



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION

机械臂自适应精确时间滑模控制

王杰, 沈艳霞

引用本文:

王杰, 沈艳霞. 机械臂自适应精确时间滑模控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 1918–1926.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1983>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于时间延时估计和自适应模糊滑模控制器的双机械臂协同阻抗控制](#)

Coordinated impedance control for dual-arm robots based on time delay estimation and adaptive fuzzy sliding mode controller
控制与决策. 2021, 36(6): 1311–1323 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1701>

[线控转向系统的自适应高阶滑模控制](#)

Adaptive higher-order sliding mode control for SbW system
控制与决策. 2021, 36(6): 1529–1536 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1526>

[磁悬浮开关磁阻电机的自适应终端滑模控制](#)

Adaptive terminal sliding mode control of bearingless switched reluctance motor
控制与决策. 2021, 36(6): 1449–1456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1064>

[多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制](#)

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft
控制与决策. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

[直线同步电动机磁悬浮系统的自适应模糊滑模控制](#)

Adaptive fuzzy sliding mode control for magnetic suspension system of linear synchronous motor
控制与决策. 2021, 36(3): 693–698 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0774>

机械臂自适应精确时间滑模控制

王杰, 沈艳霞[†]

(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 考虑机械臂中存在的未建模部分、摩擦力、外加干扰, 提出一种自适应精确时间滑模控制方法, 实现机械臂各关节角的轨迹跟踪. 首先对机械臂进行建模, 将未建模部分、摩擦力、外加扰动看作集中扰动; 其次, 设计一种精确时间收敛滑模面, 克服传统终端滑模面收敛时间高估的问题, 基于此设计全局精确时间收敛滑模控制方法, 使得机械臂系统能够在设定时间实现稳定, 并在误差收敛后仍具有较强的鲁棒性; 接着, 设计低通滤波器削减抖振, 通过自适应方法估计扰动上界, 避免增益的高估; 最后, 通过仿真实验验证所提出的控制方法能够严格控制机械臂系统的稳定时间, 并降低稳态误差, 实现机械臂系统的高精度轨迹跟踪控制.

关键词: 多轴机械臂; 精确时间收敛; 自适应方法; 低通滤波器; 滑模控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1983

引用格式: 王杰, 沈艳霞. 机械臂自适应精确时间滑模控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 1918-1926.

Adaptive exact-time sliding mode control for manipulator

WANG Jie, SHEN Yan-xia[†]

(School of Internet of Things and Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: Considering the problems of unmodeled parts, friction and external interference in the practical application of the manipulator, an adaptive exact-time sliding mode control method is proposed to realize the trajectory tracking of each joint of the manipulator. Firstly, the manipulator is modeled, and the unmodeled part, friction force and external disturbance are regarded as concentrated disturbances. Secondly, an exact-time sliding mode surface is designed to overcome the problem of overestimation of the convergence time of the traditional terminal sliding mode surface. Based on this, a global exact-time convergent sliding mode control method is designed for the manipulator system, which enables the manipulator system to achieve stability at the setting time and keep strong robustness after setting time. The upper bound of the disturbance is estimated by an adaptive method to avoid overestimation of the gain. Then a low-pass filter is designed to reduce chattering. Finally, the control method is simulated. The results show that the proposed control method can strictly control the stability time of the manipulator system, reduce the steady-state error, and achieve high-precision trajectory tracking control of the manipulator system.

Keywords: manipulator; exact-time convergence; adaptive method; low-pass filter; sliding mode control

0 引言

近年来, 伴随着科学技术的进步以及劳动力成本的上升, 机械臂在各个工业领域的应用越来越广泛. 应用中往往要求机械臂能够精确、快速地跟随目标轨迹, 但机械臂系统非线性、强耦合的特性, 以及参数不确定性、摩擦力、外部扰动等因素, 使得机械臂的高精度跟随成为一个颇具挑战性的问题, 多种先进控制方法亦被应用于机械臂的轨迹跟踪控制中, 如神经网络控制^[1]、模型预测控制^[2]、滑模控制^[3-5]等.

滑模控制方法因其计算量小、鲁棒性高的特点, 被广泛应用于机械臂的轨迹跟随中. 滑模控制的控制过程可以分为两个阶段: 一为趋近阶段, 即系统从初始点收敛至滑模面的过程; 二为滑模运动阶段, 即系统沿着滑模面运动的阶段. 对于趋近阶段, 文献[3-5]提出了不同的趋近率方法, 提高系统进入滑模面的速度, 但其从初始点收敛至滑模面的时间均存在一定程度的高估. 文献[6]应用全局滑模方法, 文献[7]设计积分滑模面, 将系统初始点设计在滑模面附近, 从

收稿日期: 2022-11-16; 录用日期: 2023-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573167, 61572237); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX23_2559).

责任编辑: 张国山.

[†]通讯作者. E-mail: shenyx@jiangnan.edu.cn.

而省去了趋近阶段. 对于滑模运动阶段, 传统滑模面只能实现渐近稳定, 因此文献[8-10]设计终端滑模面, 实现了机械臂系统的有限时间稳定, 但稳定时间依赖于系统的初始状态为摆脱对于初始状态的依赖, 文献[11-13]应用固定时间控制方法, 使得机械臂系统能够在设定的稳定时间内实现轨迹跟随. 无论是有限时间稳定或是固定时间稳定, 其收敛时间都存在高估的情况, 实际稳定时间将小于设定的稳定时间, 并且实际稳定时间仍然由系统的初始状态决定, 造成许多不必要的控制量. 基于此, 文献[14-16]提出不同的精确时间稳定控制方法, 无论系统的初始状态如何, 系统都将在设定的时刻达到稳定状态, 避免了有限时间稳定方法、固定时间稳定方法的稳定时间高估等情况. 然而文献[14-16]所设计的精确时间稳定控制方法在系统到达稳定状态后, 均面临着不同程度的鲁棒性下降, 这将影响系统的稳态性能, 严重时将会威胁系统的稳定性.

另外, 滑模控制方法存在高频抖振的问题, 抖振将加剧机械臂元件的磨损、劣化系统性, 甚至使系统失去稳定性. 抖振主要来源于控制器中的符号函数, 以及扰动上界未知带来的增益高估. 为了削减抖震, 文献[17-19]使用饱和函数代替符号函数. 文献[20-21]设计了低通滤波器, 对带有符号函数的控制输入项进行滤波, 从而削减抖振. 文献[22-24]设计了干扰观测器, 文献[25-26]设计自适应方法估算出扰动上界, 从而避免了扰动上界未知而带来的增益高估.

为实现机械臂的高精度跟踪控制, 本文提出一种新的精确时间收敛滑模面, 保证系统于滑模运动阶段在设定时刻达到稳定, 基于此设计一种精确时间收敛的全局自适应滑模控制方法(AExSMC), 将初始点设计在滑模面附近, 省去趋近阶段, 使得系统稳定时间等于滑模阶段误差收敛时间, 保证系统在设定时刻达到稳定. 设计低通滤波器削减系统抖振, 通过自适应方法进行扰动项的参数估计, 避免因扰动上界未知而带来的增益高估问题. 最后, 通过仿真验证了所提出算法的有效性和优越性.

1 机械臂模型

基于拉格朗日动力学, 对一个 n 自由度的机械臂进行建模, 其动力学模型^[27]如下:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q, \dot{q}) = \tau + d. \quad (1)$$

其中: $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ 为机械臂关节的位置、速度、加速度矢量; $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定惯性矩阵; $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为哥氏力和离心力矩阵; $G(q) \in \mathbb{R}^n$ 为重力矢量; $F(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ 为摩擦力矢量; $\tau \in \mathbb{R}^n$ 为机械臂控

制输入矢量; $d \in \mathbb{R}^n$ 为外加扰动矢量.

实际建模中, $M(q)$ 、 $C(q, \dot{q})$ 、 $G(q)$ 通常是不精确的, 可表示为

$$\begin{aligned} M(q) &= M_0(q) + \Delta M(q), \\ C(q, \dot{q}) &= C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}), \\ G(q) &= G_0(q) + \Delta G(q), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\Delta M(q)$ 、 $\Delta C(q, \dot{q})$ 、 $\Delta G(q)$ 代表建模不确定性.

将式(2)代入(1), 可得

$$\begin{aligned} \tau + d &= \\ &(M_0(q) + \Delta M(q))\ddot{q} + (C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}))\dot{q} + \\ &(G_0(q) + \Delta G(q)) + F(q, \dot{q}). \end{aligned} \quad (3)$$

令 $x_1 = q \in \mathbb{R}^n$, $x_2 = \dot{q} \in \mathbb{R}^n$, 将式(3)改写为二阶系统, 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = M_0(x_1)^{-1}u + H(x_1, x_2) + \\ \quad \Delta(x_1, x_2, d), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2) &= M_0^{-1}(-C_0(q, \dot{q}) - G_0(q)), \\ \Delta(x_1, x_2, d) &= M_0^{-1}(d - F(q, \dot{q}) - \Delta M(q)\ddot{q} - \\ &\quad \Delta G(q) - \Delta C(q, \dot{q})\dot{q}), \end{aligned}$$

$$u = \tau.$$

假设1 机械臂系统的期望关节角位置、期望关节角速度、期望关节角加速度是已知的. 机械臂系统的实际关节角位置、实际关节角速度是可测量的.

假设2 集中扰动 Δ 有界^[28], 即 $\|\Delta\| \leq a_0 + a_1\|q\| + a_2\|\dot{q}\|^2$, a_0, a_1, a_2 为未知的常数, $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数.

2 滑模面与控制器的设计与分析

将机械臂关节的误差定义为

$$\begin{aligned} e &= q - q_d, \\ \dot{e} &= \dot{q} - \dot{q}_d, \\ \ddot{e} &= \ddot{q} - \ddot{q}_d = \\ &M_0(q)^{-1}u + H(q, \dot{q}) + \Delta(q, \dot{q}, d) - \ddot{q}_d, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d$ 分别为期望角度、期望角速度、期望角加速度.

借鉴文献[16]所提出的全局滑模面形式, 设计一种新型精确时间收敛的全局滑模面, 其形式如下:

$$s = \dot{\sigma} - A(t) + B(t). \quad (6)$$

其中: $s = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T, \sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]^T, A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T, B = [B_1, B_2, \dots, B_n]^T$. 且有

$$\sigma_i = \frac{\pi}{2} \frac{pe_i}{1 + p|e_i|}. \quad (7)$$

$$A_i(t) = \begin{cases} -\frac{N}{t_f - t} \tan \sigma_i, & 0 \leq t < t_f; \\ -\chi \sigma_i, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (8)$$

$$B_i(t) = \begin{cases} -s_{1i}(0) \frac{(t_1 - t)^2}{t_1^2}, & 0 \leq t < t_1; \\ 0, & t \geq t_1. \end{cases} \quad (9)$$

这里: p 为常数, $e_i \in (-\infty, +\infty), \sigma_i \in (-\pi/2, \pi/2)$, σ_i 随着 e_i 的增加而严格单调递增; N, χ 为常数, t_f 为给定的收敛时间; t_1 为常数且 $t_1 < t_f, s_{1i}(t) = \dot{\sigma}_i(t) - A_i(t), s_{1i}(0) = \dot{\sigma}_i(0) - A_i(0)$.

定理 1 考虑式(6)所提出的滑模面, 跟踪误差 e 于滑模阶段将在设定时刻 t_f 实现收敛, 并在收敛后仍保持较强的鲁棒性.

证明 当 $0 < t < t_1$ 时, 有

$$\dot{\sigma}_i + \frac{N}{t_f - t} \tan \sigma_i = s_{1i}(0) \frac{(t_1 - t)^2}{t_1^2}. \quad (10)$$

在 t_1 时刻, $s_{1i}(0) \frac{(t_1 - t)^2}{t_1^2} = 0$, 因而在 $t_1 \leq t < t_f$ 时刻, 有

$$\dot{\sigma}_i = \frac{-N}{t_f - t} \tan \sigma_i. \quad (11)$$

对式(11)进行求解, 可得

$$\sigma_i = \arcsin \left(\frac{(t_f - t)^N}{t_f^N} \right). \quad (12)$$

由式(11)和(12)可知, 当 $t \rightarrow t_f$ 时, $\sigma_i \rightarrow 0, \dot{\sigma}_i \rightarrow 0$, 并且当 $t = t_f$ 时, $\sigma_i = 0, \dot{\sigma}_i = 0$. 结合式(7), 当 $t \rightarrow t_f$ 时, $e_i \rightarrow 0, \dot{e}_i \rightarrow 0$, 并且当 $t = t_f$ 时, $e_i = 0, \dot{e}_i = 0$. 即 e_i 能够在 t_f 时刻收敛于 0, 不存在收敛时间的高估. 最终, $\dot{\sigma}_i, \sigma_i$ 将于 $t = t_f$ 时刻收敛至平衡点, 相应地, \dot{e}_i, e_i 也将于 $t = t_f$ 时刻收敛至平衡点, 从而实现机械臂的轨迹跟随.

当 $t > t_f$ 时, $\dot{\sigma}_i = -\chi \sigma_i = 0$, 仍保持传统线性滑模面的形式, 这使得机械臂在完成轨迹跟随后仍然具有较强的鲁棒性, 克服了文献[14-16]所设计控制方法在实现收敛后鲁棒性下降的问题. \square

对式(7)进行一次求导和二次求导, 得到

$$\dot{\sigma}_i = \frac{\pi}{2} \frac{p\dot{e}_i}{(1 + p|e_i|)^2}, \quad (13)$$

$$\ddot{\sigma}_i = \frac{\pi}{2} \frac{p\ddot{e}_i}{(1 + p|e_i|)^2} - \pi \frac{p^2 e_i^2 \text{sign}(e_i)}{(1 + p|e_i|)^3}. \quad (14)$$

由式(14), $\ddot{\sigma}$ 可改写为

$$\ddot{\sigma} = \frac{\pi}{2} p E_1 \ddot{e} - E_2. \quad (15)$$

其中

$$E_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{(1 + p|e_1|)^2}, \dots, \frac{1}{(1 + p|e_n|)^2} \right),$$

$$E_2 = \left[\frac{\pi p^2 \dot{e}_1^2 \text{sign}(e_1)}{(1 + p|e_1|)^3}, \dots, \frac{\pi p^2 \dot{e}_n^2 \text{sign}(e_n)}{(1 + p|e_n|)^3} \right]^T.$$

对式(6)中的 s 进行求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{\sigma} - \dot{A}(t) + \dot{B}(t) = \\ &= \frac{\pi}{2} p E_1 \ddot{e} - E_2 - \dot{A}(t) + \dot{B}(t) = \\ &= \frac{\pi}{2} p E_1 (M_0^{-1} u - H + \Delta - \ddot{q}_d) - E_2 - \dot{A}(t) + \dot{B}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

控制器可设计为

$$u = u_{eq} + u_n, \quad (17)$$

$$u_{eq} = C_0 \dot{q} + G_0 + M_0 \ddot{q}_d + \frac{2}{p\pi} E_1^{-1} M_0 (E_2 + \dot{A}(t) - \dot{B}(t)), \quad (18)$$

$$u_n = -\frac{2h}{p\pi} E_1^{-1} M_0 s - M_0 u_{av}. \quad (19)$$

其中: h 为常数, u_{av} 为符号函数项 $(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \|q\| + \hat{a}_2 \|\dot{q}\|^2) \text{sign}(s)$ 经过低通滤波器滤波后的控制输入, $\text{sign}(s) = [\text{sign}(s_1), \dots, \text{sign}(s_n)]^T, u_{av}$ 形式为

$$\mu \dot{u}_{av} = -u_{av} + (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \|q\| + \hat{a}_2 \|\dot{q}\|^2) \text{sign}(s), \quad (20)$$

$0 < \mu < 1$ 为低通滤波器的时间常数. 根据等效原理, 选择合适的时间常数 μ , 可使扰动项 $(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \|q\| + \hat{a}_2 \|\dot{q}\|^2) \text{sign}(s)$ 与 u_{av} 等效^[16], 其中 $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ 为 a_0, a_1, a_2 的参数估计值, 通过设计估计出扰动上界而避免增益的高估. 因此, 通过选择合适的时间常数 μ , 能够在不影响系统动态性能的情况下削减控制输入的抖振.

将式(17)代入(16), 可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\pi}{2} p E_1 \left(\Delta - \frac{2h}{p\pi} E_1^{-1} s \right) - \\ &= \frac{\pi}{2} p E_1 (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \|q\| + \hat{a}_2 \|\dot{q}\|^2) \text{sign}(s). \end{aligned} \quad (21)$$

参数的自适应率为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_0 &= \frac{\pi}{2} p \omega \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1 + p|e_i|)^2}, \\ \dot{\hat{a}}_1 &= \frac{\pi}{2} p \omega \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1 + p|e_i|)^2} \|q\|, \\ \dot{\hat{a}}_2 &= \frac{\pi}{2} p \omega \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1 + p|e_i|)^2} \|\dot{q}\|^2, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 ω 为常数, 代表 $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ 的变化速率.

定理 2 考虑机械臂模型(4), 所设计控制器(17)、自适应率(22), 系统跟踪误差 e 将于设定时刻 t_f 实现收敛.

证明 选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}s^T s + \frac{1}{2\omega}(\hat{a}_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2\omega}(\hat{a}_1 - a_1)^2 + \frac{1}{2\omega}(\hat{a}_2 - a_2)^2. \quad (23)$$

对式(23)求导得

$$\dot{V} = s^T \dot{s} + \frac{1}{\omega}(\hat{a}_0 - a_0)\dot{\hat{a}}_0 + \frac{1}{\omega}(\hat{a}_1 - a_1)\dot{\hat{a}}_1 + \frac{1}{\omega}(\hat{a}_2 - a_2)\dot{\hat{a}}_2. \quad (24)$$

将式(21)代入(24),可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s^T \frac{\pi}{2} p E_1 \left(\Delta - \frac{2h}{p\pi} E_1^{-1} s \right) + \frac{1}{\omega}(\hat{a}_0 - a_0)\dot{\hat{a}}_0 - \\ & s^T \frac{\pi}{2} p E_1 (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \|q\| + \hat{a}_2 \|\dot{q}\|) \text{sign}(s) + \\ & \frac{1}{\omega}(\hat{a}_1 - a_1)\dot{\hat{a}}_1 + \frac{1}{\omega}(\hat{a}_2 - a_2)\dot{\hat{a}}_2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -hs^T s + \frac{\pi}{2} ps^T E_1 \Delta - \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \|q\| + \hat{a}_2 \|\dot{q}\|)^2 + \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} (\hat{a}_0 - a_0) + \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} (\hat{a}_1 - a_1) \|q\| + \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} (\hat{a}_2 - a_2) \|\dot{q}\|^2 = \\ & -hs^T s + \frac{\pi}{2} ps^T E_1 \Delta - \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} (a_0 + a_1 \|q\| + a_2 \|\dot{q}\|)^2 \leq \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} \max(|\Delta_i|) - \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} (a_0 + a_1 \|q\| + a_2 \|\dot{q}\|)^2 \leq \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} \|\Delta\| - \\ & \frac{\pi}{2} p \sum_{i=1}^n \frac{|s_i|}{(1+p|e_i|)^2} (a_0 + a_1 \|q\| + a_2 \|\dot{q}\|)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

由式(26), \dot{V} 为负半定, 因此系统最终将趋于稳定.

当 $t = 0$ 时, 由式(9)中的 $s_{1i}(0)$ 可得 $s_i(0) = 0$, 结合式(26)可知, 滑模变量 s 收敛, 故能够通过此全局方法将初始点设置在滑模面附近, 从而略去趋近阶段. 再由定理 1 可知, 所设计控制器(17)能够使跟踪误差 e 于 t_f 时刻实现收敛. \square

3 仿真实验与分析

对于多轴机械臂系统而言, 末端点处的几个轴主要影响末端点的姿态, 而末端点的轨迹主要受到前两

个轴的影响, 因此, 为了简化计算, 选取二自由度机械臂模型进行仿真实验.

取二自由度机械臂系统的动力学模型如图 1 所示, 有

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q, \dot{q}) = \tau + d. \quad (27)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix},$$

$$m_{11} = (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) + J_1,$$

$$m_{12} = m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2),$$

$$m_{21} = m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2),$$

$$m_{22} = m_2 l_2^2 + J_2,$$

$$c_{11} = -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2,$$

$$c_{12} = -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2),$$

$$c_{21} = m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1,$$

$$c_{22} = 0,$$

$$g_1 = (m_1 + m_2)l_1 g \cos(q_2) + m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2),$$

$$g_2 = m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2).$$

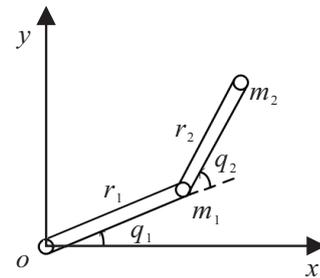


图 1 二自由度机械臂模型

仿真中参数设定为 $m_1 = 0.5 \text{ kg}$, $m_2 = 1.5 \text{ kg}$, $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 0.8 \text{ m}$, $J_1 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}$, $J_2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}$, $g = 9.8 \text{ N/s}^2$, 仿真步长为 0.001 s .

期望轨迹 $q_d = [\cos t, \sin t]^T$, 初始条件为 $q_0 = [0.5, 0.5]^T$, 假设机械臂系统所受扰动 $d - F(q, \dot{q}) = [0.5\dot{q}_1 + \sin 3q_1 + 0.3 \sin \dot{q}_1, 1.3\dot{q}_2 + 1.1 \sin 2q_2 + 0.8 \sin \dot{q}_2]^T$, $M_0 = 0.8M$, $C_0 = 0.8C$, $G_0 = 0.8G$.

3.1 滑模面收敛性比较

为验证所选用滑模面的优越性, 将所选用滑模面(11)与文献[14-16]提出的精确时间收敛滑模面进行比较. 对于精确时间收敛滑模面, 文献[14]提出如下滑模面:

$$\dot{e}_i = -\frac{a}{t_f - t} (1 - \exp(-e_i)). \quad (28)$$

文献[15]提出如下滑模面:

$$\dot{e}_i = \frac{e_i \cos\left(\frac{t}{t_f} - 1 + \frac{\pi}{2}\right)}{t_f \sin\left(\frac{t}{t_f} - 1 + \frac{\pi}{2}\right) - 1}. \quad (29)$$

文献[16]提出如下滑模面:

$$\dot{e}_i = -\frac{N}{t_f - t} e_i. \quad (30)$$

将式(7)、(11)与式(28)~(30)对 e_i 的收敛性能进行对比. 式(7)、(11)中,选取 $e_{i0} = -4, t_f = 2$. 为了探究不同参数下 e_i 的收敛性能,取: 1) $N = 2, p = 0.01$; 2) $N = 2, p = 1$; 3) $N = 5, p = 0.01$; 4) $N = 5, p = 1$. 式(28)中, $e_{i0} = -4, t_f = 2, a = 2$. 式(29)中, $e_{i0} = -4, t_f = 2$. 式(30)中, $e_{i0} = -4, t_f = 2$. N 的取值分别为: 1) $N = 2$; 2) $N = 5$. e_i, \dot{e}_i 的收敛情况如图2和图3所示.

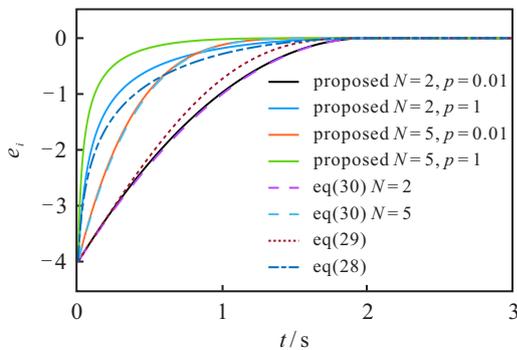


图2 e_i 的收敛情况

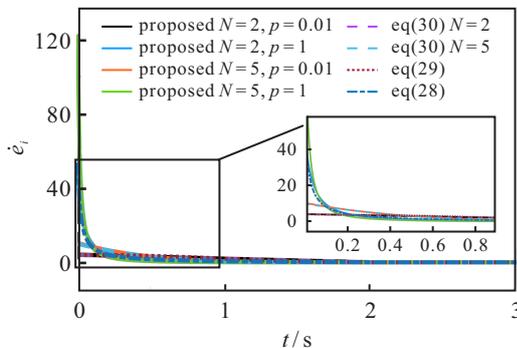


图3 \dot{e}_i 的收敛情况

对比于式(28)中 e_i 的收敛情况,当 $N = 2, p = 1$ 时,式(7)、(11)的 e_i 收敛过程中的调节时间更小, \dot{e}_i 的峰值更小. 实际应用中, \dot{e}_i 往往与控制输入量有关, \dot{e}_i 的峰值越大对于设备的要求便越高. 因此,式(7)、(11)中 e_i 的收敛性能优于式(28)中 e_i 的收敛性能.

对于式(29)而言, e_i 的收敛情况是固定的,而式(7)、(11)中 e_i 的收敛性能则可以通过改变参数 $N、p$ 进行调节. 这也意味着在设备性能允许的情况下,式(7)、(11)可以通过增大 $N、p$ 的值使跟踪误差更快地衰减;设备性能有限的情况下,可以通过缩小 $N、p$ 的值降低控制输入量,其使用能够适用于各种不同的情

况.

对于式(30)而言,当式(11)、(30)取相同 N 值时,若式(11)中 $p = 0.01$,则式(7)、(11)与(30)中 e_i 的收敛过程大致相同. 若式(7)中 $p = 1$,则式(7)、(11)中 e_i 收敛过程的调节时间更小,当然 \dot{e}_i 的峰值也会相应提升. 总体而言,式(7)、(11)相比于(30),在 e_i 的收敛过程的调节上更具灵活性.

3.2 控制器比较

为验证所设计控制方法(AExSMC)的有效性,与文献[29]提出的固定时间滑模控制方法(FxSMC)、文献[16]提出的精确时间滑模控制方法(ExSMC)进行对比. AExSMC的控制器设计为式(17). FxSMC的滑模面设计^[29]如下:

$$s_i = \dot{e}_i + \alpha_s \lambda_{1i}(e_i) + \beta_s \lambda_{2i}(e_i). \quad (31)$$

$$\lambda_{1i}(e_i) = \begin{cases} \text{sig}^{k_{1i}} e_i, & |e_i| > \varepsilon; \\ l_{1i} e_i + g_{1i} e_i^2 \text{sign}(e_i), & |e_i| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (32)$$

$$\lambda_{2i}(e_i) = \begin{cases} \text{sig}^{k_{2i}} e_i, & |e_i| > \varepsilon; \\ l_{2i} e_i + g_{2i} e_i^2 \text{sign}(e_i), & |e_i| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (33)$$

其中: $\alpha_s > 0, \beta_s > 0, \varepsilon$ 为很小的常数, $\text{sig}^{k_{1i}} e_i = |e_i|^{k_{1i}} \text{sign}(e_i)$, $k_{1i} = m_1^{\text{sign}(|e_i|-1)}$, $k_{2i} = m_2^{\text{sign}(1-|e_i|)}$, $l_{1i} = (2-k_{1i})\varepsilon^{k_{1i}-1}$, $l_{2i} = (2-k_{2i})\varepsilon^{k_{2i}-1}$, $m_1 > 1, 0 < m_2 < 1, g_{1i} = (k_{1i} - 1)\varepsilon^{k_{1i}-2}$, $g_{2i} = (k_{2i} - 1)\varepsilon^{k_{2i}-2}$.

FxSMC的控制器设计如下:

$$u = C_0 \dot{q} + G_0 + M_0 \ddot{q}_d - \zeta M_0 \text{sign}(s) - M_0 (\alpha_s \dot{\lambda}_1 + \beta_s \dot{\lambda}_2 + \alpha_r \text{sig}^{k_3} s + \beta_r \text{sig}^{k_4} s). \quad (34)$$

其中: $\alpha_r > 0, \beta_r > 0, m_3 > 1, 0 < m_4 < 1, k_3 = [k_{31}, \dots, k_{3n}]^T, k_4 = [k_{41}, \dots, k_{4n}]^T, k_{3i} = m_3^{\text{sign}(|s_i|-1)}$, $k_{4i} = m_4^{\text{sign}(1-|s_i|)}$, $\dot{\lambda}_1 = [\dot{\lambda}_{11}, \dots, \dot{\lambda}_{1n}]^T, \dot{\lambda}_2 = [\dot{\lambda}_{21}, \dots, \dot{\lambda}_{2n}]^T, \text{sig}^{k_i} s = [|s_1|^{k_{i1}} \text{sign}(s_1), \dots, |s_n|^{k_{in}} \text{sign}(s_n)]^T, \zeta > \|d\|$.

ExSMC的滑模面选择^[16]如下:

$$s_i = \dot{e}_i - A'_i(t) + B'_i(t). \quad (35)$$

$$A'_i(t) = \begin{cases} -\frac{N}{t_f - t} e_i, & 0 \leq t < t_f; \\ 0, & t \geq t_f. \end{cases} \quad (36)$$

$$B'_i(t) = \begin{cases} (y_i(0) - e_i(0)) \frac{(t_1 - t)^N}{t_1^N}, & 0 \leq t < t_1; \\ 0, & t \geq t_1. \end{cases} \quad (37)$$

其中: N 为常数, t_f 为设定的状态量 e_i 的收敛时间, t_1 为设定的 $B'_i(t)$ 的收敛时间, $t_1 < t_f$.

ExSMC的控制器设计如下:

$$u = M_0\ddot{q}_d + C_0\dot{q} + G_0 + M_0(\dot{A}'(t) - \dot{B}'(t)) - C_0s - M_0u_{av}, \quad (38)$$

$$\mu\dot{u}_{av,i} = -u_{av,i} + \zeta\text{sign}(s_i). \quad (39)$$

3种算法具体参数如表1所示.

表1 算法参数

算法	参数符号	数值
ExSMC	m_1, m_2, m_3	1.5, 0.5, 1.5
	m_4, α_s, β_s	0.5, 0.5, 0.5
	α_r, β_r, ζ	0.5, 0.5, 10
ExSMC	t_f, t_1, N	2.53, 1, 5
	μ, ζ	0.05, 10
AExSMC	t_f, t_1, N	2.53, 1, 5
	μ, p, ω	0.05, 2.5, 5
	χ, h	500, 10

由文献[29]可知,在上述参数下,FxSMC的收敛时间 $T \leq T_{\max} = 2 \ln 2 + 3^{\frac{1}{4}} 2^{-\frac{5}{4}} + 2^{-\frac{3}{4}} \approx 2.53$,因此可以将ExSMC、AExSMC控制方法中的收敛时间 t_f 设定为2.53,则FxSMC、ExSMC、AExSMC三种控制方法所设定的收敛时间相同,均为2.53 s.

二自由度机械臂的关节角1、关节角2的轨迹跟踪误差情况如图4和图5所示.3种方法均能在存在时变干扰的情况下完成对机械臂给定轨迹的跟随.对于关节角1,FxSMC方法大约在1.2 s使跟踪误差收敛,ExSMC方法、AExSMC方法则在设定的收敛时间2.53 s收敛.对于关节角2,FxSMC方法大约在0.95 s时使跟踪误差收敛,ExSMC方法、AExSMC方法则在2.53 s时刻使跟踪误差收敛.可以发现,FxSMC控制方法对于收敛时间有明显的高估情况,而ExSMC方法、AExSMC方法则能够在设定时间内使跟踪误差收敛.因此,相比于FxSMC方法,ExSMC方法、AExSMC方法更具可控性.然而,ExSMC方法、AExSMC方法在设定的收敛时间后都存在一定的震荡,这主要是因为仿真实验是离散的,而非理想中的连续,所以存在一定的误差,这也使得 $t \rightarrow t_f$ 时式(8)、(36)不一定收敛到0,因此在 $t = t_f$ 时刻,式(8)、(36)中的切换存在不连续的现象,这种不连续的情况将引起系统的震荡.在 t_f 时刻后,ExSMC方法鲁棒性严重下降,而FxSMC方法则仍具有较强的鲁棒性,在经历过 $t = t_f$ 时刻的震荡后,AExSMC方法能够使得跟踪误差快速减小,而ExSMC方法则失去了对跟踪误差的调节功能.

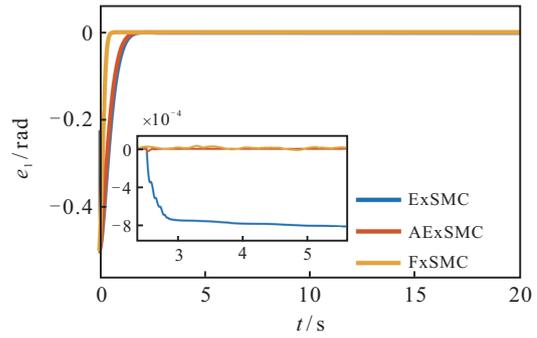


图4 关节角1轨迹跟踪误差

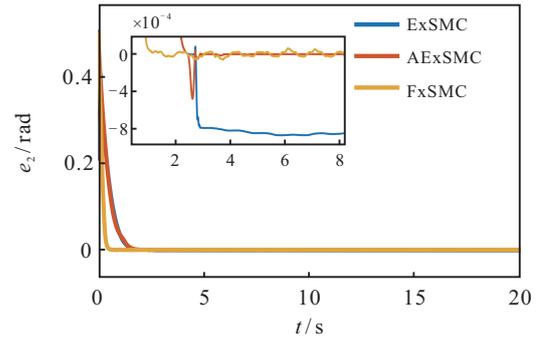


图5 关节角2轨迹跟踪误差

为定量地分析3种控制方法的稳态误差,借助均方根误差进行评判,其计算方法为

$$RSME = \sqrt{\frac{e_{i,1}^2 + e_{i,2}^2 + \dots + e_{i,n}^2}{n}}. \quad (40)$$

其中:RSME为轨迹跟踪误差的均方根值, $e_{i,j}$ 为机械臂第 i 个关节在第 j 个采样时刻的轨迹跟踪误差, n 为总采样点的个数.为了分析稳态误差,这里只考虑2.53 s后的RSME值.3种控制方法下各关节的RSME值如表2所示.本文提出的AExSMC方法相较于文献[30]提出的FxSMC方法,关节角1与关节角2的均方根误差分别下降了89.13%和84.94%,相较于文献[16]提出的ExSMC方法,关节角1与关节角2的均方根误差分别下降了99.85%和99.59%.因此,所设计的AExSMC方法在实现精确时间收敛的同时,能够降低系统的稳态误差,提高机械臂轨迹跟踪的精度.

表2 轨迹跟踪的均方根误差值RSME

控制器	关节1	关节2
FxSMC	1.27×10^{-5}	2.59×10^{-5}
ExSMC	9.38×10^{-4}	9.41×10^{-4}
AExSMC	1.38×10^{-6}	3.90×10^{-6}

机械臂关节角1、关节角2的速度跟踪误差情况如图6和图7所示.3种控制方法都能够在存在时变扰动的情况下实现对于给定速度的跟踪.

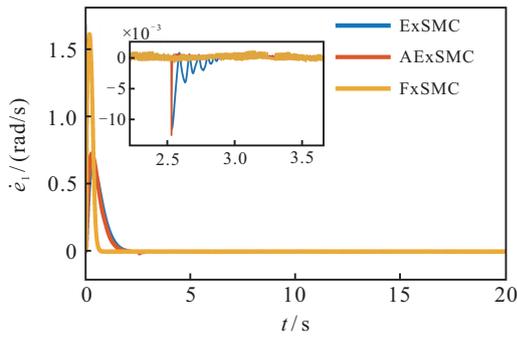


图6 关节角1速度跟踪误差

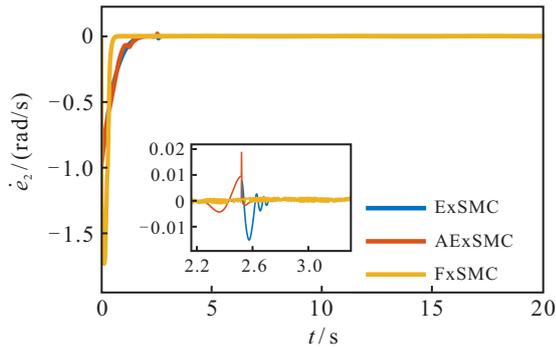


图7 关节角2速度跟踪误差

机械臂关节角1、关节角2的输入力矩如图8和图9所示. 对比于FxSMC方法, ExSMC、AExSMC中使用的低通滤波器能够有效削减抖振. ExSMC、AExSMC方法下输入力矩的峰值远小于FxSMC, 对于设备的性能要求更宽松. 在 $t = t_f$ 时刻, AExSMC方法下的输入力矩存在一定的跃变, 这主要是因为上述提及的在 $t = t_f$ 时刻, 式(8)、(36)中的切换

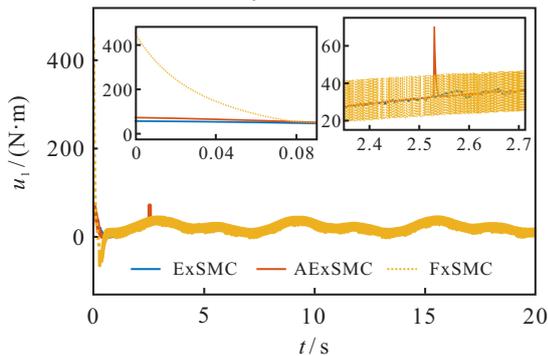


图8 关节角1控制量输入

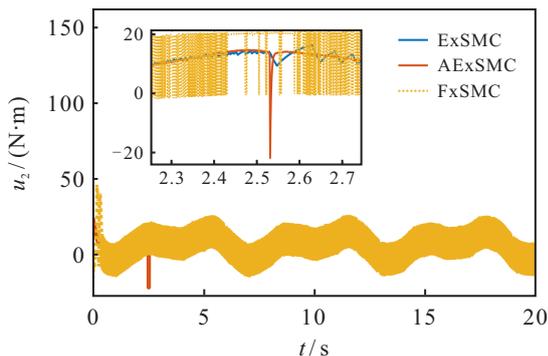


图9 关节角2控制量输入

存在不连续的现象, 将引起系统震荡, 对于这种震荡, AExSMC方法能够快速克服, 从而使跟随误差快速减小, 而ExSMC方法则因为鲁棒性大大降低而难以克服, 反映在输入力矩上则是输入力矩毫无变化.

图10和图11为滑模变量 s_1 、 s_2 的变化图. 3种控制方法下, 滑模变量 s_1 、 s_2 最终均收敛于0, 并且由于全局滑模面的设计, ExSMC与AExSMC方法的滑模变量 s_1 、 s_2 的初始值均为零, 但由于低通滤波器的使用, 近似的过程中存在一些误差, 从而使得滑模变量 s_1 、 s_2 在最初的时刻存在一些波动.

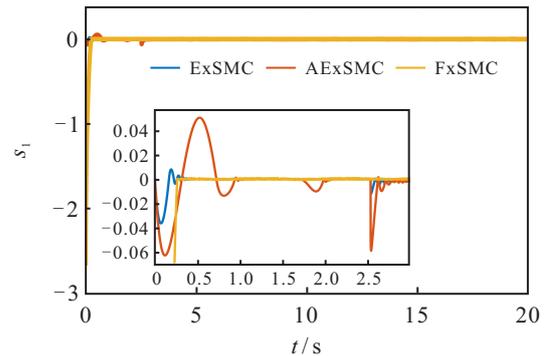


图10 滑模变量 s_1 变化曲线

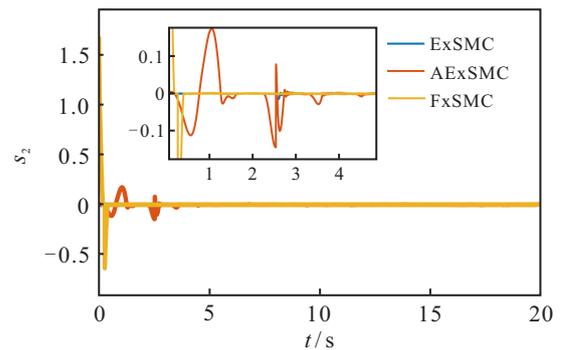


图11 滑模变量 s_2 变化曲线

图12~图14为自适应参数估计值, 通过自适应方法能够有效地对假设2中的 a_0 、 a_1 、 a_2 进行估计, 从而克服了扰动上界未知的问题, 避免了增益高估的情况.

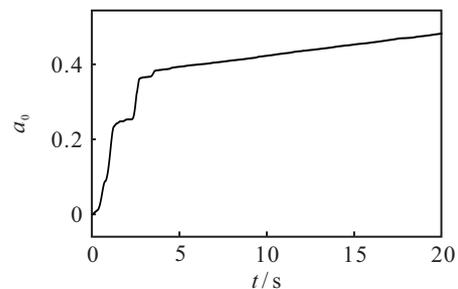
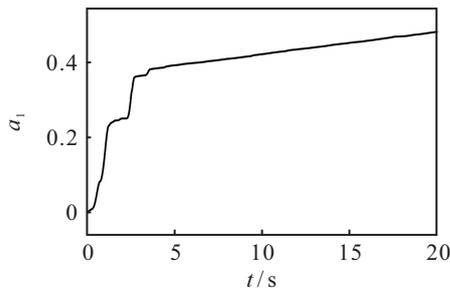
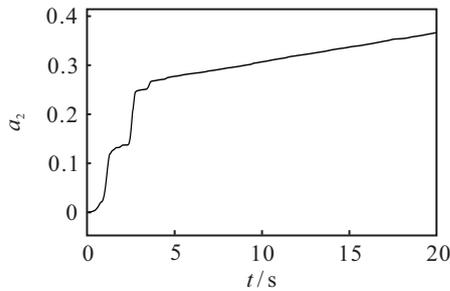


图12 自适应参数 a_0 估计值

综上所述, 本文提出的控制方法能够实现机械臂轨迹跟踪的精确时间收敛, 并且在收敛后仍具有较强的鲁棒性. 在此基础上, 在不提高输入力矩峰值的

图13 自适应参数 a_1 估计值图14 自适应参数 a_2 估计值

情况下减小调节时间,降低稳态误差,从而提高轨迹跟踪的精度.自适应方法克服了扰动上界未知的问题,低通滤波器能够有效地削减抖振.

4 结论

本文考虑机械臂控制系统存在的未建模部分、摩擦力、外加干扰,提出了一种精确时间收敛的自适应全局滑模控制方法,以实现机械臂系统在未知扰动下的轨迹跟踪.证明了系统跟踪轨迹的误差能够在设定时刻收敛至零,随后仍保持较强的鲁棒性,并对该方法进行了仿真验证.仿真结果表明,所提出方法能够使机械臂系统在设定时刻稳定,不存在传统终端滑模控制方法存在的收敛时间高估的情况,并且在稳定后仍具有较强的鲁棒性.所提出方法稳态误差小,能够实现机械臂系统轨迹跟踪的高精度控制,并且对于扰动有着较强的鲁棒性.自适应方法能够估计出系统集中扰动的上界,低通滤波器对抖振有明显的削减作用.

参考文献(References)

- [1] Nubert J, Köhler J, Berenz V, et al. Safe and fast tracking on a robot manipulator: Robust MPC and neural network control[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2020, 5(2): 3050-3057.
- [2] Rybus T, Seweryn K, Sasiadek J Z. Control system for free-floating space manipulator based on nonlinear model predictive control(NMPC)[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2017, 85(3/4): 491-509.
- [3] Brahmi B, Laraki M H, Brahmi A, et al. Improvement of sliding mode controller by using a new adaptive reaching

law: Theory and experiment[J]. ISA Transactions, 2020, 97: 261-268.

- [4] 雷城, 蓝益鹏, 徐泽来, 等. 一种新型复合滑模趋近律设计与分析[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 435-440. (Lei C, Lan Y P, Xu Z L, et al. Design and analysis of a new compound sliding mode reaching law[J]. Control and Decision, 2023, 38(2): 435-440.)
- [5] 沙磊, 王树波, 刘逸坚. 基于扩张状态观测器的二质量系统非奇异快速终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2023, 38(3): 850-856. (Sha L, Wang S B, Liu Y J. Nonsingular fast terminal sliding mode control based on extended state observer for two mass systems[J]. Control and Decision, 2023, 38(3): 850-856.)
- [6] Mobayen S, Tchier F, Ragoub L. Design of an adaptive tracker for n -link rigid robotic manipulators based on super-twisting global nonlinear sliding mode control[J]. International Journal of Systems Science, 2017, 48(9): 1990-2002.
- [7] Hao S, Hu L Y, Liu P X. Second-order adaptive integral terminal sliding mode approach to tracking control of robotic manipulators[J]. IET Control Theory & Applications, 2021, 15(17): 2145-2157.
- [8] 陈正升, 王雪松, 程玉虎. 考虑扰动与输入饱和的机械臂连续非奇异快速终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(4): 903-912. (Chen Z S, Wang X S, Cheng Y H. Continuous non-singular fast terminal sliding mode control of robotic manipulators considering disturbance and input saturation[J]. Control and Decision, 2022, 37(4): 903-912.)
- [9] Wang Y Y, Zhu K W, Chen B, et al. Model-free continuous nonsingular fast terminal sliding mode control for cable-driven manipulators[J]. ISA Transactions, 2020, 98: 483-495.
- [10] Liu H T, Sun J, Nie J H, et al. Observer-based adaptive second-order non-singular fast terminal sliding mode controller for robotic manipulators[J]. Asian Journal of Control, 2021, 23(4): 1845-1854.
- [11] Li H J, Cai Y L. Fixed-time non-singular terminal sliding mode control with globally fast convergence[J]. IET Control Theory & Applications, 2022, 16(12): 1227-1241.
- [12] Zhang X, Shi R. Adaptive faster fixed-time trajectory tracking control for manipulator[J]. Neural Computing and Applications, 2022, 34(24): 21835-21847.
- [13] Zhai J Y, Xu G. A novel non-singular terminal sliding mode trajectory tracking control for robotic manipulators[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 68(1): 391-395.

- [14] Pal A K, Kamal S, Nagar S K, et al. Design of controllers with arbitrary convergence time[J]. *Automatica*, 2020, 112: 108710.
- [15] Tang R C, Shao K, Liang B, et al. Trigonometric-type sliding mode control with exact convergence time[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 6: 2389-2394.
- [16] Shao K, Zheng J C, Wang H, et al. Terminal time regulator-based exact-time sliding mode control for uncertain nonlinear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(13): 7536-7553.
- [17] Zhang Y Y, Yang X H, Wei P, et al. Fractional-order adaptive non-singular fast terminal sliding mode control with time delay estimation for robotic manipulators[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2020, 14(17): 2556-2565.
- [18] Zhang L Y, Su Y X, Wang Z. A simple non-singular terminal sliding mode control for uncertain robot manipulators[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers—Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2019, 233(6): 666-676.
- [19] Zhang L Y, Wang Y M, Hou Y L, et al. Fixed-time sliding mode control for uncertain robot manipulators[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 149750-149763.
- [20] Feng Y, Han F L, Yu X H. Chattering free full-order sliding-mode control[J]. *Automatica*, 2014, 50(4): 1310-1314.
- [21] Van M, Ge S S, Ren H L. Robust fault-tolerant control for a class of second-order nonlinear systems using an adaptive third-order sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(2): 221-228.
- [22] Xu Z H, Yang X H, Zhou S Y, et al. Extended state observer based adaptive backstepping nonsingular fast terminal sliding-mode control for robotic manipulators with uncertainties[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2022, 20(9): 2972-2982.
- [23] Zhang Z J, Leibold M, Wollherr D. Integral sliding-mode observer-based disturbance estimation for Euler-Lagrangian systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 28(6): 2377-2389.
- [24] Zhang W J, Yang X H, Xu Z H, et al. An adaptive fault-tolerant control method for robot manipulators[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2021, 19(12): 3983-3995.
- [25] Sai H Y, Xu Z B, He S, et al. Adaptive nonsingular fixed-time sliding mode control for uncertain robotic manipulators under actuator saturation[J]. *ISA Transactions*, 2022, 123: 46-60.
- [26] Boukattaya M, Mezghani N, Damak T. Adaptive nonsingular fast terminal sliding-mode control for the tracking problem of uncertain dynamical systems[J]. *ISA Transactions*, 2018, 77: 1-19.
- [27] Zhang L, Liu L, Wang Z, et al. Continuous finite-time control for uncertain robot manipulators with integral sliding mode[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(11): 1621-1627.
- [28] 徐宝珍, 宋公飞, 王超, 等. 机械臂自适应非奇异快速终端滑模控制[J]. *电光与控制*, 2021, 28(5): 46-50.
(Xu B Z, Song G F, Wang C, et al. Adaptive non-singular fast terminal sliding mode control of manipulator [J]. *Electronics Optics & Control*, 2021, 28(5): 46-50.)
- [29] Yu L, He G, Wang X K, et al. A novel fixed-time sliding mode control of quadrotor with experiments and comparisons[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, 6: 770-775.

作者简介

王杰(1999—),男,硕士生,从事机械臂控制、滑模控制等研究, E-mail: 939052139@qq.com;

沈艳霞(1973—),女,教授,博士生导师,从事高性能电机驱动、新能源控制技术等研究, E-mail: shenyx@jiangnan.edu.cn.