]。然而,该策略却没有考虑一阶滤波器产生的误差问题。在此背景下,文献[15]提出了指令滤波器的概念,其核心思想是把虚拟控制律作为指令滤波器的输入,将滤波器的输出取代虚拟控制律的导数,从而有效地解决了复杂性爆炸问题,同时,在设计过程中,还能实现滤波器的输出及输入误差极小。

综上所述,本文针对一类严格反馈非线性系统,基于有限时间指令滤波反步法,提出一种固定时间自适应预设性能跟踪控制策略。与目前现有的很多成果相比较,本文的工作主要有3个方面:1)首次将固定时间控制、有限时间滤波控制及预设性能控制相结合,所提出的控制器能保证系统在原点处是实际固定时间稳定的,且跟踪误差在固定时间内收敛在预设性能函数限定的范围内;2)基于有限时间指令滤波

反步法,实现了系统中全部信号在有限时间内到达有界区域,同时通过设计误差补偿机制削弱了滤波误差对系统性能的不利影响;3)应用模糊逻辑系统实现对系统中未知非线性动力学的辨识,在考虑了系统稳定性的同时,兼顾其暂态性和稳态性,有效地提高了系统的收敛速度及控制精度。

1 系统模型描述及预备知识

1.1 系统模型描述

以如下一类严格反馈非线性系统作为研究对象:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + f_i(\bar{x}_i(t)), & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n(t) = u(t) + f_n(x(t)); \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ 是系统状态矢量; $\bar{x}_i(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t)]^T \in R^i$; $u(t) \in R$, $y(t) \in R$ 分别表示系统的输入和输出变量; $f_i(\cdot)$ 是未知的连续光滑函数。

本文实现的目标是设计控制输入 $u(t)$, 使得系统的跟踪误差 $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 收敛在预先设定的性能函数限定的范围内,其收敛时间是有限的,且与系统的初始条件无关。此外,确保系统中所有信号在有限时间内到达有界区域。

为了后续控制策略的实现,需要如下预备知识。

1.2 预备知识

1.2.1 有限时间指令滤波

为了避免反步法中存在的复杂性爆炸问题,本文引入如下有限时间指令滤波器^[16],其数学描述为

$$\begin{cases} \dot{\varpi}_{i,1}(t) = \Theta_{i,1}, \\ \Theta_{i,1} = \Psi_i + \varpi_{i,2}, \\ \dot{\varpi}_{i,2}(t) = -c_2 \text{sign}(\varpi_{i,2} - \Theta_{i,1}), \\ i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\Psi_i = -c_1 |\varpi_{i,1} - \alpha_i|^{0.5} \text{sign}(\varpi_{i,1} - \alpha_i)$, α_i 表示滤波器的输入信号;其输出信号分别为 $x_{i+1,c} = \varpi_{i,1}$ 和 $\dot{x}_{i+1,c} = \Theta_{i,1}$; c_1, c_2 是大于零的设计参数。

注 1: 本文引入形如式(2)的有限时间指令滤波器,其主要原因在于:1)可实现系统中全部信号在有限时间达到有界区域;2)避免传统反步法中存在的复杂性爆炸问题;3)与文献[13-14]不同,引入该滤波器不需要 $y_r(t)$ 及其各阶导数均满足连续且有界的条件,只需 $y_r(t)$ 和 $\dot{y}_r(t)$ 满足该条件即可。

1.2.2 预设性能函数及误差等效变换

本文的控制目标之一就是确保跟踪误差 $e(t)$ 限定在预先设定的约束函数范围内, 设函数 $\rho(t)$ 满足正且严格递减条件, 它一般表示为

$$\begin{cases} \rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\kappa t} + \rho_\infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\rho_0, \rho_\infty, \kappa$ 表示预设的正常数. 则 $e(t)$ 的预设性能控制目标通过如下不等式实现:

$$-\delta_{\min}\rho(t) < e(t) < \delta_{\max}\rho(t), \quad (4)$$

$\delta_{\min} > 0, \delta_{\max} > 0$.

引入如下非线性映射:

$$e(t) = \rho(t)T(z_1), \quad (5)$$

其中 $T(z_1) = \frac{\delta_{\max}e^{z_1} - \delta_{\min}e^{-z_1}}{e^{z_1} + e^{-z_1}}$.

因为 $T(z_1)$ 是严格递增的, 等效变换的误差模型 z_1 可写成

$$\dot{z}_1 = \delta \left(\dot{y} - \dot{y}_r - \frac{e\dot{\rho}}{\rho} \right), \quad (6)$$

其中

$$\delta = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{1}{e/\rho + \delta_{\min}} - \frac{1}{e/\rho - \delta_{\max}} \right) > 0.$$

此外, 式(6)及后续公式中的全部时间变量 t 均省略不写.

1.2.3 一些重要引理

引理1^[4,17] 对于系统(1), 若存在一个正定函数 $V(x)$, 使得:

$$1) \quad V(x) \leq -m_1V^{n_1}(x) - m_2V^{n_2}(x), \quad (7)$$

则称系统(1)在原点处是固定时间稳定的, 且其收敛时间为

$$T_{s_1} \leq \frac{1}{m_1(n_1 - 1)} + \frac{1}{m_2(1 - n_2)}.$$

其中: 常数 $m_1 > 0, m_2 > 0, n_1 > 1, 1 > n_2 > 0$.

$$2) \quad V(x) \leq -m_1V^{n_1}(x) - m_2V^{n_2}(x) + \Xi, \quad (8)$$

则称系统(1)在原点处是实际固定时间稳定的, 且其收敛时间为

$$T_{s_2} \leq \frac{1}{m_1\beta_0(n_1 - 1)} + \frac{1}{m_2\beta_0(1 - n_2)}, \beta_0 \in (0, 1),$$

其中 $\Xi > 0$.

引理2^[18] 对于 $\phi_1 \in R, \phi_2 \in R$, 满足

$$|\phi_1|^{\eta_1} |\phi_2|^{\eta_2} \leq \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_1 + \eta_2} |\phi_1|^{\eta_1 + \eta_2} + \frac{\eta_2 \eta_3^{-\frac{\eta_1}{\eta_2}}}{\eta_1 + \eta_2} |\phi_2|^{\eta_1 + \eta_2}, \quad (9)$$

其中 η_1, η_2, η_3 为正常数.

引理3^[19] 对于 $x_j \in R (j = 1, 2, \dots, m)$ 及实数 $0 < p < 1, q > 1$, 如下不等式成立:

$$\left(\sum_{j=1}^m |x_j| \right)^p \leq \sum_{j=1}^m |x_j|^p \leq m^{1-p} \sum_{j=1}^m |x_j|^p, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^m |x_j|^q \leq \left(\sum_{j=1}^m |x_j| \right)^q \leq m^{q-1} \sum_{j=1}^m |x_j|^q. \quad (11)$$

2 主要成果

2.1 控制器设计过程

针对研究对象(1), 设计一个基于指令滤波(2)的固定时间自适应预设性能跟踪控制器. 该设计方案利用反步法实现, 需引入如下变量代换:

$$z_i = x_i - x_{i,c}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (12)$$

其中 $x_{i,c}$ 为指令滤波器(2)的输出. 为了消除该滤波器产生的滤波误差, 引入如下误差补偿机制:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \delta \left(-\frac{k_{11}}{\delta} \xi_1^3 + \xi_2 + x_{2,c} - \alpha_1 - \frac{\lambda_1}{\delta} \text{sign}(\xi_1) \right), \\ \dot{\xi}_2 = -k_{21} \xi_2^3 - \delta \xi_1 + \xi_3 + x_{3,c} - \alpha_2 - \lambda_2 \text{sign}(\xi_2), \\ \dot{\xi}_k = -k_{k1} \xi_k^3 - \xi_{k-1} + \xi_{k+1} + x_{k+1,c} - \\ \quad \alpha_k - \lambda_k \text{sign}(\xi_k), \\ \dot{\xi}_n = -k_{n1} \xi_n^3 - \xi_{n-1} - \lambda_n \text{sign}(\xi_n). \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\xi_k(0) = 0, k_{k1}, \lambda_k$ 为正的设计参数. 补偿后的跟踪误差信号为

$$v_i = z_i - \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

step 1: 设计虚拟控制律 α_1 和自适应律 $\hat{\theta}_1$. 首先, 利用式(1), (6), (12)和(14), 计算

$$\dot{v}_1 = \delta \left(z_2 + x_{2,c} + f_1 - \dot{y}_r - \frac{e\dot{\rho}}{\rho} \right) - \dot{\xi}_1. \quad (15)$$

选择李雅普诺夫函数

$$V_1 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_1^2}{2d_1}, \quad (16)$$

其中 $d_1 > 0$. 定义估计误差 $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ 是模糊逻辑系统逼近误差的估计值, $\hat{\theta}_1$ 是模糊逻辑系统理想权值 θ_1 的估计值. 对 V_1 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = v_1 \left[\delta \left(z_2 + \alpha_1 - \dot{y}_r - \frac{e\dot{\rho}}{\rho} \right) + \Delta_1 - \right. \\ \left. \delta \xi_2 + \lambda_1 \text{sign}(\xi_1) \right] - \frac{\tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1}{d_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\Delta_1 = \delta f_1 + k_{11} \xi_1^3$.

设计 α_1 和 $\dot{\hat{\theta}}_1$, 有

$$\alpha_1 = \frac{-k_{11}}{\delta} v_1 - \frac{k_{12}}{\delta} v_1^3 - \frac{v_1 \hat{\theta}_1 S_1^T S_1}{2\delta b_1^2} + \dot{y}_r + \frac{e\dot{\rho}}{\rho}, \quad (18)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{d_1}{2b_1^2} v_1^2 S_1^T S_1 - \gamma_{11} \hat{\theta}_1 - \frac{\gamma_{12}}{d_1} \hat{\theta}_1^3, \quad (19)$$

其中 $k_{12}, b_1, \gamma_{11}, \gamma_{12}$ 为正的设计参数.

将式(18)代入(17)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & v_1 \left(-k_{11} v_1 - k_{12} v_1^3 - \frac{v_1 \hat{\theta}_1 S_1^T S_1}{2b_1^2} \right) + \\ & v_1 \delta v_2 + v_1 \Delta_1 + \lambda_1 v_1 \text{sign}(\xi_1) - \frac{\tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1}{d_1}. \end{aligned} \quad (20)$$

在式(20)中, Δ_1 是未知的, 可用模糊逻辑系统对其进行逼近^[20], 可以表示为

$$\Delta_1 = W_1^T S_1 + \varepsilon_1, \quad (21)$$

其中 ε_1 是近似误差且满足 $|\varepsilon_1| \leq \tau_1, \tau_1 > 0$.

依据杨不等式, 得

$$v_1 \Delta_1 \leq \frac{v_1^2 \|W_1\|^2 S_1^T S_1}{2b_1^2} + \frac{b_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\tau_1^2}{2}, \quad (22)$$

$$\lambda_1 v_1 \text{sign}(\xi_1) \leq \frac{\lambda_1 v_1^2}{2} + \frac{\lambda_1}{2}, \quad (23)$$

此处令 $\theta_1 = \|W_1\|^2$. 将式(19), (22)和(23)代入(20), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\check{K}_{11} v_1^2 - k_{12} v_1^4 + \delta v_1 v_2 + \\ & \check{C}_1 + \frac{\gamma_{11}}{d_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + \frac{\gamma_{12}}{d_1^2} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1^3, \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\check{K}_{11} = k_{11} - \frac{(1 + \lambda_1)}{2}, \quad \check{C}_1 = \frac{b_1^2}{2} + \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{\lambda_1}{2}.$$

进一步, 式(24)中的 $-\check{K}_{11} v_1^2$ 可以写成

$$-\check{K}_{11} v_1^2 \leq -(\check{K}_{11} v_1^2)^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^3. \quad (25)$$

根据式(25), 可将(24)进一步表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\bar{K}_{11} \left(\frac{v_1^2}{2} \right)^{\frac{3}{4}} - \bar{K}_{12} \left(\frac{v_1^2}{2} \right)^2 + \\ & \delta v_1 v_2 + \frac{\gamma_{11}}{d_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + \frac{\gamma_{12}}{d_1^2} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1^3 + C_1, \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\bar{K}_{11} = (2\check{K}_{11})^{\frac{3}{4}}, \quad \bar{K}_{12} = 4k_{12}, \quad C_1 = \check{C}_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^3.$$

step 2: 设计虚拟控制律 α_2 和自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_2$.

补偿后的误差跟踪信号 $v_2 = z_2 - \xi_2$, 计算

$$\dot{v}_2 = z_3 + x_{3,c} + f_2 - \dot{x}_{2,c} - \dot{\xi}_2. \quad (27)$$

考虑李雅普诺夫函数为

$$V_2 = V_1 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_2^2}{2d_2}, \quad (28)$$

其中: $d_2 > 0, \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$. 计算 \dot{V}_2 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \dot{V}_1 + v_2 (v_3 + \alpha_2 - \dot{x}_{2,c} + \delta \xi_1) + \\ & v_2 \Delta_2 + \lambda_2 v_2 \text{sign}(\xi_2) - \frac{\tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2}{d_2}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\Delta_2 = f_2 + k_{21} \xi_2^3$.

α_2 和 $\dot{\hat{\theta}}_2$ 设计为

$$\alpha_2 = -k_{21} v_2 - \delta z_1 - k_{22} v_2^3 - \frac{v_2 \hat{\theta}_2 S_2^T S_2}{2b_2^2} + \dot{x}_{2,c}, \quad (30)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \frac{d_2}{2b_2^2} v_2^2 S_2^T S_2 - \gamma_{21} \hat{\theta}_2 - \frac{\gamma_{22}}{d_2} \hat{\theta}_2^3, \quad (31)$$

其中 $k_{22}, b_2, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ 为正的设计参数.

将式(30)代入(29)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & v_2 (-k_{21} v_2 - k_{22} v_2^3 - \delta v_1 + v_3) + \dot{V}_1 - \\ & \frac{v_2^2 \hat{\theta}_2 S_2^T S_2}{2b_2^2} + v_2 \Delta_2 + \lambda_2 v_2 \text{sign}(\xi_2) - \frac{\tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2}{d_2}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\Delta_2 = f_2 + k_{21} \xi_2^3$ 是未知的. 同样, 应用模糊逻辑系统对其进行逼近, 即 $\delta_2 = W_2^T S_2 + \varepsilon_2, |\varepsilon_2| \leq \tau_2, \tau_2 > 0$. 与式(22)和(23)的推导过程类似, 得到如下不等式:

$$v_2 \Delta_2 \leq \frac{v_2^2 \theta_2 S_2^T S_2}{2b_2^2} + \frac{b_2^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{\tau_2^2}{2}, \quad (33)$$

$$\lambda_2 v_2 \text{sign}(\xi_2) \leq \frac{\lambda_2 v_2^2}{2} + \frac{\lambda_2}{2}, \quad (34)$$

其中 $\theta_2 = \|W_2\|^2$.

将式(33)和(34)及 $\dot{\hat{\theta}}_2$ 代入(32)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \dot{V}_1 - \check{K}_{21} v_2^2 - k_{22} v_2^4 - \delta v_1 v_2 + \\ & v_2 v_3 + \check{C}_2 + \frac{\gamma_{21}}{d_2} \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2 + \frac{\gamma_{22}}{d_2^2} \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2^3. \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\check{K}_{21} = k_{21} - \frac{1 + \lambda_2}{2}, \quad \check{C}_2 = \frac{b_2^2}{2} + \frac{\tau_2^2}{2} + \frac{\lambda_2}{2}.$$

因为如下不等式成立:

$$-\check{K}_{21} v_2^2 \leq -(\check{K}_{21} v_2^2)^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^3, \quad (36)$$

所以根据式(26)和(36), 可将(35)重新表达成为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\sum_{j=1}^2 \bar{K}_{j1} \left(\frac{v_j^2}{2} \right)^{\frac{3}{4}} - \sum_{j=1}^2 \bar{K}_{j2} \left(\frac{v_j^2}{2} \right)^2 + v_2 v_3 + \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_{j1}}{d_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_{j2}}{d_j^2} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j^3 + \sum_{j=1}^2 C_j. \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\bar{K}_{21} = (2\check{K}_{21})^{\frac{3}{4}}, \quad \bar{K}_{22} = 4k_{22}, \quad C_2 = \check{C}_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^3.$$

step k ($2 < k < n$): 设计 α_k 和 $\dot{\hat{\theta}}_k$.

容易求得

$$\dot{v}_k = f_k + z_{k+1} + x_{k+1,c} - \dot{x}_{k,c} - \dot{\xi}_k. \quad (38)$$

选择李雅普诺夫函数

$$V_k = V_{k-1} + \frac{v_k^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_k^2}{2d_k}. \quad (39)$$

其中: $d_k > 0, \tilde{\theta}_k = \theta_k - \hat{\theta}_k$.

设计 α_k 和 $\dot{\hat{\theta}}_k$, 有

$$\alpha_k = -k_{k1}v_k - z_{k-1} - k_{k2}v_k^3 - \frac{v_k\hat{\theta}_k S_k^T S_k}{2b_k^2} + \dot{x}_{k,c}, \quad (40)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_k = \frac{d_k}{2b_k^2} v_k^2 S_k^T S_k - \gamma_{k1}\hat{\theta}_k - \frac{\gamma_{k2}}{d_k} \hat{\theta}_k^3, \quad (41)$$

其中 $k_{k2}, b_k, \gamma_{k1}, \gamma_{k2}$ 为正的的设计参数.

对 V_k 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= v_k(v_{k+1} - k_{k1}v_k - v_{k-1} - k_{k2}v_k^3) + \\ &\dot{V}_{k-1} - \frac{v_k^2\hat{\theta}_k S_k^T S_k}{2b_k^2} + \Delta_k v_k + \\ &\lambda_k v_k \text{sign}(\xi_k) - \frac{\tilde{\theta}_k \dot{\hat{\theta}}_k}{d_k}, \end{aligned} \quad (42)$$

其中 $\Delta_k = f_k + k_{k1}\xi_k^3$. 与前面推导过程类似, 有

$$\Delta_k = W_k^T S_k + \varepsilon_k, \quad (43)$$

$$v_k \Delta_k \leq \frac{v_k^2 \theta_k S_k^T S_k}{2b_k^2} + \frac{b_k^2}{2} + \frac{v_k^2}{2} + \frac{\tau_k^2}{2}, \quad (44)$$

$$\lambda_k v_k \text{sign}(\xi_k) \leq \frac{\lambda_k v_k^2}{2} + \frac{\lambda_k}{2}. \quad (45)$$

其中: $|\varepsilon_k| \leq \tau_k, \tau_k > 0, \theta_k = \|W_k\|^2$.

结合式(41), (44)和(45), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq \\ &-\sum_{j=1}^k \bar{K}_{j1} \left(\frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} - \sum_{j=1}^k \bar{K}_{j2} \left(\frac{v_j^2}{2}\right)^2 + v_k v_{k+1} + \\ &\sum_{j=1}^k \frac{\gamma_{j1}}{d_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \sum_{j=1}^k \frac{\gamma_{j2}}{d_j^2} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j^3 + \sum_{j=1}^k C_j. \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$\bar{K}_{j1} = k_{j1} - \frac{1 + \lambda_j}{2}, \bar{K}_{j1} = (2\bar{K}_{j1})^{\frac{3}{4}}, \bar{K}_{j2} = 4k_{j2},$$

$$\bar{C}_j = \frac{b_j^2}{2} + \frac{\tau_j^2}{2} + \frac{\lambda_j}{2}, C_j = \bar{C}_j + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

step n: 设计实际控制律 u 和自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_n$.

选择李雅普诺夫函数

$$V_n = V_{n-1} + \frac{v_n^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_n^2}{2d_n}, \quad (47)$$

其中: $d_n > 0, \tilde{\theta}_n = \theta_n - \hat{\theta}_n$.

u 和 $\dot{\hat{\theta}}_n$ 设计为

$$\begin{aligned} u &= -k_{n1}v_n - k_{n2}v_n^3 - \frac{v_n}{2} - z_{n-1} - \\ &\frac{v_n \hat{\theta}_n S_n^T S_n}{2b_n^2} + \dot{x}_{n,c}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \frac{d_n}{2b_n^2} v_n^2 S_n^T S_n - \gamma_{n1}\hat{\theta}_n - \frac{\gamma_{n2}}{d_n} \hat{\theta}_n^3, \quad (49)$$

其中 $k_{n1}, k_{n2}, b_n, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}$ 为正的的设计参数.

对 V_n 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= -k_{n1}v_n^2 - k_{n2}v_n^4 - \frac{v_n^2}{2} - v_{n-1}v_n + \\ &\dot{V}_{n-1} - \frac{v_n^2 \hat{\theta}_n S_n^T S_n}{2b_n^2} + v_n \Delta_n + \\ &\lambda_n v_n \text{sign}(\xi_n) - \frac{\tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n}{d_n}, \end{aligned} \quad (50)$$

其中 $\Delta_n = f_n + k_{n1}\xi_n^3$. 此处, 与第 k 步推导过程类似,

可有 $\Delta_n = W_n^T S_n + \varepsilon_n, |\varepsilon_n| \leq \tau_n, \tau_n > 0$.

同理可得

$$\Delta_n \Delta_n \leq \frac{v_n^2 \theta_n S_n^T S_n}{2b_n^2} + \frac{b_n^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} + \frac{\tau_n^2}{2}, \quad (51)$$

$$\lambda_n v_n \text{sign}(\xi_n) \leq \frac{\lambda_n v_n^2}{2} + \frac{\lambda_n}{2}, \quad (52)$$

其中 $\theta_n = \|W_n\|^2$.

综合式(48)~(52), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\sum_{j=1}^n \bar{K}_{j1} \left(\frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} - \sum_{j=1}^n \bar{K}_{j2} \left(\frac{v_j^2}{2}\right)^2 + \\ &\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1}}{d_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2}}{d_j^2} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j^3 + \sum_{j=1}^n C_j, \end{aligned} \quad (53)$$

其中

$$\bar{K}_{n1} = k_{n1} - \frac{\lambda_n}{2}, \bar{K}_{n1} = (2\bar{K}_{n1})^{\frac{3}{4}}, \bar{K}_{n2} = 4k_{n2},$$

$$\bar{C}_n = \frac{b_n^2}{2} + \frac{\tau_n^2}{2} + \frac{\lambda_n}{2}, C_n = \bar{C}_n + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

因为 $\tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j = -\tilde{\theta}_j^2/2 + \theta_j^2/2$, 可得

$$\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1}}{d_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j \leq -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \theta_j^2}{2d_j}. \quad (54)$$

结合式(54), 可将式(53)重新表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq \\ &-\tilde{\mu}_1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{\tilde{\mu}_2}{n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^2 - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j} + \\ &\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \theta_j^2}{2d_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2}}{d_j^2} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j^3 + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}} - \\ &\left(\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}} + \sum_{j=1}^n C_j. \end{aligned} \quad (55)$$

其中

$$\tilde{\mu}_1 = \min\{\bar{K}_{11}, \bar{K}_{21}, \dots, \bar{K}_{n1}\},$$

$$\tilde{\mu}_2 = \min\{\bar{K}_{12}, \bar{K}_{22}, \dots, \bar{K}_{n2}\}.$$

基于引理2, 设 $\phi_1 = 1, \phi_2 = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j}, \eta_1 =$

$1 - \beta, \eta_2 = \beta, \eta_3 = e^{(\beta/(1-\beta)) \ln \beta}, \beta \in (0, 1)$, 得

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \beta_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j}, \quad (56)$$

其中 $\beta_1 = (1 - \beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} |_{\beta=\frac{3}{4}} > 0$. 将式(56)代入(55), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\tilde{\mu}_1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{\tilde{\mu}_2}{n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^2 - \\ & \left(\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}} + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j^3}{d_j^2} + \Pi, \end{aligned} \quad (57)$$

其中 $\Pi = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \theta_j^2}{2d_j} + \sum_{j=1}^n C_j + \beta_1$.

因为 $\tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j^3 = \tilde{\theta}_j (\theta_j^3 - 3\theta_j^2 \tilde{\theta}_j + 3\theta_j \tilde{\theta}_j^2 - \tilde{\theta}_j^3)$, 所以式(57)可以重新表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\tilde{\mu}_1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{\tilde{\mu}_2}{n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^2 + \\ & \sum_{j=1}^n \frac{3\gamma_{j2} \theta_j \tilde{\theta}_j^3}{d_j^2} - \left(\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j1} \tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}} - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2} \tilde{\theta}_j^4}{d_j^2} + \\ & \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2} \tilde{\theta}_j \theta_j^3}{d_j^2} - \sum_{j=1}^n \frac{3\gamma_{j2} \theta_j^2 \tilde{\theta}_j^2}{d_j^2} + \Pi. \end{aligned} \quad (58)$$

利用杨不等式, 有

$$\sum_{j=1}^n \frac{3\gamma_{j2} \theta_j \tilde{\theta}_j^3}{d_j^2} \leq \sum_{j=1}^n \frac{9\gamma_{j2} \epsilon^{\frac{4}{3}} \tilde{\theta}_j^4}{4d_j^2} + \sum_{j=1}^n \frac{3\gamma_{j2} \theta_j^4}{4\epsilon^4 d_j^2}, \quad (59)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2} \tilde{\theta}_j \theta_j^3}{d_j^2} \leq \sum_{j=1}^n \frac{3\gamma_{j2} \tilde{\theta}_j^2 \theta_j^2}{d_j^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2} \theta_j^4}{12d_j^2}, \quad (60)$$

其中 $\epsilon > 0$. 将式(59)和(60)代入(58), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\tilde{\mu}_1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{\tilde{\mu}_2}{n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^2 - \\ & \tilde{\mu}_3 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^2 - \tilde{\mu}_4 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}} + \tilde{\Pi}, \end{aligned} \quad (61)$$

其中

$$\Upsilon_j = 4\gamma_{j2} - 9\gamma_{j2} \epsilon^{\frac{4}{3}},$$

$$\tilde{\Pi} = \Pi + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{j2} \theta_j^4}{12d_j^2} + \sum_{j=1}^n \frac{3\gamma_{j2} \theta_j^4}{4\epsilon^4 d_j^2},$$

$$\tilde{\mu}_3 = \min\{\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n\},$$

$$\tilde{\mu}_4 = \min\{\gamma_{11}^{3/4}, \dots, \gamma_{n1}^{3/4}\}.$$

进一步, 定义 $\hat{\mu}_1 = \min\{\tilde{\mu}_2/n, \tilde{\mu}_3\}, \mu_2 = \min\{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_4\}$, 则可将式(61)表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\hat{\mu}_1 \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^2 \right\} - \\ & \mu_2 \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}} \right\} + \tilde{\Pi}. \end{aligned} \quad (62)$$

根据引理3, 可得到如下两个不等式:

$$V_n^2 \leq 2 \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^2 \right\}, \quad (63)$$

$$V_n^{\frac{3}{4}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \frac{v_j^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\theta}_j^2}{2d_j}\right)^{\frac{3}{4}}. \quad (64)$$

进而可将式(62)表示为

$$\dot{V}_n \leq -\mu_1 V_n^2 - \mu_2 V_n^{\frac{3}{4}} + \tilde{\Pi}, \quad (65)$$

其中 $\mu_1 = \hat{\mu}_1/2$.

2.2 收敛性分析

定理1 针对系统(1), 应用有限时间滤波器(2)和误差补偿机制(13). 若采用虚拟控制律(18), (30), (40), 实际控制律(48)和自适应律(19), (31), (41), (49), 则该闭环系统在原点处是实际固定时间稳定的, 且确保实现如下目标:

- 1) 系统中全部信号在有限时间内达到有界区域.
- 2) 跟踪误差 $e(t)$ 在固定时间 T_s 内收敛在预设性能函数约束的范围内, 即 $-\delta_{\min} \rho < e(t) < \delta_{\max} \rho$.

3) $e(t)$ 的收敛时间为 $T_s \leq \max\{T_1, T_2\}$. 其中

$$T_1 = \frac{1}{\tilde{\vartheta}_0} + \frac{2}{\tilde{\vartheta}_1}, \quad T_2 = \frac{1}{\tilde{\rho}_0 \mu_1} + \frac{4}{\tilde{\rho}_0 \mu_2},$$

$$\tilde{\vartheta}_0 = \frac{4}{n} \min\{k_{11}, k_{21}, \dots, k_{n1}\},$$

$$\tilde{\vartheta}_1 = \sqrt{2}(\tilde{L}_0 - \varpi_1), \quad \tilde{L}_0 = \min\{\lambda_i\}, \quad \tilde{\rho}_0 \in (0, 1).$$

证明 从式(65)可以看出, 若 $-\mu_1 V_n^2 + \tilde{\Pi} \leq 0$, 则 $\dot{V}_n \leq -\mu_2 V_n^{3/4} \leq 0$. 所以根据引理1, 系统(1)在原点处是实际固定时间稳定的, 即信号 $v_i, \tilde{\theta}_i$ 在固定时间内收敛到原点的小邻域内. 因为 $z_i = v_i - \xi_i$, 若使得 z_i 在有限时间内到达有界区域, ξ_i 也得在有限时间到达有界区域. 下面对 ξ_i 的有界性加以证明, 选择如下李雅普诺夫函数:

$$V_\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (66)$$

对 V_ξ 求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi = & -4 \sum_{i=1}^n k_{1i} \left(\frac{\xi_i^2}{2}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi_i| + \\ & \delta \xi_1 (x_{2,c} - \alpha_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \xi_i (x_{i+1,c} - \alpha_i). \end{aligned} \quad (67)$$

不难得到

$$-4 \sum_{i=1}^n k_{1i} \left(\frac{\xi_i^2}{2}\right)^2 \leq -\tilde{\vartheta}_0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{2}\right)^2. \quad (68)$$

利用式(65)及引理3, 得到

$$\dot{V}_\xi \leq -\tilde{\vartheta}_0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{2}\right)^2 - \sqrt{2} \tilde{L}_0 \sum_{i=1}^n V_\xi^{\frac{1}{2}} +$$

$$|\delta - 1| |\xi_1| |x_{2,c} - \alpha_1| + \sqrt{2} \varpi_1 \sum_{i=1}^n V_{\xi}^{\frac{1}{2}}.$$

所以

$$\dot{V}_{\xi} \leq -\tilde{\vartheta}_0 V_{\xi}^2 - \tilde{\vartheta}_1 V_{\xi}^{\frac{1}{2}}. \quad (69)$$

由引理1可知, ξ_i 在固定时间内收到原点, 所以得出 z_i 在固定时间内亦是收敛到原点附近的有界区域内. 进一步, 很容易通过 α_{i-1} 和 u 的公式得出它们的有界性; 借助 $x_i = z_i - x_{i,c}$, 可知 x_i 在有限时间内到达有界区域. 因此, 系统中全部信号在有限时间内到达有界区域.

接下来, 证明跟踪误差能在固定时间内收敛到预先设定的区域内. 由式(65)可知, 如下不等式成立:

$$\dot{V}_n \leq -\mu_2 V_n^{\frac{3}{4}} - (1 - \bar{\rho}_0) \mu_1 V_n^2 - \bar{\rho}_0 \mu_1 V_n^2 + \ddot{I}. \quad (70)$$

根据式(70), 若 $V_n^2 \geq \ddot{I}/(\bar{\rho}_0 \mu_1)$ 成立, 则可得 $\dot{V}_n \leq -\mu_2 V_n^{\frac{3}{4}} - (1 - \bar{\rho}_0) \mu_1 V_n^2$, 进而导出

$$\left\{ V_n : V_n < \sqrt{\frac{\ddot{I}}{\bar{\rho}_0 \mu_1}} \right\}. \quad (71)$$

不难得到 $|v_i| < \sqrt{2} \sqrt{\ddot{I}/(\bar{\rho}_0 \mu_1)}$. 由 $z_i = v_i + \xi_i$, 得

$$|z_i| \leq |v_i| + |\xi_i| \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{\ddot{I}}{\bar{\rho}_0 \mu_1}}. \quad (72)$$

根据 $e = \rho T(z_1)$, $T(z_1) = \frac{\delta_{\max} e^{z_1} - \delta_{\min} e^{-z_1}}{e^{z_1} + e^{-z_1}}$, 可

求得 $z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\delta_{\min} \rho + e}{\delta_{\max} \rho - e}$. 所以由式(72), 可得

$$|z_1| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{\delta_{\min} \rho + e}{\delta_{\max} \rho - e} \right| \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{\ddot{I}}{\bar{\rho}_0 \mu_1}}. \quad (73)$$

限于篇幅, 这里仅讨论 $\frac{\delta_{\min} \rho + e}{\delta_{\max} \rho - e} \geq 1$ 的情况. 依据式(73), 得到

$$-A \leq \ln \frac{e + \delta_{\min} \rho}{\delta_{\max} \rho - e} \leq A, \quad (74)$$

其中 $A = 2 \sqrt{2} \sqrt{\ddot{I}/(\bar{\rho}_0 \mu_1)}$. 由式(74)可得

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{\min} \rho + e}{\delta_{\max} \rho - e} &\leq e^A \Rightarrow \\ e &\leq \delta_{\max} \rho - \frac{\delta_{\max} \rho + \delta_{\min} \rho}{e^A + 1} < \delta_{\max} \rho. \end{aligned} \quad (75)$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{\min} \rho + e}{\delta_{\max} \rho - e} &\geq 1 \Rightarrow \\ e &\geq \frac{\delta_{\max} \rho - \delta_{\min} \rho}{2} \frac{\delta_{\max} \rho + \delta_{\min} \rho - 2\delta_{\min} \rho}{2} \geq \end{aligned}$$

$$-\delta_{\min} \rho. \quad (76)$$

综合式(75)和(76), 得到 $-\delta_{\min} \rho < e < \delta_{\max} \rho$.

最后讨论跟踪误差的收敛时间问题. 由式(65)和(69), 基于引理1, 可容易得到其收敛时间 T_1 和 T_2 的表达式. 详细计算过程可查阅文献[4,17]中的推导过程, 此处略. □

3 仿真实证

下面, 将本文提出的设计方案应用到单链机械臂系统, 讨论其轨迹跟踪问题, 其系统模型为

$$\begin{cases} M\ddot{q} + \Gamma\dot{q} + N \sin(q) = I, \\ F\dot{I} + AI + K_b q = V_d. \end{cases} \quad (77)$$

其中: q, \dot{q}, \ddot{q} 依次表示连杆的角位置、速度和加速度. I 和 V_d 分别为电机电枢电流和机电扭矩.

选取状态变量 $x_1 = q, x_2 = \dot{q}, x_3 = I$, 令输入变量 $u = V_d$, 则将式(77)写成状态空间描述形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{N}{M} \sin(x_1) - \frac{\Gamma}{M} x_2 + \frac{1}{M} x_3, \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_b}{F} x_1 - \frac{\Lambda}{F} x_3 + \frac{1}{F} u. \end{cases} \quad (78)$$

各参数选择为: $M = 1, \Gamma = 1, N = 2, F = 1, \Lambda = 1, K_b = 2$. 设期望轨迹 $y_r = \Pi \sin(t)(1 - e^{-0.1t})/3$. 系统初始状态 $X(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = [0.1, 0.1, 0.1]^T$.

根据定理1, 设计固定时间自适应预设性能跟踪控制器, 取预设性能函数 $\rho = 6e^{-2t} + 0.5, \delta_{\max} = \delta_{\min} = 0.5$. 该控制器中的设计参数分别为: $k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = k_{31} = k_{32} = 10, b_1 = b_2 = b_3 = 10, d_1 = d_2 = d_3 = 1, \gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 0.5$. 有限时间滤波器中的设计参数 $c_1 = c_2 = 2.8$. 误差补偿机制的设计参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.1$. 设 $\hat{\theta}_1(0) = 0.1, \hat{\theta}_2(0) = 0.2, \hat{\theta}_3(0) = 0.3$.

仿真结果如图1~图8所示. 图1为实际输出和期望输出的响应曲线; 跟踪误差的轨线如图2所示. 上述仿真结果表明, 在本文所设计的控制器作用下, 获得了良好的跟踪效果, 实现了跟踪误差快速收敛且保持在预先设定的区域内. 图3为状态 x_2, x_3 的响应曲线; 图4和图5分别表示自适应律 $\hat{\theta}_i$ 和控制输入的时间变化曲线. 以上结果表明, 上述变量均在有限时间内到达有界区域. 图6曲线表明 ξ_i 在有限时间到达有界区域. 同样, 图7和图8中的指令滤波器输出也在有界区域内随时间变化.

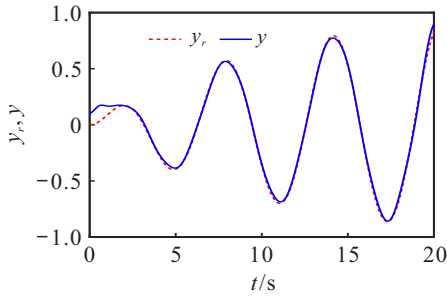


图1 实际输出与期望输出响应曲线

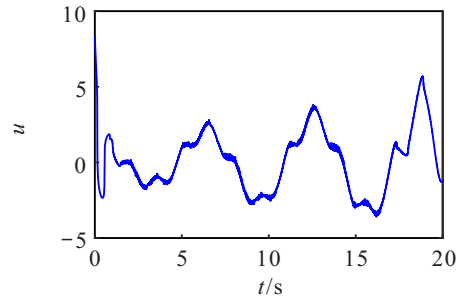


图5 控制输入曲线

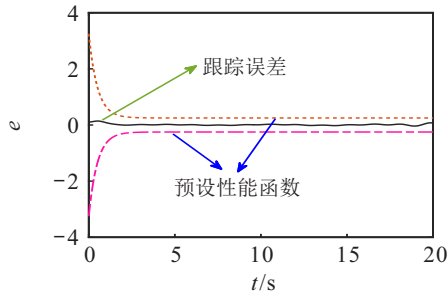


图2 跟踪误差变化轨迹

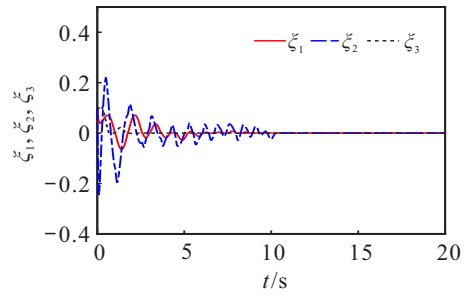


图6 xi_1, xi_2, xi_3 的变化曲线

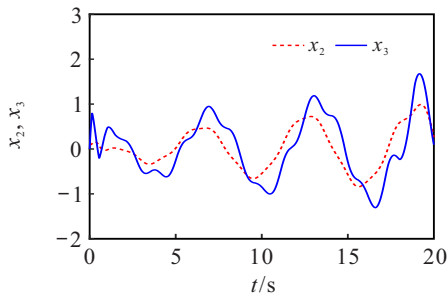


图3 状态 x_2, x_3 的响应曲线

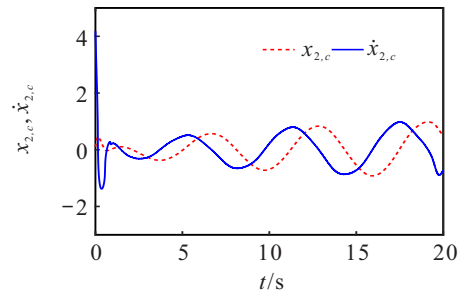


图7 x_{2,c}, x_{2,c} 的变化曲线

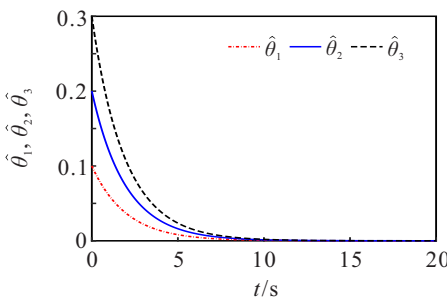


图4 自适应律 theta_hat_i (i=1,2,3) 的变化曲线

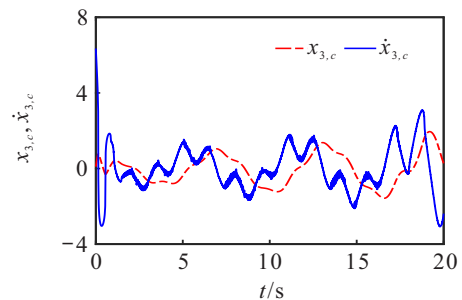


图8 x_{3,c}, x_{3,c} 的变化曲线

综上,仿真结果验证了本设计方案的有效性.

4 结论

本文基于有限时间滤波反步法,设计了一个固定时间预设性能跟踪控制器.该策略不仅保证系统中全部状态在有限时间内到达有界区域,同时使得其跟踪误差在固定时间内收敛于确定的有界区域,且收敛时间只依赖于设计参数.与传统的反步法相比,该方法克服了复杂性爆炸问题,加快了滤波速度.然而,文中引入的有限时间滤波器由于符号函数的存在,导致控制输入存在抖振问题.在今后的研究中,拟将对此

问题做深入研究.同时,如何将该成果应用到具有一般形式的非线性系统,亦是未来的主要研究方向.

参考文献(References)

[1] 刘婷婷, 杨轩, 黄丽琼. 切换非线性正系统的有限时间稳定性[J]. 控制与决策, 2022, 37(7): 1915-1920.
(Liu T T, Yang X, Huang L Q. Finite-time stability of switched nonlinear positive systems[J]. Control and Decision, 2022, 37(7): 1915-1920.)

[2] Liu Y C, Zhu Q D. Adaptive fuzzy finite-time control for nonstrict-feedback nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(10): 10420-10429.

- [3] Wang L B, Wang H Q, Liu P X. Adaptive fuzzy finite-time control of stochastic nonlinear systems with actuator faults[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(1): 523-536.
- [4] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [5] 王芳, 吕紫青, 单锐, 等. 输出受限的不确定非线性系统的自适应固定时间控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(9): 2265-2273.
(Wang F, Lv Z Q, Shan R, et al. Adaptive fixed-time control for uncertain nonlinear systems with output constraints[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(9): 2265-2273.)
- [6] 刘宜成, 熊宇航, 杨海鑫. 基于RBF神经网络的多关节机器人固定时间滑模控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 2790-2798.
(Liu Y C, Xiong Y H, Yang H X. Fixed-time sliding mode control of multi-joint robot based on RBF neural network[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(11): 2790-2798.)
- [7] Yu J P, Zhao L, Yu H S, et al. Barrier Lyapunov functions-based command filtered output feedback control for full-state constrained nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2019, 105: 71-79.
- [8] Sui S, Philip Chen C L, Tong S C. A novel adaptive NN prescribed performance control for stochastic nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(7): 3196-3205.
- [9] Cui G Z, Yu J P, Shi P. Observer-based finite-time adaptive fuzzy control with prescribed performance for nonstrict-feedback nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(3): 767-778.
- [10] Sui S, Philip Chen C L, Tong S C. Finite-time adaptive fuzzy prescribed performance control for high-order stochastic nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(7): 2227-2240.
- [11] Sun W, Wu Y Q, Sun Z Y. Command filter-based finite-time adaptive fuzzy control for uncertain nonlinear systems with prescribed performance[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(12): 3161-3170.
- [12] Li X Y, He J S, Wen C Y, et al. Backstepping-based adaptive control of a class of uncertain incommensurate fractional-order nonlinear systems with external disturbance[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(4): 4087-4095.
- [13] Zhang T P, Ge S S. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form[J]. *Automatica*, 2008, 44(7): 1895-1903.
- [14] Shi X C, Lim C C, Shi P, et al. Adaptive neural dynamic surface control for nonstrict-feedback systems with output dead zone[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(11): 5200-5213.
- [15] Farrell J A, Polycarpou M, Sharma M, et al. Command filtered backstepping[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1391-1395.
- [16] Levant A. Robust exact differentiation via sliding mode technique[J]. *Automatica*, 1998, 34(3): 379-384.
- [17] Jin X. Adaptive fixed-time control for MIMO nonlinear systems with asymmetric output constraints using universal barrier functions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(7): 3046-3053.
- [18] Wang H, Zhu Q X. Adaptive output feedback control of stochastic nonholonomic systems with nonlinear parameterization[J]. *Automatica*, 2018, 98: 247-255.
- [19] Wang F, Chen B, Liu X P, et al. Finite-time adaptive fuzzy tracking control design for nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(3): 1207-1216.
- [20] Wang L X, Mendel J M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, 3(5): 807-814.

作者简介

李应森(1981—), 男, 副教授, 硕士, 从事复杂系统容错控制、鲁棒控制等研究, E-mail: 1413388251@qq.com;

陈明(1977—), 女, 教授, 博士, 从事非线性系统容错控制、预设性能控制等研究, E-mail: cm8061@sina.com;

姜海洋(1997—), 男, 硕士, 从事非线性系统控制理论与方法的研究, E-mail: 978415435@qq.com;

苏亚坤(1977—), 女, 教授, 博士, 从事非线性控制自适应控制、鲁棒控制等研究, E-mail: yasuyifan@163.com;

彭开香(1971—), 男, 教授, 博士, 从事复杂工程系统故障诊断与容错控制、工业大数据分析 with 过程优化等研究, E-mail: kaixiang@ustb.edu.cn.