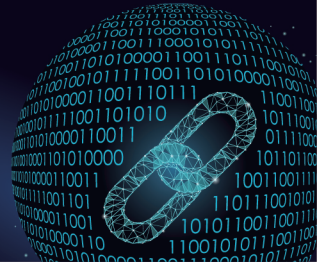




中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



离散线性系统有限频域基于观测器的迭代学习控制

邹伟, 沈艳霞

引用本文:

邹伟, 沈艳霞. 离散线性系统有限频域基于观测器的迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(5): 1745–1753.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1705>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges

控制与决策. 2021, 36(3): 599–608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty

控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

基于Razumikhin方法的时变时滞非线性系统的输出反馈镇定

Output-feedback stabilization for nonlinear systems with time-varying delay based on Razumikhin-type approach

控制与决策. 2021, 36(11): 2812–2816 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0304>

随机变批次长度的反馈辅助PD型量化迭代学习控制

Feedback-assisted PD-type quantized iterative learning control with randomly iteration varying lengths

控制与决策. 2021, 36(10): 2569–2576 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0273>

参数未知的离散系统Q-学习优化状态估计与控制

Q-learning optimal state estimation and control for discrete systems with unknown parameters

控制与决策. 2020, 35(12): 2889–2897 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0180>

离散线性系统有限频域基于观测器的迭代学习控制

邹伟, 沈艳霞[†]

(江南大学 物联网技术应用教育部工程研究中心, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对一类离散线性系统, 在有限频域范围内研究基于观测器的迭代学习控制问题. 首先, 结合二维系统理论, 构建由基于观测器的状态反馈和 PID 型前馈学习项组成的控制器; 然后, 借助于广义 Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理, 将闭环系统有限频域性能规范转换为相应的线性矩阵不等式 (LMI), 进而得到控制器和观测器存在的充分条件, 同时, 该条件也确保闭环控制系统的稳定性和跟踪误差单调收敛性; 最后, 通过桁架机器人系统的仿真, 验证所提出设计方法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 离散线性系统; 有限频域范围; 基于观测器的状态反馈; 广义 KYP 引理

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1705

引用格式: 邹伟, 沈艳霞. 离散线性系统有限频域基于观测器的迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(5): 1745-1753.

Observer-based iterative learning control for discrete linear systems in finite frequency domains

ZOU Wei, SHEN Yan-xia[†]

(Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: For a class of discrete linear systems, this paper deals with the problem of designing an observer-based iterative learning control scheme in the finite frequency range. First, the controller is constructed by combining an observer-based state feedback with a PID-type feedforward learning term on the basis of the two-dimensional system theory. Then, by means of the Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) lemma, the finite frequency domain specifications of the resulting closed-loop system are transformed into corresponding linear matrix inequalities (LMI), furthermore, the sufficient conditions for the existence of the controller and the observer are also obtained. Simultaneously, these conditions guarantee the stability of the close-loop controlled system and the monotonic convergence of the tracking error. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by the simulation of a gantry robot.

Keywords: iterative learning control; discrete linear systems; finite frequency range; observer-based state feedback; generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma

0 引言

迭代学习控制 (ILC) 是一种能够有效改善系统性能的智能控制方法, 广泛应用于有限时间区间内执行重复动作的控制过程, 其利用系统以往控制过程中的经验知识, 不断地优化当前控制输入, 使得系统输出在迭代过程中逐渐跟踪上期望轨迹. 由于迭代学习控制器结构简单, 适应性强, 对模型信息要求低等特点, 受到了越来越多研究者的青睐^[1-2].

ILC 过程在时间轴和批次轴两个方向上均有动态行为, 因此, 可利用二维系统理论对 ILC 系统进行

分析和设计, 全面掌握系统特性, 达到高效控制的目的. 文献[3]基于二维 Roesser 模型, 设计了一种鲁棒保性能迭代学习控制器, 通过迭代学习过程的反馈控制与基于观测器的扰动补偿相结合, 从而确保了系统的鲁棒稳定性能. 文献[4]基于二维系统框架, 将模型预测控制器与迭代学习控制器相结合, 研究了不确定性间歇过程的鲁棒控制问题, 并分析了闭环系统鲁棒收敛性和跟踪性能. 文献[5]将具有随机执行器故障的间歇过程转化为等价二维随机系统, 并设计了随机迭代学习容错控制器, 从而保证了闭环系统在故障条

收稿日期: 2022-09-27; 录用日期: 2023-04-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61573167, 61572237); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目 (KYCX20_1771).

责任编辑: 郭雷.

[†]通讯作者. E-mail: shenyx@jiangnan.edu.cn.

件下的稳定运行. 这些 ILC 过程一般利用 Lyapunov 稳定性理论从时域角度推导系统的稳定性和误差收敛性条件, 这会使得迭代学习控制器出现过度设计, 给控制系统带来一定的保守性. 实际的控制系统及其特性通常具有鲜明的有限频率特征. 因此, 在有限频域范围内探讨 ILC 系统的分析和综合问题是必要的.

对于 ILC 系统而言, 广义 KYP 引理为系统有限频域性能分析提供了可靠有效的工具. 针对离散线性重复过程, 文献[6]设计了二维模型的迭代学习控制器, 利用广义 KYP 引理, 探讨了闭环系统的稳定性和收敛性条件. 在此基础上, 当离散线性重复过程存在不同相对度时, 文献[7]在二维系统框架下, 提出了有限频域范围的动态 ILC 算法, 借助广义 KYP 引理和 LMI 技术, 分析了相应二维闭环动态模型的稳定性. 这些控制系统均利用了系统的状态反馈和跟踪误差信息来设计迭代学习控制器, 状态反馈变量在提高迭代学习过程的收敛速度, 实现更高精度的跟踪等方面有着不可替代的作用, 这便要求被控对象的状态量准确已知或是可测量的^[8]. 然而, 在大多数实际控制系统中, 状态量通常是不可测的. 为了克服此类问题, 可设计一种状态观测器来估计系统的不可测状态量, 并利用观测器的状态进行状态反馈. 目前, 状态观测器的设计方法有很多. 卡尔曼观测器针对具有随机噪声(通常为高斯白噪声)的系统, 通过建模误差和量测噪声误差的统计特性, 选择出最小线性方差的增益, 得到了最优估计器. 函数观测器以重构被观测系统状态的反馈函数为目标, 重构被观测系统的某些状态变量. 大多 ILC 系统是一种重复过程, 运行时不会产生随机噪声; 此外, 迭代学习控制器要重构状态信息本身, 而不是其反馈函数, 对于 ILC 系统而言, 得到的信息越全面, 控制性能越好. 龙伯格观测器结构简单, 性能表现优异, 相较于卡尔曼观测器, 其所得到的状态更准确, 使得观测器的稳定性和准确性更好. 函数观测器在维数上通常低于龙伯格观测器, ILC 系统使用函数观测器也会增加控制器参数的耦合性, 从而导致系统的保守性增加. 龙伯格观测器在 ILC 系统中已有很多应用. 文献[9]利用二维系统理论, 针对线性重复过程, 探究了基于观测器的 PD 型迭代学习控制器设计问题, 并通过 KYP 引理分析了控制系统的有限频域性能. 文献[10]更进一步地研究了线性时滞重复过程基于观测器的 PD 型 ILC 方法, 并分析了控制系统维持稳定性的充分条件. 但是, 这些充分条件具有一定程度的保守性, 且这些控制方案也没有考虑

到系统跟踪误差沿着时间方向的积分, 在学习律中引入跟踪误差的积分环节, 将有利于提高系统的跟踪性能.

本文针对一类离散线性系统, 在有限频域范围内研究基于观测器的 ILC 策略. 控制器由基于观测器的状态反馈和 PID 型前馈学习项构成, 以解决系统状态不可测问题, 并提高系统的跟踪性能. 在等价的二维闭环系统基础上, 利用广义 KYP 引理, 使得闭环系统的有限频域性能分析问题转换为 LMI 的可行性问题, 并给出系统满足稳定性和跟踪误差的单调收敛性的充分条件, 同时得到控制器和观测器的参数矩阵. 所提出控制算法在文献[9-10]基于观测器的 PD 型 ILC 算法的基础上, 加入积分控制策略, 更有利于改善系统的控制性能. 此外, 与以往有限频域范围 ILC 过程相比, 本文在定理条件中引入一些松弛矩阵作为决策变量, 从而降低控制系统的保守性, 进一步提高该方案的适用性. 最后, 将所提出算法应用于桁架机器人系统, 在仿真时与基于观测器的其他类型 ILC 算法进行比较, 仿真结果验证了所提出方法的有效性和优点.

本文中: I 和 O 分别为适当维数的单位阵和 0 矩阵; $X > 0$ ($X < 0$) 表示矩阵是正定的(负定的); 用 X^\perp 表示矩阵 X 的正交补, X^T 为 X 的转置, $\text{sym}(X) = X + X^T$, 符号 $\text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 为由对角块 X_1, X_2, \dots, X_n 组成的对角矩阵; $\rho(\cdot)$ 为矩阵的谱半径; 符号“*”为对称矩阵中的转置元素; 符号“ \forall ”表示任意.

1 问题描述

考虑一类在有限时间区间上重复运行的离散线性系统, 其状态空间模型描述如下式所示:

$$\begin{cases} x(t+1, k) = Ax(t, k) + Bu(t, k); \\ y(t, k) = Cx(t, k), \quad 0 \leq t \leq T_p. \end{cases} \quad (1)$$

其中: 重复周期 t 和 k 分别为系统运行的时间和批次; $x(t, k) \in R^n$ 、 $u(t, k) \in R^m$ 和 $y(t, k) \in R^l$ 分别为系统在第 k 批次 t 时刻的状态、输入和输出变量; 不失一般性, 假设 $x(0, k) = x_0$ 为系统每个迭代批次的初始状态条件; A 、 B 和 C 为具有适当维数的系统矩阵且 $CB \neq 0$; 系统矩阵 $\{A, B\}$ 可控, $\{C, A\}$ 可观. 针对系统(1), 通常的 ILC 策略为采用前一批次的输入变量与修正项之和来构建当前批次的控制量, 其形式如下式所示:

$$u(t, k+1) = u(t, k) + r(t, k+1). \quad (2)$$

式中: $r(t, k + 1)$ 为迭代学习更新律; $u(t, 0)$ 为控制输入量的初始值, 在实际中常重置为 0. 定义系统当前批次的输出跟踪误差为

$$e(t, k + 1) = y_d(t) - y(t, k + 1), \quad (3)$$

其中 $y_d(t)$ 为系统的期望轨迹. 相应地, 由 $\sum e(t, k + 1)$ 表示误差 $e(t, k + 1)$ 在时间上的积分, 即

$$\sum e(t, k + 1) = \sum_{i=0}^t e(i, k + 1), \quad (4)$$

则有 $\sum e(t + 1, k + 1) = \sum e(t, k + 1) + e(t + 1, k + 1)$.

在以往的 ILC 过程中, 迭代学习更新律一般由状态反馈向量和前馈学习量组成, 这便要求 ILC 系统的状态变量准确已知或可直接测得. 然而, 在实际工程应用中, 系统的全部状态通常是难以获得的. 鉴于此, 本文采用一种合适的观测器对系统的状态变量进行估计, 实现状态重构. 对离散线性系统(1)构造如下形式的同维状态观测器:

$$\begin{cases} \hat{x}(t + 1, k) = \\ A\hat{x}(t, k) + Bu(t, k) + L(y(t, k) - \hat{y}(t, k)), \\ \hat{y}(t, k) = C\hat{x}(t, k). \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\hat{x}(t, k) \in R^n$ 为 $x(t, k)$ 的估计变量, $\hat{y}(t, k) \in R^l$ 为估计输出量, L 为待设计的观测器增益矩阵.

为了方便起见, 分别引入估计误差、估计量的增量和估计误差的增量, 即

$$\begin{cases} \tilde{x}(t, k) = x(t, k) - \hat{x}(t, k), \\ \hat{\eta}(t, k + 1) = \hat{x}(t, k + 1) - \hat{x}(t, k), \\ \tilde{\eta}(t, k + 1) = \tilde{x}(t, k + 1) - \tilde{x}(t, k). \end{cases} \quad (6)$$

式(2)中的迭代学习更新律可采用如下形式:

$$\begin{aligned} r(t, k + 1) = & K_1 \hat{\eta}(t, k + 1) + K_2 e(t + 1, k) + K_3 \times \\ & \sum e(t, k + 1) + K_4 (e(t + 1, k) - e(t, k)) = \\ & K_1 \hat{\eta}(t, k + 1) + K_3 \sum e(t, k + 1) + \\ & Ke(t + 1, k) - K_4 e(t, k). \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $K = K_2 + K_4$, $K_1 \sim K_4$ 为待定的学习增益. 该迭代学习更新律由基于观测器的状态反馈控制和基于跟踪误差的 PID 型前馈学习项构成, 基于观测器的 PID 型 ILC 系统的结构如图 1 所示. 特别地, 当 $K_3 = 0$ 时, 式(7)变为基于观测器的 PD 型迭代学习更新律; 当 $K_3 = 0$ 且 $K_4 = 0$ 时, 式(7)变为基于观测器的 P 型迭代学习更新律. 由式(1)~(7), 得到

$$\tilde{\eta}(t + 1, k + 1) = (A - LC)\tilde{\eta}(t, k + 1), \quad (8)$$

$$\hat{\eta}(t + 1, k + 1) = LC\hat{\eta}(t, k + 1) + (A + BK_1) \times$$

$$\hat{\eta}(t, k + 1) + BK_3 \sum e(t, k + 1) + BK_4 e(t + 1, k) - BK_4 e(t, k), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \sum e(t + 1, k + 1) = \\ & -CA\tilde{\eta}(t, k + 1) - C(A + BK_1)\hat{\eta}(t, k + 1) + \\ & (I - CBK_3) \sum e(t, k + 1) + \\ & (I - CBK)e(t + 1, k) + CBK_4 e(t, k), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} e(t + 1, k + 1) = & -CA\tilde{\eta}(t, k + 1) - C(A + BK_1)\hat{\eta}(t, k + 1) - \\ & CBK_3 \sum e(t, k + 1) + (I - CBK)e(t + 1, k) + \\ & CBK_4 e(t, k). \end{aligned} \quad (11)$$

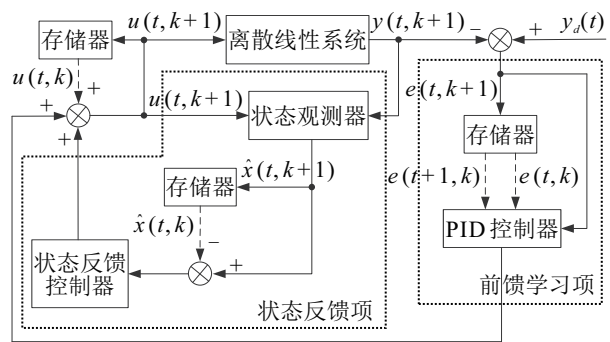


图 1 基于观测器的 PID 型 ILC 系统

$$\text{定义 } \xi(t, k + 1) = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}(t, k + 1) \\ \hat{\eta}(t, k + 1) \\ \sum e(t, k + 1) \end{bmatrix}, \text{ 结合式(8)~}$$

(11), 得到如下系统模型:

$$\begin{cases} \xi(t + 1, k + 1) = \\ \hat{A}\xi(t, k + 1) + \hat{B}_1 e(t, k) + \hat{B}_2 e(t + 1, k), \\ e(t + 1, k + 1) = \\ \hat{C}\xi(t, k + 1) + \hat{D}_1 e(t, k) + \hat{D}_2 e(t + 1, k). \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \bar{A} + \bar{B}_0 \bar{K} \bar{C}_0, \quad \hat{B}_1 = \bar{B}_1 K_4, \quad \hat{B}_2 = \bar{B}_2 - \bar{B}_1 K, \\ \hat{C} &= -\bar{C}_1 \hat{A}, \quad \hat{D}_1 = CBK_4, \quad \hat{D}_2 = I - CBK, \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & O & O \\ O & A & O \\ -CA & -CA & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_0 = \begin{bmatrix} -I & O & O \\ I & B & B \\ O & -CB & -CB \end{bmatrix},$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} L & O & O \\ O & K_1 & O \\ O & O & K_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_0 = \begin{bmatrix} C & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} O \\ -B \\ CB \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2^T = [O \quad O \quad I], \quad \bar{C}_1 = [C \quad C \quad O].$$

对于 $\xi(t, k + 1)$, 在时间方向上定义平移算子 z , 有

$$z\xi(t, k + 1) = \xi(t + 1, k + 1). \quad (13)$$

由式(13)得到从 $e(t, k)$ 到 $\xi(t, k + 1)$ 的传递函数矩阵为

$$F(z) = (zI - \hat{A})^{-1}(\hat{B}_1 + z\hat{B}_2). \quad (14)$$

假设 $(zI - \hat{A})^{-1}$ 存在,有 $(zI - \hat{A})^{-1}(zI - \hat{A}) = z(zI - \hat{A})^{-1} - (zI - \hat{A})^{-1}\hat{A} = I$,则

$$F(z) = (zI - \hat{A})^{-1}\hat{B}_1 + z(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B}_2 = \hat{B}_2 + (zI - \hat{A})^{-1}(\hat{B}_1 + \hat{A}\hat{B}_2). \quad (15)$$

跟踪误差在批次 k 上的传递函数可写为

$$E_k(z) = Y_d(z) - Y_k(z) = Y_d(z) - CX_k(z). \quad (16)$$

其中: $E_k(z)$ 、 $Y_d(z)$ 、 $Y_k(z)$ 和 $X_k(z)$ 分别为 $e(t, k)$ 、 $Y_d(t)$ 、 $Y_k(t)$ 和 $X_k(t)$ 的 z 变换,有

$$E_{k+1}(z) = E_k(z) - C(X_{k+1}(z) - X_k(z)) = E_k(z) - \bar{C}_1\xi_{k+1}(z) = G(z)E_k(z), \quad (17)$$

式中 $G(z)$ 为跟踪误差 $e(t, k)$ 到 $e(t, k + 1)$ 的传递函数.由式(13)~(17),得到

$$G(z) = I - \bar{C}_1F(z) = (I - \bar{C}_1\hat{B}_2) - \bar{C}_1(zI - \hat{A})^{-1}(\hat{B}_1 + \hat{A}\hat{B}_2). \quad (18)$$

因此,ILC系统可重新改写为如下形式:

$$\begin{cases} \xi(t + 1, k + 1) = \mathbf{A}\xi(t, k + 1) + \mathbf{B}e(t, k), \\ e(t, k + 1) = \mathbf{C}\xi(t, k + 1) + \mathbf{D}e(t, k). \end{cases} \quad (19)$$

其中: $\mathbf{A} = \bar{A} + \bar{B}_0\bar{K}\bar{C}_0$, $\mathbf{B} = \bar{B}_1K_4 + (\bar{A} + \bar{B}_0\bar{K}\bar{C}_0) \times (\bar{B}_2 - \bar{B}_1K)$, $\mathbf{C} = -\bar{C}_1$, $\mathbf{D} = I - CBK$.

本文的控制目标是针对难以获取状态量的系统(1),构造一种状态观测器重构系统的状态,并设计基于观测器的PID型ILC方案,使得被控系统稳定,并在指定的有限频域范围内系统的跟踪误差在 l_2 范数意义上单调收敛至0.

为了分析闭环系统的控制性能,引入以下引理.

引理1^[11] 假设 $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 可控, $\{\mathbf{C}, \mathbf{A}\}$ 可观,则式(13)所描述的闭环离散系统稳定,当且仅当以下条件成立:

1) $\rho(\mathbf{D}) < 1$;

2) $\rho(\mathbf{A}) < 1$;

3) 系统的传递函数矩阵为 $G(z) = \mathbf{C}(zI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$, $z = e^{j\omega}$, $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$,其所有特征值模均严格小于1.

注1 控制系统的可控性和可观测性是检验控制器和观测器有效性的必要手段.将可控性秩判据 $\text{rank}[\mathbf{A} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$ 和可观测性秩判据 $\text{rank}[\mathbf{C}^T \ (\mathbf{C}\mathbf{A})^T \ \dots \ (\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1})^T]^T = n$ 成立与否作为判断条件,若该条件不成立,则控制算法不可行.

引理2^[12] 对于传递函数为 $G(z)$,且频率响应矩阵为 $G(e^{j\omega}) = \mathbf{C}(e^{j\omega}I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ 的离散线性系统,下列两个不等式是等价的:

1) 频域响应不等式为

$$\begin{bmatrix} G(e^{j\omega}) \\ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} G(e^{j\omega}) \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall \omega \in \Theta. \quad (20)$$

其中: Π 为给定的实矩阵且 $\Pi = \Pi^T$, Θ 为相应的不同频域范围,如表1所示.

表1 系统频率取值范围

	低频(LF)	中频(MF)	高频(HF)
Θ	$ \omega < \omega_l$	$\omega_l < \omega < \omega_2$	$ \omega \geq \omega_h$

2) 存在矩阵 $P_1 = P_1^T, Q > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ I & O \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ I & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ O & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ O & I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

其中: $\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \Xi_2^T & \Xi_3 \end{bmatrix}$, $\Xi_1 = -P_1$,且

$$\Xi_2 = \begin{cases} Q, & \text{(LF);} \\ e^{j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} Q, & \text{(MF);} \\ -Q, & \text{(HF);} \end{cases}$$

$$\Xi_3 = \begin{cases} P_1 - 2\cos(\omega_l)Q, & \text{(LF);} \\ P_1 - 2\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)Q, & \text{(MF);} \\ P_1 + 2\cos(\omega_h)Q, & \text{(HF).} \end{cases}$$

引理3^[13] 给定适当维数的矩阵 Γ 、 Λ 和 Σ ,且 $\Gamma = \Gamma^T$,则下列两种表述是等价的:

1) 存在矩阵变量 W ,使得

$$\Gamma + \text{sym}\{\Lambda^T W \Sigma\} < 0. \quad (22)$$

2) 以下矩阵不等式成立:

$$\begin{cases} \Lambda^{\perp T} \Gamma \Lambda^{\perp} < 0, \Sigma^{\perp} = O, \Lambda^{\perp} \neq O; \\ \Sigma^{\perp T} \Gamma \Sigma^{\perp} < 0, \Lambda^{\perp} = O, \Sigma^{\perp} \neq O; \\ \Lambda^{\perp T} \Gamma \Lambda^{\perp} < 0, \Sigma^{\perp T} \Gamma \Sigma^{\perp} < 0, \Lambda^{\perp} \neq O, \Sigma^{\perp} \neq O. \end{cases} \quad (23)$$

2 有限频域范围的稳定性分析

本节讨论基于观测器的PID型ILC方案,同时以LMI的形式给出闭环系统跟踪误差单调收敛以及系统稳定的充分条件.

结合式(17)可知,当且仅当下列不等式成立,闭环系统的跟踪误差随着 $k \rightarrow \infty$ 收敛至0:

$$\rho(G(e^{j\omega})) \leq 1, \forall \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (24)$$

其中: $G(e^{j\omega})$ 如引理2,为系统传递函数的频率响应矩阵.然而,在实际的ILC系统中,即使满足上述条件,某些控制系统在误差收敛时也可能有较差的瞬态性

能(跟踪误差先增大再逐渐衰减). 为了解决这类问题,使得 $G(e^{j\omega})$ 满足以下充分条件:

$$\bar{\sigma}(G(e^{j\omega})) < 1, \forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad (25)$$

式中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 为其矩阵参数的最大奇异值. 值得注意的是,控制系统及其性能指标通常具有明显的有限频域特性,因此,上述条件的频角只需要满足引理2中的有限频率范围 Θ . 此外,为了进一步加快跟踪误差的收敛速度,可选取标量 $\gamma \in (0, 1]$ 在作为调优参数,则有

$$\rho(G(e^{j\omega})) \leq \bar{\sigma}(G(e^{j\omega})) < \gamma, \forall \omega \in \Theta. \quad (26)$$

对于给定的标量 $\gamma \in (0, 1]$,由于

$$\bar{\sigma}(G(e^{j\omega})) < \gamma \Leftrightarrow \|G(e^{j\omega})\|_\infty < \gamma, \forall \omega \in \Theta, \quad (27)$$

用 $\|\cdot\|_2$ 表示 l_2 范数. 不等式(27)成立,则有

$$\|e(t, k)\|_2 \leq \|G(e^{j\omega})\|_\infty^k \|e(t, 0)\|_2. \quad (28)$$

因此,若不等式(26)成立,则闭环系统(19)的跟踪误差 $e(t, k)$ 在 l_2 范数意义上单调收敛趋向于0,即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(t, k)\|_2 = 0$.

不等式(26)的结果可进一步表述为对于任意 $\omega \in \Theta$,存在Hermitian矩阵 $P_2(e^{j\omega})$,使得

$$\begin{bmatrix} G(e^{j\omega}) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_2(e^{j\omega}) & O \\ O & -\gamma^2 P_2(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(e^{j\omega}) \\ I \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

其中: $P_2(e^{j\omega})$ 依赖于 ω 的待定矩阵,式(29)仍然难以求解,可考虑 $P_2(e^{j\omega})$ 为确定性实矩阵和待定对称实矩阵两种情形(即 $P_2(e^{j\omega}) = I$ 和 $P_2(e^{j\omega}) = P_2$)来降低计算的复杂性. 根据 $P_2(e^{j\omega})$ 的取值,选择对应的 Π ,不等式(29)即为引理2中的条件1).

为了求得观测器增益矩阵,可借鉴文献[9]的方法,假设对于矩阵 W_0 ,存在矩阵 N_0 ,使得

$$CW_0 = N_0C. \quad (30)$$

其中:矩阵 C 是满秩的,可奇异分解为 $C = U[R \ O] \times V^T$, U 和 V 为酉矩阵, R 为正对角线元素递减排列的对角矩阵. 矩阵 W_0 和 N_0 分别表示为

$$W_0 = V \begin{bmatrix} W_{11} & O \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} V^T, \quad (31)$$

并设 $N_0 = URW_{11}R^{-1}U^T$,则有

$$N_0C = UR[I \ O]V^T =$$

$$UR[I \ O]V^T V \begin{bmatrix} W_{11} & O \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} V^T = CW_0.$$

首先,考虑 $P_2(e^{j\omega}) = I$,则 $\Pi = \text{diag}\{I, -\gamma^2 I\}$,得到如下充分条件,确保ILC系统的稳定性和收敛性.

定理1 针对离散线性系统(1)在如式(7)基于观测器的PID型ILC作用下,若存在标量 $\gamma \in (0, 1]$ 和 ρ_1, ρ_2 满足 $\rho_1^2 - \rho_2^2 < 0$,则对称实矩阵 $\hat{S} > 0, \hat{Q} > 0, \hat{P}_1 > 0$ 以及适当维数的矩阵 $Y_1 = \text{diag}\{Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}\}, Y_2, Y_3, \hat{W}_1 = \text{diag}\{\hat{W}_{01}, \hat{W}_{02}, \hat{W}_{03}\}$,且 \hat{W}_{01} 的形式如式(31)所示,使得

$$\begin{bmatrix} \hat{S} + \text{sym}\{\rho_2 \hat{W}_1\} & -\rho_1 \hat{W}_1^T - \rho_2 F_A \\ * & -\hat{S} + \text{sym}\{\rho_1 F_A\} \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_1 & E_1 & O & O & O \\ * & E_2 & \bar{B}_1 Y_3 & (-\bar{C}_1 \hat{W}_1)^T & F_A \\ * & * & -\gamma^2 I & E_3^T & F_B^T \\ * & * & * & E_4 & O \\ * & * & * & * & -\text{sym}\{\hat{W}_1\} \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

其中: $E_1 = \hat{\Xi}_2 - \hat{W}_1^T, E_2 = \hat{\Xi}_3 + \text{sym}\{F_A\}, E_3 = I - CBY_2, E_4 = -I, F_A = \bar{A}\hat{W}_1 + \bar{B}_0 Y_1 \bar{C}_0, F_B = \bar{B}_2 - \bar{B}_1 Y_2, \hat{\Xi}_1 = \hat{W}_1^T \Xi_1 \hat{W}_1, \hat{\Xi}_2 = \hat{W}_1^T \Xi_2 \hat{W}_1, \hat{\Xi}_3 = \hat{W}_1^T \Xi_3 \hat{W}_1, \Xi_1 \sim \Xi_3$ 为式(21)中 Ξ 的块矩阵. 若上述LMI条件成立,则所得到的闭环系统(19)在有限频域 Θ 内稳定且跟踪误差单调收敛. 观测器增益和ILC参数分别为

$$\begin{aligned} L &= Y_{11} N_0^{-1}, K_1 = Y_{12} \hat{W}_{02}^{-1}, K_3 = Y_{13} \hat{W}_{03}^{-1}, \\ K &= Y_2, K_4 = Y_3, K_2 = K - K_4. \end{aligned} \quad (34)$$

式中: $N_0 = URW_{11}R^{-1}U^T$, U 和 V 由矩阵 C 的奇异分解求得.

证明 假设不等式(32)成立,则有 $\hat{S} + \rho_2 \hat{W}_1 + \rho_2 \hat{W}_1^T < 0$,这意味着 \hat{W}_1 是可逆矩阵,且 $\hat{W}_1^{-1} = \text{diag}\{\hat{W}_{01}^{-1}, \hat{W}_{02}^{-1}, \hat{W}_{03}^{-1}\}$. 若 \hat{W}_{01} 的形式如式(31)所示,则 $C = N_0 C \hat{W}_{01}^{-1}, \bar{K} \bar{C}_0 = Y_1 \bar{C}_0 \hat{W}_1^{-1}$. 将不等式(32)分别右乘和左乘 $\text{diag}\{\hat{W}_1^{-1}, \hat{W}_1^{-1}\}$ 及其转置矩阵,并设 $W_1 = \hat{W}_1^{-1}, S = W_1^T \hat{S} W_1$,得到

$$\begin{bmatrix} S & O \\ * & -S \end{bmatrix} + \text{sym}\left\{ \begin{bmatrix} -I \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix} W_1 [-\rho_2 I \ \rho_1 I] \right\} < 0. \quad (35)$$

取 $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} S & O \\ * & -S \end{bmatrix}, A_1 = [-I \ \mathbf{A}], A_1^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ I \end{bmatrix}, \Sigma_1 = [-\rho_2 I \ \rho_1 I], \Sigma_1^\dagger = [\rho_1 I \ \rho_2 I]^T$. 将引理3的结果用于不等式(35),得到

$$A_1^{\dagger T} \Gamma_1 A_1^\dagger = \mathbf{A}^T S \mathbf{A} - S < 0, \quad (36)$$

这表明 $\rho(\mathbf{A}) < 1$,即引理1中的条件2)成立. 而 $\Sigma_1^{\dagger T} \Gamma_1 \Sigma_1^\dagger = (\rho_1^2 - \rho_2^2)S$,当 $\hat{S} > 0$ 时, $S > 0$,则 $\Sigma_1^{\dagger T} \Gamma_1 \Sigma_1^\dagger < 0$ 也成立.

若不等式(33)成立,则下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & (I - CBY_2)^T \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

对式(37)采用等效变换,得到 $\mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 I < 0$,则

$\rho(\mathbf{D}) < \gamma \leq 1$, 满足引理1的条件1). 式(33)可改写为

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & J_1 \\ * & O \end{bmatrix} + \text{sym}\left\{ \begin{bmatrix} N_1 \\ -I \end{bmatrix} \hat{W}_1 [O \ I] \right\} < 0, \quad (38)$$

其中

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_1 & E_1 & O & O \\ * & E_2 & \bar{B}_1 Y_3 & (-\bar{C}_1 \hat{W}_1)^T \\ * & * & -\gamma^2 I & E_3^T \\ * & * & * & E_4 \end{bmatrix},$$

$$J_1^T = [O \ O \ F_B \ O], \quad N_1^T = [O \ \mathbf{A}^T \ O \ O].$$

由引理3, 得到

$$\begin{aligned} [I \ N_1] \begin{bmatrix} \Psi_1 & J_1 \\ * & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ N_1^T \end{bmatrix} &= \Psi_1 + \text{sym}\{N_1 J_1^T\} = \\ \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_1 & E_1 & O & O \\ * & E_2 & \bar{B}_1 Y_3 + \mathbf{A} F_B & (-\bar{C}_1 \hat{W}_1)^T \\ * & * & -\gamma^2 I & E_3^T \\ * & * & * & E_4 \end{bmatrix} &< 0. \quad (39) \end{aligned}$$

将不等式(39)左右两边分别乘以 $\text{diag}\{\hat{W}_1^T, \hat{W}_1^T, I, I\}$ 及其转置矩阵, 并设 $P_1 = W_1^T \hat{P}_1 W_1, Q = W_1^T \hat{Q} W_1$, 则 $\Xi_1 = W_1^T \hat{\Xi}_1 W_1, \Xi_2 = W_1^T \hat{\Xi}_2 W_1, \Xi_3 = W_1^T \hat{\Xi}_3 W_1$, 得到如下不等式:

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & F_1 & O & O \\ * & F_2 & W_1^T \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \mathbf{D}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (40)$$

其中: $F_1 = \Xi_2 - W_1, F_2 = \Xi_3 + \text{sym}\{\mathbf{A}^T W_1\}$. 不等式(40)进一步改写为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Xi_1 & F_1 & O \\ * & F_3 & W_1^T \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ * & * & -\gamma^2 I + \mathbf{D}^T \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \\ \Gamma_3 + \text{sym}\{A_3^T W_1 \Sigma_3\} &< 0. \quad (41) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F_3 &= \Xi_3 + \text{sym}\{\mathbf{A}^T W_1\} + \mathbf{C}^T \mathbf{C}, \\ \Gamma_3 &= \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & O \\ * & \Xi_3 + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ * & * & -\gamma^2 I + \mathbf{D}^T \mathbf{D} \end{bmatrix}, \\ A_3^T &= \begin{bmatrix} -I \\ \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = [O \ I \ O]. \end{aligned}$$

取 $A_3^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & I & O \\ \mathbf{B}^T & O & I \end{bmatrix}^T, \Sigma_3^\perp = \begin{bmatrix} I & O & O \\ O & O & I \end{bmatrix}^T$, 对不等式

(41)再次运用引理3, 得到

$$A_3^{\perp T} \Gamma_3 A_3^\perp < 0, \quad \Sigma_3^{\perp T} \Gamma_3 \Sigma_3^\perp < 0. \quad (42)$$

式(42)的第1个不等式可等价变换为引理2中的不等式(21), 故当 $\Pi = \text{diag}\{I, -\gamma^2 I\}$ 时, 引理2中的不等式(20)也成立, 满足引理1的条件3). \square

下面考虑 $P_2(e^{j\omega}) = P_2$, 而 P_2 为待定对称实矩阵, 则 $\Pi = \text{diag}\{P_2, -\gamma^2 P_2\}$. 这种情况与 $P_2(e^{j\omega}) = I$ 的结果不同, 所得条件更为复杂.

定理2 针对离散线性系统(1), 在如式(7)基于观测器的PID型ILC算法作用下, 若存在标量 $\gamma \in (0, 1]$ 和 ρ_1, ρ_2 满足 $\rho_1^2 - \rho_2^2 < 0$, 对称实矩阵 $\hat{S} > 0, \hat{Q} > 0, \hat{P}_1, \hat{P}_2 > 0$ 以及适当维数的矩阵 $Y_1 = \text{diag}\{Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}\}, Y_2, \hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3, \hat{W}_1 = \text{diag}\{\hat{W}_{01}, \hat{W}_{02}, \hat{W}_{03}\}$ 和 \hat{W}_2 , 且 \hat{W}_{01} 的形式如式(31)所示, 使得不等式(32)以及下列LMI同时成立:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ * & H_5 & H_6 & H_7 \\ * & * & -\text{sym}\{\hat{W}_2\} & O \\ * & * & * & -\text{sym}\{\hat{W}_1\} \end{bmatrix} < 0. \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{bmatrix} \hat{P}_2 - \text{sym}\{\hat{G}_1\} & -\bar{C}_1 \hat{W}_1 - \hat{G}_2 \\ -(\bar{C}_1 \hat{W}_1)^T - \hat{G}_2^T & \hat{\Xi}_3 + \text{sym}\{F_A\} \end{bmatrix}, \\ H_2 &= \begin{bmatrix} \hat{W}_2 - \mathbf{C} \mathbf{B} Y_2 - \hat{G}_3 & O \\ -(\bar{C}_1 \hat{W}_1)^T + \bar{B}_1 Y_3 & \hat{\Xi}_2^T - \hat{W}_1 + F_A^T \end{bmatrix}, \\ H_3 &= \begin{bmatrix} \hat{G}_1^T - \hat{W}_2 \\ -(\bar{C}_1 \hat{W}_1)^T + \hat{G}_2^T \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} O \\ F_A \end{bmatrix}, \\ H_5 &= \begin{bmatrix} -\gamma^2 \hat{P}_2 + \text{sym}\{\hat{W}_2 - \mathbf{C} \mathbf{B} Y_2\} & (\bar{B}_1 Y_3)^T \\ \bar{B}_1 Y_3 & \hat{\Xi}_1 - \text{sym}\{\hat{W}_1\} \end{bmatrix}, \\ H_6 &= \begin{bmatrix} \hat{G}_3^T + (\hat{W}_2 - \mathbf{C} \mathbf{B} Y_2)^T - \hat{W}_2 \\ O \end{bmatrix}, \quad H_7 = \begin{bmatrix} F_B^T \\ F_A \end{bmatrix}, \\ F_A &= \bar{A} \hat{W}_1 + \bar{B}_0 Y_1 \bar{C}_0, \quad F_B = \bar{B}_2 \hat{W}_2 - \bar{B}_1 Y_2, \\ \hat{\Xi}_1 &= \hat{W}_1^T \Xi_1 \hat{W}_1, \quad \hat{\Xi}_2 = \hat{W}_1^T \Xi_2 \hat{W}_1, \quad \hat{\Xi}_3 = \hat{W}_1^T \Xi_3 \hat{W}_1, \end{aligned}$$

而 $\Xi_1 \sim \Xi_3$ 为式(21)中 Ξ 的块矩阵. 则闭环系统(19)在有限频域 Θ 内稳定且跟踪误差单调收敛. 观测器增益和ILC参数 L 和 K_1, K_2, K_3 可通过式(34)求得, 而 $K = Y_2 \hat{W}_2^{-1}, K_4 = Y_3 \hat{W}_2^{-1}$.

证明 不等式(32)确保了引理1的条件2)成立. 定理2的不等式同样可表明 \hat{W}_1 和 \hat{W}_2 均为非奇异矩阵, 矩阵不等式(43)可改写为

$$\begin{bmatrix} \Psi_2 & J_2 \\ * & O \end{bmatrix} + \text{sym}\left\{ \begin{bmatrix} N_2 \\ -I \end{bmatrix} \hat{W}_1 [O \ I] \right\} < 0. \quad (44)$$

其中

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ * & H_5 & H_6 \\ * & * & -\text{sym}\{\hat{W}_2\} \end{bmatrix},$$

$$J_2^T = [O \ O \ F_B \ O \ O],$$

$$N_2^T = [O \ A^T \ O \ A^T \ O].$$

由引理3可知,下列不等式成立:

$$[I \ N_2] \begin{bmatrix} \Psi_2 & J_2 \\ * & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ N_2^T \end{bmatrix} = \Psi_2 + \text{sym}\{N_2 J_2^T\} < 0. \tag{45}$$

设 $W_1 = \hat{W}_1^{-1}, W_2 = \hat{W}_2^{-1}$, 将上述不等式前后分别乘以 $\text{diag}\{W_2^T, W_1^T, W_2^T, W_1^T, W_2^T\}$ 及其转置矩阵, 得到

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 & \hat{H}_3 \\ * & \hat{H}_5 & \hat{H}_6 \\ * & * & -\text{sym}\{W_2\} \end{bmatrix} < 0, \tag{46}$$

其中

$$\hat{H}_1 = \begin{bmatrix} P_2 - \text{sym}\{G_1\} & W_2^T C - G_2 \\ C^T W_2 - G_2^T & \Xi_3 + \text{sym}\{A^T W_1\} \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}_2 = \begin{bmatrix} W_2^T D - G_3 & O \\ C^T W_2 + W_1^T B & \Xi_2^T - W_1^T + A^T W_1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}_5 = \begin{bmatrix} -\gamma^2 P_2 + \text{sym}\{D^T W_2\} & B^T W_1 \\ W_1^T B & \Xi_1 - \text{sym}\{W_1\} \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}_3 = \begin{bmatrix} G_1^T - W_2^T \\ C^T W_2 + G_2^T \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}_6 = \begin{bmatrix} G_3^T + D^T W_2 - W_2^T \\ O \end{bmatrix},$$

$$G_1 = W_2^T \hat{G}_1 W_2, G_2 = W_2^T \hat{G}_2 W_1, G_3 = W_2^T \hat{G}_3 W_2,$$

$$Q = W_1^T \hat{Q} W_1, P_1 = W_1^T \hat{P}_1 W_1, P_2 = W_2^T \hat{P}_2 W_2.$$

不等式(46)可进一步改写为

$$\Gamma_4 + \text{sym}\{A_4^T W_3 \Sigma_4\} < 0, \tag{47}$$

式中

$$\Gamma_4 = \begin{bmatrix} P_2 - \text{sym}\{G_1\} & -G_2 & -G_3 & O & G_1^T \\ * & \Xi_3 & O & \Xi_2^T & G_2^T \\ * & * & -\gamma^2 P_2 & O & G_3^T \\ * & * & * & \Xi_1 & O \\ * & * & * & * & O \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} O & A & B & -I & O \\ O & C & D & O & -I \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} O & W_1 & O & W_1 & O \\ W_2 & O & W_2 & O & W_2 \end{bmatrix}, \Sigma_4 = I.$$

选择 $\Lambda_4^\perp = \begin{bmatrix} I & O & O & O & O \\ O & I & O & A^T & C^T \\ O & O & I & B^T & D^T \end{bmatrix}^T$, $\Sigma_4^\perp = O$, 由引理3, 得到

$$\Lambda_4^{\perp T} \Gamma_4 \Lambda_4^\perp = \Gamma_5 + \text{sym}\{\Lambda_5^T W_4 \Sigma_5\} < 0. \tag{48}$$

其中

$$\Gamma_5 = \begin{bmatrix} P_2 & O & O \\ * & E_5 & A^T \Xi_1 B + \Xi_2^T B \\ * & * & -\gamma^2 P_2 + B^T \Xi_1 B \end{bmatrix},$$

$$E_5 = A^T \Xi_1 A + \text{sym}\{\Xi_2^T A\} + \Xi_3,$$

$$A_5 = [-I \ C \ D], W_4 = [G_1 \ G_2 \ G_3], \Sigma_5 = I.$$

选取 $\Lambda_5^\perp = \begin{bmatrix} C^T & I & O \\ D^T & O & I \end{bmatrix}^T$, $\Sigma_5^\perp = O$, 再次运用引理3的结论, 则有以下不等式成立:

$$\Lambda_5^{\perp T} \Gamma_5 \Lambda_5^\perp = \begin{bmatrix} A & B \\ I & O \\ O & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & O \\ * & F_4 & C^T P_2 D \\ * & * & -\gamma^2 P_2 + D^T P_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & O \\ O & I \end{bmatrix} < 0. \tag{49}$$

式中: $F_4 = \Xi_3 + C^T P_2 C$, 由矩阵不等式(49)可知 $-\gamma^2 P_2 + D^T P_2 D < 0$, 从而得到 $\rho(D) < \gamma \leq 1$, 满足引理1的条件1). 通过矩阵不等式变换, 式(49)可进一步改写为引理2中的式(21), 由引理2的结论, 引理1的条件3)也成立. \square

注2 与以往有限频域范围ILC过程相比, 本文在定理2中, 引入了松弛矩阵 G_1, G_2, G_3 , 从而降低控制系统的保守性, 提高本控制方案的适用性.

3 仿真实例

为了验证所提出算法的有效性, 以桁架机器人系统^[14]为研究对象. 桁架机器人常用于执行物品搬运这种重复性任务, 它是一种基于空间XYZ直角坐标系的3轴机器人, 3个轴在空间上相互垂直正交. 可忽略3个轴间的相互影响, 采用开环频率响应方法对各轴进行建模, 获得Z轴传递函数为

$$G_z(s) = \frac{15.8869(s + 850.3)}{s(s^2 + 707.6s + 3.377 \times 10^5)}. \tag{50}$$

假设控制系统每个批次的运行时间为 $T_p = 2\text{s}$, 以采样时间 $T_s = 0.01\text{s}$ 将式(50)离散化, 得到系统(1)的离散线性状态空间模型、系数矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9941 & 0.04076 & 0.1082 \\ 0.1250 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.03125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

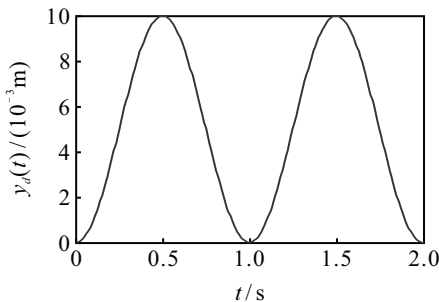
$$C = [0.01167 \quad 0.009147 \quad 0.008895].$$

系统重复运行时,各批次的初始状态为0.定义系统的期望轨迹为 $y_d(t) = 0.01 \sin(\pi t)^2$,期望轨迹在时域中的曲线如图2(a)所示,其频谱曲线如图2(b)所示.由图2(b)可见,参考轨迹的有效谐波是0 Hz ~ 5 Hz,为低频范围,故选择 $\omega_l = 0.1\pi$.选取 $\gamma = 0.9, \rho_1 = 1, \rho_2 = -10$.由定理2,可求得基于观测器的PID型ILC参数分别为

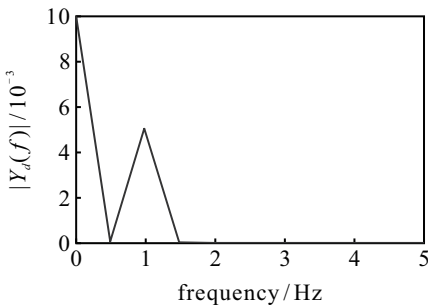
$$L = [54.1528 \quad 4.3919 \quad 2.5297]^T,$$

$$K_1 = [-33.9868 \quad -5.2397 \quad -5.5627],$$

$$K_2 = 1915.03, K_3 = 2195.28, K_4 = -25.9248.$$



(a) 系统的期望轨迹



(b) 期望轨迹的频谱图

图2 系统的期望轨迹及其频谱图

为了更好地体现所提出基于观测器的PID型ILC方法的优越性,考虑基于观测器的其他ILC算法,并将这些算法进行对比分析.此时,在相同条件下,可求得基于观测器的PD型ILC参数分别为

$$L = [48.3276 \quad 3.4498 \quad 1.9154]^T,$$

$$K_1 = [-36.7225 \quad -2.3062 \quad -3.8362],$$

$$K_2 = 1635.33, K_4 = -543.8628.$$

基于观测器的P型ILC参数分别为

$$L = [43.3426 \quad 3.5036 \quad 2.3080]^T,$$

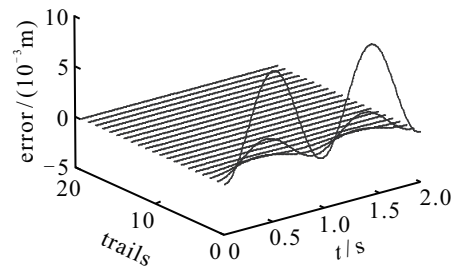
$$K_1 = [-39.0040 \quad -1.0090 \quad -2.2311],$$

$$K_2 = 859.8867.$$

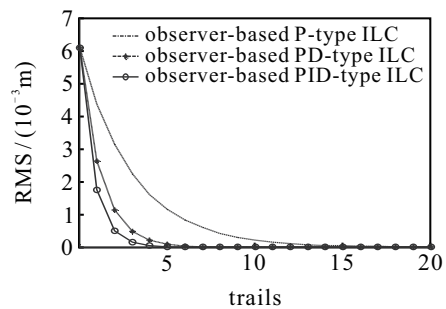
为了评价跟踪性能,引入均方根误差,即

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{201} \sum_{t=0}^{200} e^2(t, k)}. \quad (51)$$

图3(a)为系统的跟踪误差随着时间和运行批次的变化曲线.由图3(a)可见,控制系统在时间方向保持稳定,且其跟踪误差沿迭代方向单调收敛.图3(b)为基于观测器PID型ILC系统和基于观测器的其他ILC方案下,均方根误差(RMS)随迭代次数的变化曲线.显然,随着迭代批次的增加,系统的跟踪误差均逐渐减少,最终趋于0,且在使用基于观测器PID型ILC方法时,系统跟踪误差收敛速度更快,跟踪性能更好,更有利于改善系统的控制过程,体现了所提出方法的优势.



(a) 跟踪误差随时间和批次变化曲线



(b) RMS变化曲线

图3 跟踪误差变化曲线和RMS曲线

4 结论

本文针对重复运行的离散线性系统,讨论了有限频域范围内基于观测器的PID型ILC设计问题.通过广义KYP引理,在有限频域范围内以LMI的形式建立了闭环系统的稳定和跟踪误差单调收敛的充分条件,并求得控制器和观测器参数.最后,通过桁架机器人系统的仿真,验证了所提出算法的有效性.所提出控制方法是基于线性系统提出的,而实际控制系统却往往带有非线性特性.因此,本文后续将研究非线性系统有限频域的ILC设计问题,扩展ILC算法的应用.

参考文献(References)

- [1] Riaz S, Hui L, Aldemir M S, et al. A future concern of iterative learning control: A survey[J]. *Journal of Statistics and Management Systems*, 2021, 24(6): 1301-1322.
- [2] 曹伟, 乔金杰, 孙明. 非仿射非线性多智能体系统迭代学习一致跟踪[J]. *控制与决策*, 2023, 38(4): 929-934. (Cao W, Qiao J J, Sun M. Iterative learning consensus tracking for non-affine nonlinear multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(4): 929-934.)
- [3] Mandra S, Galkowski K, Aschemann H. Robust guaranteed cost ILC with dynamic feedforward and disturbance compensation for accurate PMSM position control[J]. *Control Engineering Practice*, 2017, 65: 36-47.
- [4] Zhou L M, Jia L, Wang Y L, et al. An integrated robust iterative learning control strategy for batch processes based on 2D system[J]. *Journal of Process Control*, 2020, 85: 136-148.
- [5] Wang L M, Li B Y. Probability based stochastic iterative learning control for batch processes with actuator faults[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 141466-141475.
- [6] Paszke W, Rogers E, Galkowski K. Experimentally verified generalized KYP Lemma based iterative learning control design[J]. *Control Engineering Practice*, 2016, 53: 57-67.
- [7] 汪磊, 杨慧中, 陶洪峰. 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(3): 599-608. (Wang L, Yang H Z, Tao H F. Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(3): 599-608.)
- [8] Emelianova J P. State observer-based iterative learning control of an uncertain continuous-time system[J]. *Automation and Remote Control*, 2020, 81(7): 1230-1242.
- [9] Paszke W, Rogers E, Patan K. Observer-based iterative learning control design in the repetitive process setting[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50(1): 13390-13395.
- [10] Gong Y J, Yang R N, Paszke W, et al. Observer-based iterative learning control for the discrete-time systems with time delay and finite frequency domain specifications[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2022, 20(1): 48-57.
- [11] Rogers E, Galkowski K, Owens D H. *Robustness*[M]. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007: 141-175.
- [12] Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41-59.
- [13] Boyd S, Ghaoui E L, Feron E, et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994: 32-33.
- [14] Hladowski L, Galkowski K, Cai Z L, et al. A 2D systems approach to iterative learning control for discrete linear processes with zero Markov parameters[J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(7): 1246-1262.

作者简介

邹伟(1989—), 男, 博士生, 从事迭代学习控制理论及应用等研究, E-mail: zouweijn@163.com;

沈艳霞(1973—), 女, 教授, 博士生导师, 从事新能源控制技术、风力发电、智能优化算法等研究, E-mail: shenyx@jiangnan.edu.cn.