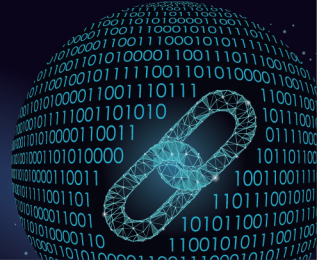




中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



符号图下含扰动的多智能体系统预定时间二分一致性

马小陆, 谭毅波, 梅宏

引用本文:

马小陆, 谭毅波, 梅宏. 符号图下含扰动的多智能体系统预定时间二分一致性[J]. *控制与决策*, 2024, 39(5): 1517–1526.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1688>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制

Group attitude coordinated control of multi-spacecraft with directed switching topologies

控制与决策. 2021, 36(10): 2389–2398 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0311>

孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid

控制与决策. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

基于模型依赖驻留时间的异步切换控制

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time

控制与决策. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

符号图下含扰动的多智能体系统预定时间二分一致性

马小陆^{1†}, 谭毅波¹, 梅宏²

(1. 安徽工业大学 电气与信息工程学院, 安徽 马鞍山 243002; 2. 南京航空航天大学 航天学院, 南京 210000)

摘要: 研究符号图下具有扰动的多智能体系统二分一致性控制问题. 考虑了线性系统、非线性不确定系统以及切换拓扑的情况, 分别提出相应的预定时间控制器, 各控制器可使系统在预定时间内实现二分一致性. 通过 Lyapunov 稳定性理论、代数图论和矩阵分析等验证算法的准确性; 仿真对比实验验证了所提算法的可行性和有效性; 相较于有限时间控制算法, 所提算法的收敛时间不依赖于初始状态, 可以通过选择单一时间参数设定系统收敛时间上界; 相较于固定时间控制算法, 所提算法预设收敛时间与控制算法参数无关, 设定简单, 具有更低的保守性.

关键词: 符号图; 多智能体系统; 二分一致性; 线性系统; 非线性不确定系统; 切换拓扑; 预定时间

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1688

引用格式: 马小陆, 谭毅波, 梅宏. 符号图下含扰动的多智能体系统预定时间二分一致性[J]. 控制与决策, 2024, 39(5): 1517-1526.

Predefined-time bipartite consensus of multi-agent systems with disturbances under signed graph

MA Xiao-lu^{1†}, TAN Yi-bo¹, MEI Hong²

(1. School of Electrical and Information Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243002, China; 2. College of Aeronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210000, China)

Abstract: The bipartite consensus control problem of multi-agent systems with disturbances under signed graph is studied. Considering the linear system, nonlinear uncertain system and switching topology, the corresponding predetermined time controllers are proposed respectively. Each controller enables the system achieve bipartite consensus within a predetermined time. The correctness of the algorithm is proved using the Lyapunov stability theory, algebraic graph theory and matrix analysis. Simulation comparison experiments verify the feasibility and effectiveness of the proposed algorithm. Compared with the finite-time control algorithm, the convergence time of the proposed algorithm is independent of the initial conditions, and the upper bound of the system convergence time can be set by choosing a time parameter. Compared with the fixed-time control algorithm, the preset convergence time of the proposed algorithm is independent of the control algorithm parameters, which is simple to set, and the estimated convergence time is less conservative.

Keywords: signed graph; multi-agent systems; bipartite consensus; linear system; nonlinear uncertain system; switching topology; predefined-time

0 引言

近年来, 多智能体系统 (multi-agent systems, MAS) 协同控制问题受到广泛关注. 一致性问题作为 MAS 协同控制问题的基础和核心, 在群集^[1]、编队^[2]和分布式优化^[3]等集体行为中得到了大量研究.

在实际的系统网络中, 各智能体不仅含有协作关

系, 而且存在竞争关系. 例如, 机器人系统中, 正权重表示协作, 负权重表示互斥, 既保证了协作又避免了碰撞; 蛋白质调控网络中的激活和抑制同样如此. 对此, 文献[4]扩展了一致性概念, 提出了二分一致性, 使所有的智能体收敛到模相同、符号相反的状态.

近几年, 二分一致性控制研究已有大量成果. 值

收稿日期: 2022-09-24; 录用日期: 2023-01-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61472282, 62172004, 62072002); 安徽省科技重大专项项目 (202003a05020028); 安徽省高校自然科学研究重点项目 (KJ2019A0065); 安徽省重点研究开发计划项目 (202004a0502001); 特种重载机器人安徽省重点实验室开放课题资助项目 (TZJQR004-2020).

责任编辑: 关新平.

[†]通讯作者. E-mail: maxiaolu@ahut.edu.cn.

*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

得注意的是,现有的关于MAS二分一致性问题的大多数工作都是渐近一致的结果^[5-14],其中主要研究了一阶^[5-8]、二阶^[11]和高阶系统^[12-14].针对线性系统^[5-8]下的二分一致性问题,主要基于无向图^[6]和有向图^[7-8],引入事件触发机制^[6]或考虑切换拓扑^[7]、通信受限^[8]的情况.针对非线性系统^[9-10],同样展开了基于无向图^[9]、有向图^[10]的二分一致性研究.

收敛速度也是一致性协议设计中的一个重要问题.与渐近控制算法^[5-14]相比,有限时间控制算法具有更快的收敛速度和更好的抗扰性能.文献^[15-18]考虑了有限时间二分一致性控制问题.文献^[15]讨论了有向图下具有细节平衡对抗交互的MAS的有限时间问题,设计了两种有限时间二分一致性协议;文献^[16]考虑了外界扰动的影响.

在这些研究中,有限时间一致性的建立时间取决于所有智能体的初始状态.如果初始状态相差非常大,则收敛时间过长,无法满足系统控制要求.为此,研究者们开展了基于固定时间稳定性概念的研究^[17-28],其中讨论一阶线性系统较多^[17-22].特别地,文献^[21]研究了异质线性MAS的二分固定时间输出一致性问题,考虑了领导者状态无法为所有跟随者可用的情况,提出一个分布式的二分固定时间观测器,并基于观测器设计了分布式非线性控制律.文献^[23]结合事件触发控制方法研究了非线性MAS的固定时间分群一致性问题.文献^[24]研究了具有有向符号通信网络的欧拉-拉格朗日系统.文献^[25-26]考虑了高阶系统.文献^[25]研究了具有执行器故障的高阶未知非线性MAS的二分跟踪一致性问题,利用神经网络和自适应技术逼近未知函数,设计了自适应容错固定时间一致性控制器.文献^[26]针对符号图下的未知非线性MAS,提出了一种无近似自适应控制方法,解决了非线性MAS的不确定性问题,避免了反步法固有的“复杂度爆炸”问题,能够保证MAS实现实际的固定时间二分一致性.

虽然固定时间一致性的收敛时间不依赖于系统初始状态,但是其具有较大的保守性,且预估收敛时间上界为一个与控制器参数有关的复杂函数,在实际的应用中整定性较差.最近,研究者们提出了预定时间二分一致性控制^[29-30].文献^[29]研究了符号图和有向图上MAS的预定时间区间二分一致性的分析和协议设计问题,提出的预定时间控制器可使得系统在预定的时间区间内实现系统要求;文献^[30]考虑资源消耗问题,引入了事件触发机制.

受以上文献启发,本文考虑线性MAS和非线性不确定系统含扰动和无扰动以及切换拓扑的情况,提出两类多个预定时间二分一致性算法.与渐近收敛结果^[5-14]不同的是,本文算法收敛时间有限;与有限时间控制算法^[15-18]不同的是,本文算法的收敛时间不依赖于初始状态,可以通过选择单一时间参数设定系统收敛时间上界;与固定时间控制算法^[17-28]不同的是,本文算法预设收敛时间与控制算法参数无关,设定简单,具有更低的保守性.

1 预备知识与问题描述

1.1 代数图论

考虑一个含有 M 个智能体的MAS,其通信拓扑由加权符号图 $G = (V, \varepsilon, A)$ 表示.其中: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 是节点集, $\varepsilon \subseteq V \times V$ 是边集, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ 是一个邻接矩阵.每个节点 v_i 代表一个智能体 i ,边集 $(v_i, v_j) \in \varepsilon$ 存在,表示智能体 j 与 i 可互相通讯,定义 $N_i = \{j : (j, i) \in \varepsilon\}$ 为邻居集合.对于图 G 的邻接矩阵 $A = [a_{ij}]_{m \times m}$,当 $(v_i, v_j) \in \varepsilon$,智能体 i 与 j 为合作关系时, $a_{ij} > 0$;为对抗关系时, $a_{ij} < 0$.符号图 G 的Laplacian矩阵定义为 $L = [l_{ij}]_{M \times M}$.其中: $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^M |a_{ij}|$, $l_{ij} = -a_{ij}$, $i \neq j$.对于符号图 G ,如果存在两个节点集 V_1 和 V_2 的二划分满足 $V_1 \cup V_2 = V$ 和 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,则当 $v_i, v_j \in V_k$ ($k \in \{1, 2\}$)时, $a_{ij} \geq 0$;当 $v_i \in V_k, v_j \in V_l, k \neq l$ ($k, l \in \{1, 2\}$), $a_{ij} \leq 0$ 时,图 G 是结构平衡的.此外,对于结构平衡图 G ,存在对角矩阵 D 满足 DLD 的所有对角元素都是非负的.

1.2 相关定义和引理

引理1^[31] 考虑一个动态系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbf{R}^m$, $f(x(t), t) : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为非线性函数.假设原点为系统(1)的一个平衡点,若存在一个正定函数 $V(x) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^m$ 且 $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,使得

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{\pi}{\alpha T} (V^{1-\frac{\alpha}{2}}(x) + V^{1+\frac{\alpha}{2}}(x)) \quad (2)$$

成立,其中预设常数 $T > 0, 0 < \alpha < 1$,那么系统的原点是全局预定时间稳定的,且预定时间为 T .

引理2^[20] 一个连通的符号图 G ,如果它是结构平衡的,其Laplacian候选函数为

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}| (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)^2 = x^T Lx,$$

则有 $x^T L^T Lx \geq \lambda_2(L)V(x)$.

引理3^[32] 一个连通的无向图 G ,其Laplacian矩

阵 L 为半正定, 其特征值满足

$$\lambda_2(L) = \min_{w \neq 0, \mathbf{1}^T w = 0} \frac{w^T L w}{w^T w}. \quad (3)$$

对于 $w = [w_1, w_2, \dots, w_3]^T \in \mathbf{R}^m$, 有

$$w^T L w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (w_j - w_i)^2. \quad (4)$$

因此, 如果 $\mathbf{1}^T w = 0$, 即 $\sum_{i=1}^m w_i = 0$ 时, 有 $w^T L w \geq \lambda_2(L) w^T w$.

引理4^[17] 对于实数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \in \mathbf{R}^+, 0 < p \leq 1, q > 1$, 有

$$m^{1-p} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \right)^p \geq \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^p \geq \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \right)^p, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^q \geq m^{1-q} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \right)^q. \quad (6)$$

1.3 问题描述

考虑扰动条件下的非线性MAS

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(x_i(t), t) + d_i(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $x_i \in \mathbf{R}^n$ 和 $u_i \in \mathbf{R}^n (i = 1, 2, \dots, m)$ 分别为智能体 i 的状态和控制输入, $f(x_i(t), t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为非线性不确定项, $d_i \in \mathbf{R}^n$ 可代表未知扰动和噪声等.

定义1 对于扰动条件下的非线性MAS, 如果存在一个设定的时间常数 T , 使得系统在任意初值的条件下, 满足当 $t > T$ 时有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} x_i(t) = x^*(t), \\ x_i(t) = -x^*(t), t \geq T, \forall i \in \Gamma_m, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $x^*(t)$ 是一个非平凡的轨迹, 即 $x^*(t)$ 不是一个平衡点, 那么该系统可实现预定时间二分一致性.

假设1 非线性项 $f(x_i(t), t)$ 满足以下条件:

$$\begin{aligned} |f(x_i(t), t) - \text{sign}(a_{ij})f(x_j(t), t)| &\leq \\ \gamma |x_i(t) - \text{sign}(a_{ij})x_j(t)|, \end{aligned}$$

其中 $\gamma \geq 0$.

假设2 扰动变量 d_i 连续且有界, 满足

$$|d_i| \leq d_{\max},$$

其中 d_{\max} 是一个非负常数.

假设3 假设MAS的符号图 G 结构平衡.

2 预定时间控制的二分一致性

考虑线性系统、非线性不确定系统含扰动和无扰动条件以及切换拓扑情况, 分别提出不同的预定时间控制协议, 以解决系统在预定时间内实现二分一致性问题.

2.1 非线性不确定MAS的预定时间二分一致性

为实现非线性MAS式(7)在假设1和假设2条件下的预定时间一致性, 设计预定时间控制律为

$$\begin{aligned} u_i = & \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi}{2(\lambda_2(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^{1+\alpha} + \\ & \frac{\pi}{2(\lambda_2(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^{1-\alpha} + \\ & \eta \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right) + \\ & \beta \text{sign} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\text{sig}(a)^b = |a|^b \text{sign}(a)$; $\alpha > 0, \beta > d_{\max}, \eta \geq \gamma/\lambda_2(L)$ 为控制增益常数; $\lambda_2(L)$ 为MAS的Laplacian矩阵的非零最小特征值; T 为预设收敛时间.

定理1 当满足假设1~假设3时, 利用控制器(9)可满足MAS式(7)在预定时间 T 内实现二分一致性.

证明 构建Lyapunov函数

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}| (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)^2 = x^T L x. \quad (10)$$

对 $V(t)$ 求导并结合式(7), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \sum_{i=1}^m \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x}_i = \\ & -2 \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right) (u_i + f_i + d_i). \end{aligned} \quad (11)$$

由假设1, 有

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) f_i \leq \\ \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}| (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)^2 = \gamma V(x). \end{aligned} \quad (12)$$

由假设2, 有

$$\begin{aligned} -d_i \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \leq \\ d_{\max} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}| (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i). \end{aligned} \quad (13)$$

将式(9)、(12)、(13)代入(11)中, 结合引理4, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq \\ \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi \cdot \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^{2+\alpha}}{(\lambda_2(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi \cdot \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^{2-\alpha}}{(\lambda_2(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} - \\ & 2\eta \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^2 + 2\gamma V(x) - \\ & 2(\beta - d_{\max}) \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right| \leq \\ & -\pi \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^2 \right)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{(\lambda_2(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \\ & -\pi \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^2 \right)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(\lambda_2(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} - \\ & 2\eta \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^2 + 2\gamma V(x). \end{aligned} \quad (14)$$

另外

$$\begin{aligned} a_{1j}(x_j - \text{sign}(a_{1j})x_i) &= \\ -|a_{1j}|(x_i - \text{sign}(a_{1j})x_j), \end{aligned}$$

进而可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^2 = \\ & (-Lx)^T(-Lx) = x^T L^T Lx. \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)代入(14),并结合引理2,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) & \leq \frac{-\pi}{(\lambda_2(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (x^T L^T Lx)^{1+\frac{\alpha}{2}} + \\ & \frac{-\pi}{(\lambda_2(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (x^T L^T Lx)^{1-\frac{\alpha}{2}} - \\ & 2\eta(x^T L^T Lx) + 2\gamma V(x) \leq \\ & \frac{-\pi}{(\lambda_2(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (\lambda_2(L)V(x))^{1+\frac{\alpha}{2}} + \\ & \frac{-\pi}{(\lambda_2(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (\lambda_2(L)V(x))^{1-\frac{\alpha}{2}} - \\ & 2(\eta\lambda_2(L) - \gamma)V(x) \leq \\ & -\frac{\pi}{\alpha T} (V(x))^{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi}{\alpha T} (V(x))^{1-\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

因此,由引理1可得,存在 $t \geq T$,使得 $\lim_{t \rightarrow T} V(x) = 0, V(x) = 0$. \square

类似地,为进一步实现无扰动下的非线性MAS预定时间二分一致性,有

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(x_i(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (17)$$

那么,可设计控制律为

$$\begin{aligned} u_i &= \\ & \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi \cdot \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^{1+\alpha}}{2(\lambda_2(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \\ & \frac{\pi \cdot \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right)^{1-\alpha}}{2(\lambda_2(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \\ & \eta \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

根据定理1,对于无扰动预定时间非线性MAS有如下推论.

推论1 当满足假设1~假设3时,利用控制器(18)可满足无扰动条件下非线性MAS式(17)在预定时间 T 内实现二分一致性.

证明与定理1类似,不再赘述.

2.2 线性MAS的预定时间二分一致性

考虑扰动条件下的线性MAS

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t) + d_i(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (19)$$

式(19)为(7)的一种简单形式.

定义2 对于扰动条件下的线性MAS,如果存在一个设定的时间常数 T ,使得系统在任意初值的条件下,满足当 $t \geq T$ 时有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} x_i(t) = \sigma_i c, \\ x_i(t) = \sigma_i c, t \geq T. \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\sigma_i \in \{1, -1\}$. 当符号图 G 结构平衡时, $c = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_j x_j(t)$, 则该系统可实现预定时间二分一致性; 否则 $c = 0$, 此时系统所实现的即为一致性.

为实现线性MAS式(19)的二分一致性目标(20),设计预定时间控制律为

$$\begin{aligned} u_i &= \\ & \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi \cdot \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)^{1+\alpha}}{(2\lambda_{\min})^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \\ & \frac{\pi \cdot \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)^{1-\alpha}}{(2\lambda_{\min})^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \\ & \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i), \end{aligned} \quad (21)$$

其中 λ_{\min} 在后文给出.

定理2 当满足假设1~假设3时,利用控制器(21)可满足MAS式(19)在预定时间 T 内实现二分一致性.

证明 定义二分一致性跟踪误差为 $\varepsilon_i(t) = \sigma_i x_i(t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_j x_j(t)$. 已知符号图 G 是结构平衡的, 因此有 $\sigma_i \sigma_j a_{ij} = |a_{ij}|, \sigma_i \sigma_j = \text{sign}(a_{ij}), \text{sign}(\sigma_i) = \sigma_i$, 进而可得出如下等式:

$$\sigma_i \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i) = \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i). \quad (22)$$

进一步, 结合 $a_{ij} = a_{ji}$, 可得

$$\sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i)^{1+\alpha} = \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i)^{1+\alpha}. \quad (23)$$

那么可得

$$\sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i)^{1+\alpha} = 0.$$

类似地, 有

$$\sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i)^{1-\alpha} = 0, \\ \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sign}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i) = 0.$$

结合上述分析, 有

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \sigma_i \dot{x}_i(t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_j \dot{x}_j(t) = \sigma_i(u_i(t) + d_i(t)) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_j d_j(t). \quad (24)$$

构建 Lyapunov 函数 $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^T \varepsilon, \varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]^T$. 对 $\Phi(\varepsilon)$ 求导, 得

$$\dot{\Phi}(\varepsilon) = 2 \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = 2 \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \left(\sigma_i(u_i + d_i) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_j d_j(t) \right). \quad (25)$$

因为 $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i(t) = 0$, 故 $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_j d_j(t) \right) = 0$. 因此, 可得

$$\sigma_i(u_i + d_i) = \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i)^{1+\alpha} + \frac{\pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i)^{1-\alpha} + \beta \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sign}(\sigma_j x_j - \sigma_i x_i) + \sigma_i d_i. \quad (26)$$

将式(26)代入(25), 得

$$\dot{\Phi}(\varepsilon) =$$

$$2 \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \left(\frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)^{1+\alpha} + \frac{\pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sig}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)^{1-\alpha} + \beta \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \text{sign}(\varepsilon_j - \varepsilon_i) + \sigma_i d_i \right) = m^{\frac{\alpha}{2}} \pi \cdot \frac{\sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}| |\varepsilon_i - \varepsilon_j| \text{sig}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)^{1+\alpha}}{(2\lambda_{\min}(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \frac{\pi \cdot \sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}| |\varepsilon_i - \varepsilon_j| \text{sig}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)^{1-\alpha}}{(2\lambda_{\min}(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \beta \sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}| |\varepsilon_j - \varepsilon_i| + \sum_{i=1}^m \sigma_i d_i |\varepsilon_j - \varepsilon_i| = - \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}| |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^{2+\alpha} - \frac{\pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}| |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^{2-\alpha} - \beta \sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}| |\varepsilon_j - \varepsilon_i| + \sum_{i=1}^m \sigma_i d_i |\varepsilon_j - \varepsilon_i| = - \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{i=1, j=1}^m (|a_{ij}|^{\frac{2}{2+\alpha}} |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi}{(2\lambda_{\min}(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{i=1, j=1}^m (|a_{ij}|^{\frac{2}{2-\alpha}} |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} - \beta \sum_{i=1, j=1}^m (|a_{ij}|^2 |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2)^{\frac{1}{2}} + d_i \sigma_j \sum_{i=1}^m a_{ij} |\varepsilon_j - \varepsilon_i|. \quad (27)$$

根据引理4, 有如下不等式:

$$\dot{\Phi}(\varepsilon) \leq - \frac{\pi}{2(\lambda_{\min}(L))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \left(\sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}|^{\frac{2}{2+\alpha}} |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2 \right)^{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi}{2(\lambda_{\min}(L))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \left(\sum_{i=1, j=1}^m |a_{ij}|^{\frac{2}{2-\alpha}} |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2 \right)^{1-\frac{\alpha}{2}} - \beta \sum_{i=1, j=1}^m (|a_{ij}|^2 |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2)^{\frac{1}{2}} + d_i \sigma_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| |\varepsilon_j - \varepsilon_i|. \quad (28)$$

再由引理3, 可得

$$\dot{\Phi}(\varepsilon) \leq - \frac{\pi}{(2\lambda_{\min})^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (2\lambda_2(L(C))\Phi(\varepsilon))^{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi}{(2\lambda_{\min})^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (2\lambda_2(L(D))\Phi(\varepsilon))^{1-\frac{\alpha}{2}} -$$

$$(\beta - d_i \sigma_j) \sum_{i=1, j=1}^m (|a_{ij}|^2 |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \\ - \frac{\pi}{\alpha T} (\Phi(\varepsilon))^{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi}{\alpha T} (\Phi(\varepsilon))^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (29)$$

其中

$$C = [c_{ij}] \in R^{m \times m}, \quad c_{ij} = a_{ij}^{\frac{2}{2+\alpha}}, \\ D = [d_{ij}] \in R^{m \times m}, \quad d_{ij} = a_{ij}^{\frac{2}{2-\alpha}}, \\ \lambda_{\min} = \min(\lambda_2(L(C)), \lambda_2(L(D))).$$

因此,由引理1可知,存在 $t \geq T$,使得 $\lim_{t \rightarrow T} \Phi(\varepsilon) = 0, \Phi(\varepsilon) = 0$,满足二分一致性目标(20). \square

如果符号图 G 结构不平衡,与定理2证明相似,可得

$$\dot{\Phi}(\varepsilon) \leq - \frac{\pi}{(2\lambda_{\min})^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (2\lambda_1(L(C))\Phi(\varepsilon))^{1+\frac{\alpha}{2}} - \\ \frac{\pi}{(2\lambda_{\min})^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (2\lambda_1(L(D))\Phi(\varepsilon))^{1-\frac{\alpha}{2}} - \\ (\beta - d_i \sigma_j) \sum_{i=1, j=1}^m (|a_{ij}|^2 |\varepsilon_j - \varepsilon_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \\ - \frac{\pi}{\alpha T} (\Phi(\varepsilon))^{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi}{\alpha T} (\Phi(\varepsilon))^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (30)$$

类似地,为进一步实现无扰动下的线性MAS预定时间二分一致性,有

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (31)$$

那么,可设计控制律为

$$u_i = \\ \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi}{(2\lambda_{\min})^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)^{1+\alpha} + \\ \frac{\pi}{(2\lambda_{\min})^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)^{1-\alpha}. \quad (32)$$

根据定理1,无扰动预定时间线性MAS二分一致性有如下推论.

推论2 当满足假设1~假设3时,利用控制器(32)可满足无扰动条件下线性MAS式(31)在预定时间 T 内实现二分一致性.

证明与定理2类似,不再赘述.

2.3 切换拓扑下的预定时间二分一致性

本节将固定拓扑协议扩展到切换拓扑下进行分析.设符号图图集 $G_s = \{G_1, G_2, \dots, G_N\}$ 表示MAS通讯拓扑图集.切换信号 $s(t) : [0, +\infty) \rightarrow \Omega, \Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ 为图集 G_s 索引集.

为实现非线性MAS式(7)在假设1和假设2条件

下的预定时间一致性,设计预定时间控制律为

$$u_i = \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi \cdot \text{sig}\left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)\right)^{1+\alpha}}{2(\lambda_2^{\min}(L(G_s)))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \\ \frac{\pi \cdot \text{sig}\left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)\right)^{1-\alpha}}{2(\lambda_2^{\min}(L(G_s)))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} + \\ \bar{\eta} \text{sig}\left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)\right) + \\ \beta \text{sign}\left(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)\right). \quad (33)$$

其中

$$\bar{\eta} \geq \gamma / \lambda_2^{\min}(L(G_s)), \\ \lambda_2^{\min}(L(G_s)) = \min(\lambda_2(L(G_1)), \dots, \lambda_2(L(G_N))).$$

定理3 当满足假设1~假设3时,利用控制器(33)可满足MAS式(7)在切换拓扑下预定时间 T 内实现二分一致性.

证明 与定理1类似,对 $V(t)$ 求导,有

$$\dot{V}(x) \leq \\ \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi \cdot \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)\right)^{2+\alpha}}{(\lambda_2^{\min}(L(G_s)))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} - \\ \frac{\pi \cdot \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)\right)^{2-\alpha}}{(\lambda_2^{\min}(L(G_s)))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} - \\ 2(\beta - d_{\max}) \sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - \text{sign}(a_{ij})x_i)\right| - \\ 2\bar{\eta}(x^T L^T L x) + 2\gamma V(x) \leq \\ - \frac{\pi}{(\lambda_2^{\min}(L(G_s)))^{1+\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (\lambda_2(L)V(x))^{1+\frac{\alpha}{2}} - \\ \frac{\pi}{(\lambda_2^{\min}(L(G_s)))^{1-\frac{\alpha}{2}} \alpha T} (\lambda_2(L)V(x))^{1-\frac{\alpha}{2}} = \\ - \frac{\pi}{\alpha T} (V(x))^{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi}{\alpha T} (V(x))^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (34)$$

因此,由引理1可得,存在 $t \geq T$,使得 $\lim_{t \rightarrow T} V(x) = 0, V(x) = 0$,满足二分一致性目标(8). \square

类似地,可设计控制器,使得非线性MAS式(7)和线性MAS式(19)在切换拓扑下实现二分一致性.

3 仿真实验

为进一步验证所提预定时间二分一致性控制协议的有效性和优越性,设计4组实验.前3组实验考虑符号图 G 结构平衡、结构不平衡和切换拓扑的情况,旨在体现本文所提控制器的有效性;第4组仿真实验旨在体现所提控制器的优越性.

假定 MAS 含 6 个智能体, 通信拓扑如图 1 所示. 设定非线性不确定项 $f(x_i(t), t) = \sin(2x_i) + x_i$, 外界干扰为 $d_i = \sin(it)$. 设置仿真时间 $t = 1\text{ s}$, 步长为 0.001.

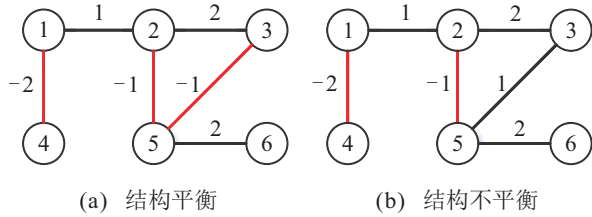


图 1 通信拓扑

实验 1 设定两组系统处于不同初始状态的一致性控制实验. 通讯拓扑相同, 使用图 1(a), 得出特征值 $\lambda_2(L) = 0.5028$. 设计参数 $\alpha = 0.5, \beta = 1, \eta = 6$, 该参数满足定理条件. 由定理 1 可设计系统收敛时间上界 $T = 1\text{ s}$. 假定第 1 组和第 2 组系统初始状态分别为 $x_0 = [20, -15, 1, -16, 2, 6]^T$ 和 $x_0 = [40, -30, 2, -32, 4, 12]^T$, 实验结果如图 2 和图 3 所示.

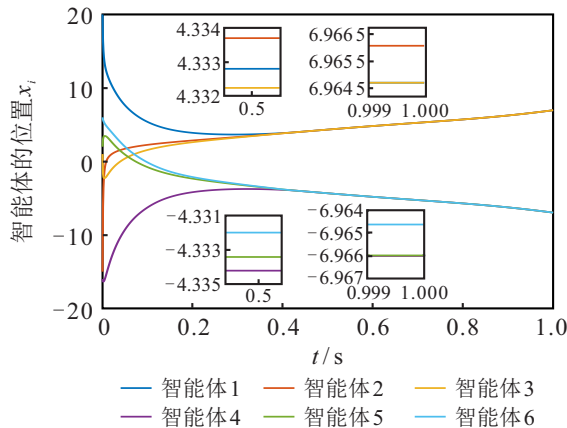


图 2 第 1 组智能体状态轨迹 (实验 1)

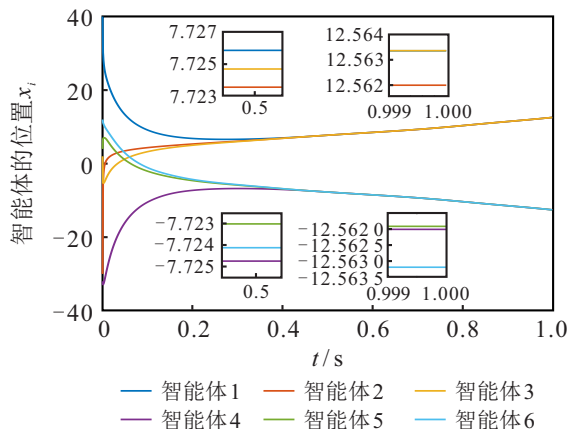


图 3 第 2 组智能体状态轨迹 (实验 1)

由图 2 和图 3 可以看出, 使用预定时间控制器 (9), 可使得系统在 0.5 s 内实现各智能体间状态误差精度要求为 0.002 的状态二分一致性, 可在 1 s 内实现状态误差精度要求为 0.0015 的状态一致性. 该实际收敛

时间满足预定收敛时间上界 $T = 1\text{ s}$ 要求. 可得出, 系统收敛时间与初始状态无关的结论.

实验 2 与实验 1 类似, 使用图 1(b), 得出特征值 $\lambda_2(L) = 0.2559$. 设计参数 $\alpha = 0.5, \beta = 1.1, \eta = 12, T = 1\text{ s}$. 实验结果如图 4 和图 5 所示. 可以看出, 在预定时间控制器 (9) 的作用下, 同样可使得系统适于结构不平衡的条件, 且有系统收敛时间与初始状态无关的结论.

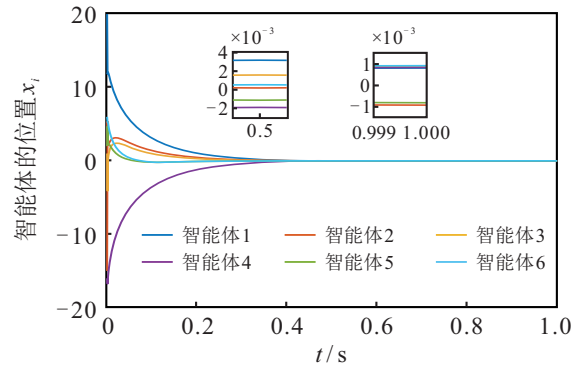


图 4 第 1 组智能体状态轨迹 (实验 2)

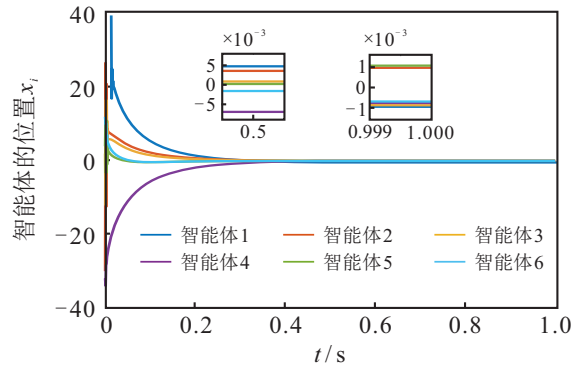


图 5 第 2 组智能体状态轨迹 (实验 2)

实验 3 考虑切换拓扑情况下, 各智能体同样可在预定时间内实现二分一致性. 设定通讯拓扑如图 6 所示.

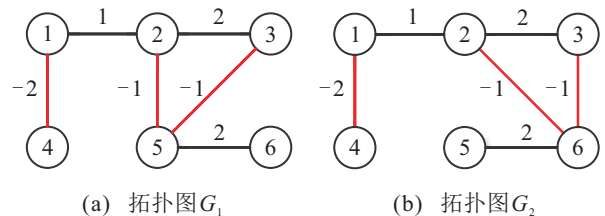


图 6 切换拓扑

设定当 $t < 0.3\text{ s}$ 时, 采用图 6(a); 当 $t \geq 0.3\text{ s}$ 时, 采用图 6(b). 由此得出 $\lambda_2^{\min}(L(G_s)) = 0.5028$, 设计参数 $\alpha = 0.5, \beta = 1, \eta = 6, T = 1\text{ s}$. 系统初始状态为 $x_0 = [20, -15, 1, -16, 2, 6]^T$, 实验结果如图 7 所示. 可以看出, 在切换拓扑情况下, 所提控制器仍能满足要求. 另外, 考虑含扰动的线性 MAS 式 (19), 仿真结果如图 8 和图 9 所示, 可以看出所提控制器满足系统要求.

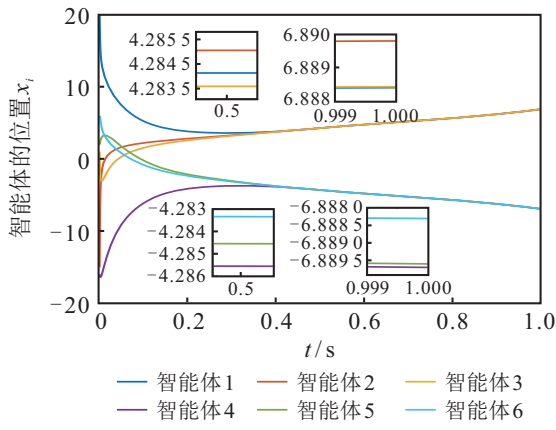


图7 智能体状态轨迹

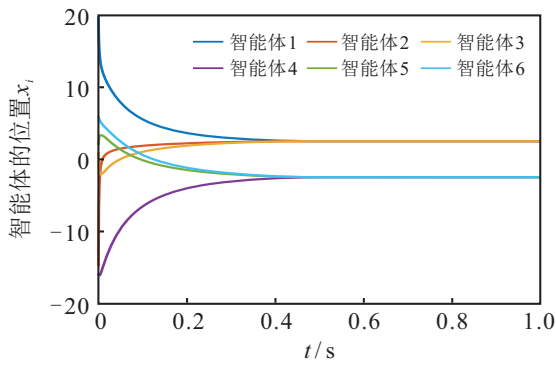


图8 结构平衡下智能体状态轨迹

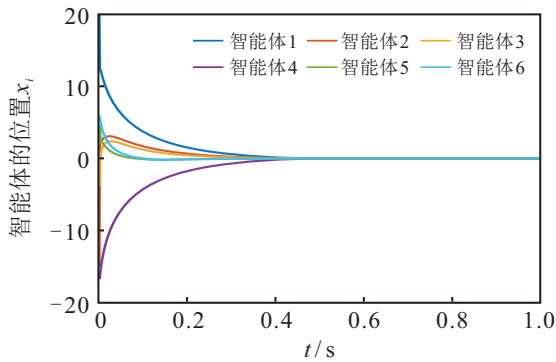


图9 结构不平衡下智能体状态轨迹

实验4 为体现本文所提二分一致性预定时间控制算法的优越性,在实验1的基础上与有限时间控制算法^[18]、固定时间控制算法^[20]进行比较.为体现公平性,仅采用文献[18,20]控制器设计策略,另外设定扰动项和非线性项均为零.文献[18]、文献[20]设计方法所得控制器和本文控制器分别如下所示:

$$u_i = c \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right)^{\frac{1}{q}} + \beta \text{sign} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right), \quad (35)$$

$$u_i = \mu \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right)^{2 - \frac{1}{q}} + c \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$\beta \text{sign} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right), \quad (36)$$

$$u_i = \frac{m^{\frac{\alpha}{2}} \pi}{2(\lambda_2(L))^{1 + \frac{\alpha}{2}} \alpha T} \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right)^{1 + \alpha} + \frac{\pi}{2(\lambda_2(L))^{1 - \frac{\alpha}{2}} \alpha T} \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right)^{1 - \alpha} + \eta \text{sig} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right) + \beta \text{sign} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - \text{sign}(a_{ij}) x_i) \right). \quad (37)$$

为公平起见,控制器(35)~(37)参数采用文献[20]所设值,其参数 $\mu = 0.5, c = 0.6, q = 3$,因此可令式(37)中 $\alpha = \frac{2}{3}$.因未考虑扰动项和非线性项,故 $\beta = 0, \eta = 0$.值得注意的是 T 的选取,为取得公平性,该参数由文献[20]的系统预设收敛时间函数决定,即

$$T \leq T_{\max} = \frac{1}{\lambda_2(L)} \left(\frac{m^{\frac{q-1}{2q}}}{\mu} + \frac{1}{c} \right) \frac{q}{q-1}. \quad (38)$$

已知实验1中 $\lambda_2(L) = 0.5028$,因此经计算可得 $T = 15.8142 \text{ s}$.定义MAS中的二分一致性保持位置误差指标(bipartite consensus-keeping error metric, BCKM)为

$$\text{BCKM} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (|x_i| - |x_j|)^2}. \quad (39)$$

设计两组对比实验,系统初始状态分别为 $x_0 = [60, -45, 3, -48, 6, 18]^T$ 和 $x_0 = [100, -75, 5, -80, 10, 30]^T$,实验结果如图10和图11所示.可以看出,在两种系统初始状态不同的情况下,预定时间控制器和固定时间控制器下系统的实际收敛时间在预设收敛时间 $T = 15.8142 \text{ s}$ 范围内,但预定时间控制保守性低,而有限时间控制器作用下的系统收敛时间随系统初始状态值增大而增加.

综上,针对具有扰动的线性和非线性MAS,本文提出的预定时间一致性控制算法具有有效性和优越性.

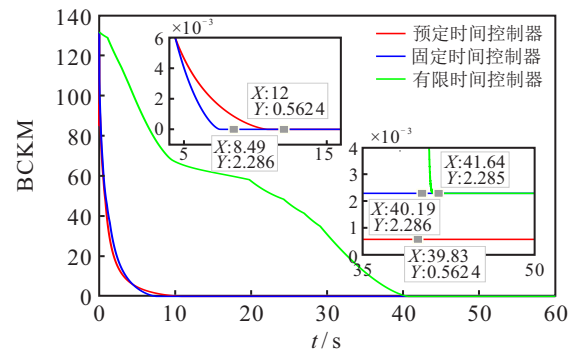


图10 第1组BCKM指标的比较

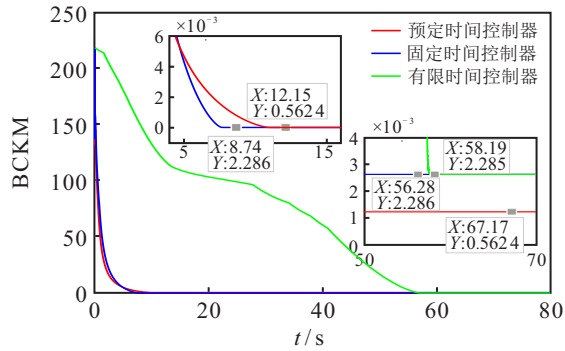


图 11 第2组BCKM指标的比较

4 结论

本文旨在研究MAS二分一致性控制问题,考虑了不确定非线性系统含扰动和无扰动、线性系统含扰动和无扰动以及非线性系统含扰动在切换拓扑的情况,分别提出了预定时间控制器。通过Lyapunov稳定性理论和代数图论等证明了算法的正确性。仿真实验分析了控制器(9)在结构平衡、结构不平衡条件下的状态结果,控制器(33)在切换拓扑通信下的状态结果,展示了控制器(9)在含扰动线性系统下的状态结果;对比实验分析了本文所提方法的优越性。可以看出,针对不同的系统,收敛时间均可通过预设参数提前设定,且收敛性能较好,保守性低,收敛速度与系统初始状态无关。因此,更适合应用在系统初始状态差较大、收敛时间要求严格以及通讯条件多样的条件下。

参考文献(References)

- [1] Zou Y, An Q, Miao S X, et al. Flocking of uncertain nonlinear multi-agent systems via distributed adaptive event-triggered control[J]. *Neurocomputing*, 2021, 465: 503-513.
- [2] Lin Z Y, Wang L L, Han Z M, et al. Distributed formation control of multi-agent systems using complex Laplacian[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1765-1777.
- [3] Wang Q C, Duan Z S, Wang J Y. Distributed optimal consensus control algorithm for continuous-time multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67: 102-106.
- [4] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935-946.
- [5] Su H S, Chen J H, Yang Y C, et al. The bipartite consensus for multi-agent systems with matrix-weight-based signed network[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67(10): 2019-2023.
- [6] Yu H, Chen X, Chen T W, et al. Event-triggered

- bipartite consensus for multiagent systems: A zero-free analysis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(11): 4866-4873.
- [7] Cheng Y H, Shi L, Shao J L, et al. Seeking tracking consensus for general linear multiagent systems with fixed and switching signed networks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(7): 6697-6706.
- [8] 陈世明, 姜根兰, 张正. 通信受限的多智能体系统二分实用一致性[J]. *自动化学报*, 2022, 48(5): 1318-1326. (Chen S M, Jiang G L, Zhang Z. Bipartite practical consensus control of multi-agent systems with communication constraints[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(5): 1318-1326.)
- [9] Wang Q, Zino L, Tan D Y, et al. Fully distributed quantized secure bipartite consensus control of nonlinear multiagent systems subject to denial-of-service attacks[J]. *Neurocomputing*, 2022, 505: 101-115.
- [10] Zhao H R, Shan J J, Peng L, et al. Distributed event-triggered bipartite consensus for multiagent systems against injection attacks[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2023, 19(4): 5377-5386.
- [11] 严浩远, 刘小洋, 曹进德. 基于神经网络逼近的异构多智能体系统二分拟一致性[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1312-1318. (Yan H Y, Liu X Y, Cao J D. Bipartite quasi-consensus of heterogeneous multi-agent systems based on neural network approximation[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1312-1318.)
- [12] Wu Y Z, Zhao Y Y, Hu J P. Bipartite consensus control of high-order multiagent systems with unknown disturbances[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 49(10): 2189-2199.
- [13] Hu J P, Wu Y Z. Interventional bipartite consensus on cooperation networks with unknown dynamics[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(11): 4438-4456.
- [14] Gkesoulis A K, Psillakis H E. Prescribed performance bipartite consensus for nonlinear agents with antagonistic interactions: A PI transformation approach[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358: 2382-2404.
- [15] Lu J Q, Wang Y Q, Shi X C, et al. Finite-time bipartite consensus for multiagent systems under detail-balanced antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(6): 3867-3875.
- [16] Wang H, Yu W W, Wen G H, et al. Finite-time bipartite consensus for multi-agent systems on directed signed networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, 65(12): 4336-4348.
- [17] Han T, Guan Z H, Xiao B, et al. Bipartite average tracking for multi-agent systems with disturbances: Finite-time

- and fixed-time convergence[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2021, 68(10): 4393-4402.
- [18] Zhao M, Peng C, Tian E G. Finite-time and fixed-time bipartite consensus tracking of multi-agent systems with weighted antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, 68(1): 426-433.
- [19] Jiang D X, Wen G G, Peng Z X, et al. Fully distributed pull-based event-triggered bipartite fixed-time output control of heterogeneous systems with an active leader[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(5): 3089-3100.
- [20] Deng Q, Wu J, Han T, et al. Fixed-time bipartite consensus of multi-agent systems with disturbances[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 516: 37-49.
- [21] Zhang H G, Duan J, Wang Y C, et al. Bipartite fixed-time output consensus of heterogeneous linear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(2): 548-557.
- [22] Gong P, Han Q L. Fixed-time bipartite consensus tracking of fractional-order multi-agent systems with a dynamic leader[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67(10): 2054-2058.
- [23] 吴新杰, 陈世明. 基于事件触发的非线性多智能体系统的固定时间分群一致性[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1278-1285.
(Wu X J, Chen S M. Fixed-time group consensus control for nonlinear multi-agent systems based on event-triggered mechanism[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1278-1285.)
- [24] Zhao X F, Han T, Zhan X S, et al. Distributed estimator-based fixed-time bipartite consensus of multiple Euler-Lagrange systems over a signed digraph[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(6): 2847-2851.
- [25] Yang H J, Ye D. Adaptive fixed-time bipartite tracking consensus control for unknown nonlinear multi-agent systems: An information classification mechanism[J]. *Information Sciences*, 2018, 459: 238-254.
- [26] Liu Y, Zhang H G, Li Q C, et al. Practical fixed-time bipartite consensus control for nonlinear multi-agent systems: A barrier Lyapunov function-based approach[J]. *Information Sciences*, 2022, 607: 519-536.
- [27] Zuo Z Y, Tian B L, Defoort M, et al. Fixed-time consensus tracking for multiagent systems with high-order integrator dynamics[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(2): 563-570.
- [28] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [29] Gong X, Cui Y K, Shen J, et al. Distributed prescribed-time interval bipartite consensus of multi-agent systems on directed graphs: Theory and experiment[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2021, 8(1): 613-624.
- [30] Chen X, Yu H, Hao F. Prescribed-time event-triggered bipartite consensus of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(4): 2589-2598.
- [31] Muñoz-Vázquez A J, Sánchez-Torres J D, Jiménez-Rodríguez E, et al. Predefined-time robust stabilization of robotic manipulators[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 24(3): 1033-1040.
- [32] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935-946.

作者简介

马小陆(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事嵌入式、车联网、机器人等研究, E-mail: maxiaolu@ahut.edu.cn;

谭毅波(1998—), 男, 硕士生, 从事多机器人、多智能体、预定时间控制等研究, E-mail: tan374093587@163.com;

梅宏(1995—), 男, 博士生, 从事路径规划、协同控制等研究, E-mail: meihong@nuaa.edu.cn.