



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

# 控制与决策

CONTROL AND DECISION



## 基于随机牛顿算法的离散系统自适应参数估计

陈思宇, 那靖, 黄英博

引用本文:

陈思宇,那靖,黄英博. 基于随机牛顿算法的离散系统自适应参数估计[J]. *控制与决策*, 2024, 39(6): 1959–1966.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1731>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于数据驱动的非线性网络系统自适应迭代学习控制

Data driven adaptive learning control of nonlinear network system

控制与决策. 2021, 36(6): 1523–1528 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1182>

#### 带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制

Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints

控制与决策. 2021, 36(2): 387–394 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0974>

#### 测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计

Moving horizon estimation for stochastic uncertain system with missing measurements

控制与决策. 2021, 36(2): 450–456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0648>

#### 参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty

控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

#### 基于变速趋近律的Buck型变换器抗扰动控制

Disturbance rejection control of Buck converters based on variable rate reaching law

控制与决策. 2021, 36(4): 893–900 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1073>

# 基于随机牛顿算法的离散系统自适应参数估计

陈思宇<sup>1,2</sup>, 那靖<sup>1,2†</sup>, 黄英博<sup>1,2</sup>

(1. 昆明理工大学 机电工程学院, 昆明 650500;

2. 昆明理工大学 云南省先进装备智能控制及应用国际联合实验室, 昆明 650500)

**摘要:** 针对一类离散系统, 提出一种基于随机牛顿算法的自适应参数估计新框架, 相较于已有的参数估计算法, 所提出方法仅要求系统满足有限激励条件, 而非传统的持续激励条件. 所提出算法的核心思想在于通过对原始代价函数的修正, 在使用当前时刻误差信息的基础上融入历史误差信息, 进而通过对历史信息和历史激励的复用使得持续激励条件转化为有限激励条件; 然后, 为了解决传统算法收敛速度慢的问题并避免潜在的病态问题, 采用随机牛顿算法推导出参数自适应律, 并引入含有历史信息的海森矩阵作为时变学习增益, 保证参数估计误差指数收敛; 最后, 基于李雅普诺夫稳定性理论给出不同激励条件下所提出算法的收敛性结论和证明, 并通过对比仿真验证所提出算法的有效性和优越性.

**关键词:** 离散系统; 自适应参数估计; 随机牛顿算法; 递推最小二乘; 有限激励; 代价函数

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1731

引用格式: 陈思宇, 那靖, 黄英博. 基于随机牛顿算法的离散系统自适应参数估计 [J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 1959-1966.

## Adaptive parameter estimation of discrete-time systems based on stochastic Newton algorithm

CHEN Si-yu<sup>1,2</sup>, NA Jing<sup>1,2†</sup>, HUANG Ying-bo<sup>1,2</sup>

(1. Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China; 2. Yunnan International Joint Laboratory of Intelligent Control and Application of Advanced Equipment, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:** This paper proposes a new framework for adaptive parameter estimation for discrete-time systems based on the stochastic Newton algorithm. Different to the classical parameter estimation algorithms, the convergence of the estimation error herein only requires the finite excitation (FE) condition rather than the persistent excitation (PE) condition. The main merit of the algorithm is that the original cost function is modified, where the past error information is used together with the current error information to construct the random gradient vector, so that reusing the historical information can help to relax the PE condition to the FE condition. Furthermore, to solve the problem of slow convergence of the stochastic steepest descent algorithm and avoid the potential ill-conditioned problem, the estimated inverse of the Hessian matrix is constructed as the learning gain and the stochastic Newton algorithm is used to derive the adaptive laws with its exponential convergence. Finally, the convergence of the proposed parameter estimation algorithm under different excitation conditions is evaluated via the Lyapunov theory. The effectiveness and superiority of the proposed algorithms are verified by comparative simulations.

**Keywords:** discrete-time systems; adaptive parameter estimation; stochastic Newton method; recursive least squares; finite excitation; cost function

## 0 引言

在实际应用中, 物理系统易受本身或环境变化的影响, 且往往是多种因素相互耦合. 因此, 系统的动态

过程较为复杂, 对其进行精确分析和精准建模是比较困难且成本高昂的. 在这种情况下, 使用易于得到的系统输入/输出信息对于系统模型中的未知参数进行

收稿日期: 2022-10-03; 录用日期: 2023-03-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62273169, 61922037, 62003153); 云南省基础研究计划项目 (202001AV070001, 202201AW070005, 202101AU070162).

†通讯作者. E-mail: najing25@163.com.

估计是非常重要的建模手段. 因此, 以参数估计为核心的自适应技术得到了学术界和工业界的广泛关注, 其优点在于可根据系统的可测信息在线估计系统模型中的未知参数, 从而实时更新控制器系数来解决系统的不确定性等, 最终达到提升控制性能的目的<sup>[1-3]</sup>.

对于参数估计算法的研究, 一般要考虑其收敛性<sup>[4-6]</sup>和鲁棒性<sup>[7-9]</sup>两个方面. 尽管针对线性和非线性系统, 均提出了大量的参数估计算法, 但是其收敛性证明多依赖于持续激励(PE)条件<sup>[10]</sup>的先验假设. 持续激励的概念自上世纪60年代开始逐渐被认知, 早期普遍认为输入信号若能够激发系统的所有模式, 则能够确保估计参数收敛到真实值. 直至1966年, Astrom等<sup>[11]</sup>正式给出了PE条件对收敛性的影响分析. 随着80年代自适应观测器等研究的兴起, 最终发现参数估计收敛的必要条件即为PE条件<sup>[12]</sup>. 虽然PE条件的数学定义比较完备, 但是, 在实际运用中如何判别系统是否满足该条件依然是尚未完全解决的难题. 近年来, Na等<sup>[13]</sup>针对连续系统提出了一类基于参数估计误差的自适应估计算法, 并将PE条件的判别等价于辅助矩阵的正定性问题, 为解决此问题提出了一个可行思路. 但是该方法对离散系统的研究结果不多.

此外, PE条件对于开环系统离线辨识而言相对比较容易满足, 而对于确保在线参数估计的闭环系统往往过于严格, 因为控制系统对系统状态稳定的要求与持续激励条件在一定程度上是矛盾的. 因此, 如何放松对PE条件的要求一直是自适应控制领域十分有挑战性的课题. Chowdhary等<sup>[14]</sup>提出了利用系统历史数据和当前数据一起构建扩展递推向量/矩阵来设计自适应律, 可能会降低对当前数据持续激励条件的依赖. 张国柱等<sup>[15]</sup>则提出了一种复合参数估计算法, 采用控制误差和观测误差联合起来对未知参数进行估计, 然而, 该算法依然需要在线验证PE条件并在满足该条件时计算辅助矩阵的逆, 故其需以巨大的算力作为支撑. 近年来, Aranovskiy等<sup>[16]</sup>和Bobtsov等<sup>[17]</sup>针对放松对PE条件的要求开展了大量研究, 通过多重滤波构建混合信息矩阵提出了一类新算法, 但是, 其引入的等效滤波和伴随矩阵的实时求解依然产生了较大的算力浪费. 针对自适应控制中PE条件可能会缺失的问题, Song<sup>[18]</sup>等提出了一种采用时变增益的参数估计算法, 在全状态反馈下可实现估计参数的渐近收敛. 总结已有文献可知, 目前克服对PE条件要求可归结为两种思路: 1) 人为增加信息的丰富度以增长收敛区间; 2) 在有限区间内通过改

变增益加快收敛速度. 但是, 这并未从根本上完整解决PE条件在线判别和放松的难题.

针对上述问题, 本文以线性离散系统为对象, 提出一种新的基于随机牛顿算法的自适应参数估计算法. 所提出算法受先期针对连续系统的参数估计算法<sup>[13, 19-20]</sup>启发, 通过对原始代价函数的重新设计, 充分利用系统的历史回归信息, 从而达到将PE条件转化为有限激励(FE)条件的目的. 另一方面, 借鉴牛顿算法<sup>[21]</sup>的思想, 采用代价函数海森矩阵的逆作为自适应律的时变增益, 以有效解决传统方法收敛速度慢的问题, 并验证在不同激励条件下的估计误差收敛性. 最后通过对比仿真验证所提出方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑下述离散系统<sup>[1-2]</sup>:

$$A(z)y(k+1) = B(z)u(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

其中 $u(k)$ 、 $y(k) \in \mathbf{R}$ 分别为有界的系统输入和输出. 不失一般性, 本文假定

$$y(k+1) = 0, \quad u(k) = 0, \quad \forall k < 0. \quad (2)$$

$A(z)$ 和 $B(z)$ 可表示为如下后移算子 $z$ 的多项式:

$$A(z) = 1 + a_1z + \dots + a_pz^p, \quad p \geq 1;$$

$$B(z) = b_0 + b_1z + \dots + a_qz^q, \quad q \geq 0. \quad (3)$$

其中控制增益 $b_0 \in \mathbf{R}$ 已知.

本文目的在于估计系统未知定常参数 $a_i$ 、 $b_j$  ( $i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q$ ). 为此, 未知参数可写为向量 $\theta^* = [-a_1 \dots -a_p \ b_1 \dots b_q]^T \in \mathbf{R}^{p+q}$ , 则系统(1)可写为如下标准线性回归模型:

$$y(k+1) = \phi^T(k)\theta^* + b_0u(k), \quad (4)$$

其中

$$\phi(k) = [y(k) \ \dots \ y(k-p+1) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-q)]^T \in \mathbf{R}^{p+q}$$

为已知的回归信息向量.

针对上述线性参数化模型(4)的参数估计问题, 加权递推最小二乘算法(WRLS)<sup>[1-2]</sup>是最常用的方法之一. 记 $\hat{\theta}$ 为 $\theta^*$ 的估计, 并定义最小二乘问题<sup>[2]</sup>为

$$\arg \min_{\hat{\theta}} \sum_{i=0}^k \beta(k, i) \cdot (y(i+1) - b_0u(i) - \phi^T(i)\hat{\theta})^2.$$

$$\beta(k, i) = \prod_{j=i+1}^k \lambda(j), \quad \beta(k, k) = 1. \quad (5)$$

其中: $\beta(k, i) \in \mathbf{R}$ 为历史回归信息的权重序列, 遗忘因子 $\lambda(j) \in \mathbf{R}$ 的取值范围为 $(0, 1)$ . 求解上述最小二

乘问题,得到WRLS算法如下式所示:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + P(k)\phi(k)(y(k+1) - b_0u(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k)), \hat{\theta}_0 = 0; \\ P(k-1) &= \frac{1}{\lambda(k)} \left( P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{\lambda(k) + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \right), \\ P_0 &= \mu I \text{ 且 } \mu > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^k \phi(i)\phi^T(i) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k i^2 & \sum_{i=0}^k i \\ \sum_{i=0}^k i & k+1 \end{bmatrix}, & 0 \leq k < k_1; \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k_1} i^2 & \sum_{i=0}^{k_1} i \\ \sum_{i=0}^{k_1} i & k_1+1 \end{bmatrix}, & k \geq k_1. \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $P(k) \in \mathbf{R}^{(p+q) \times (p+q)}$  为时变增益矩阵,其含义是对历史回归信息加权和的使用.

在讨论WRLS的收敛性前,先给出持续激励(PE)条件<sup>[10]</sup>的定义.

**定义1** 若回归向量  $\phi(k)$  满足PE条件,则存在  $N, \alpha > 0$ ,使得下式成立:

$$\sum_{i=k}^{k+N} \phi(i)\phi^T(i) \geq \alpha I, \forall k \geq 0. \quad (7)$$

在PE条件满足的情况下,回归信息向量  $\phi(k)$  含有足够丰富的信息,故WRLS可保证参数估计误差指数收敛<sup>[1-2]</sup>.然而,PE条件对于实际控制系统而言往往过于严格,且在线验证系统是否满足PE条件尚未完整解决.为此,提出一种基于随机牛顿算法的自适应参数估计方法,在将PE条件转化为有限激励(FE)<sup>[19]</sup>情况下依然能够保证参数估计误差指数收敛.有限激励条件定义如下.

**定义2** 若回归向量  $\phi(k)$  满足FE条件,则存在  $N, \alpha > 0$ ,使得下式成立:

$$\sum_{i=k'}^{k'+N} \phi(i)\phi^T(i) \geq \alpha I, \exists k' \geq 0. \quad (8)$$

**注1** 根据PE条件定义可知,其要求对于所有时刻  $k \geq 0$  均有任一长度  $N$  的区间满足激励条件.而对于FE条件,其要求在某一时刻  $k'$  存在一个长度为  $N$  的区间满足上述激励条件即可.对比两者定义可知,PE条件可理解为要求对于所有  $k \geq 0$  均存在一个长度为  $N$  的时间窗口满足激励条件,而FE条件则仅仅要求存在某一区间  $[k', k'+N]$  满足激励条件.故在以系统稳定为主要要求的控制工程实际中,FE条件较PE条件更易满足.为了论证上述分析,给出一个数值示例表明两者的区别.

**例1** 定义  $\phi(k) \in \mathbf{R}^2 (k=0, 1, \dots)$  为

$$\phi(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}, & 0 \leq k < k_1; \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & k \geq k_1. \end{cases} \quad (9)$$

可写为

可以验证上述  $\phi(k)$  不满足PE条件,因为对于任意  $k > k_1, \sum_{i=k}^{k+N} \phi(i)\phi^T(i)$  中所有元素恒为0.反之,若选取  $k_0 = 0$  以及区间长度  $n_0 \geq 2$ ,则可验证矩阵  $\sum_{i=k_0}^{k_0+n_0} \phi^2(i)$  正定.因此,  $\phi(k)$  满足FE条件.

## 2 基于随机牛顿算法的参数估计

给出基于随机牛顿算法的参数估计算法,确保在FE条件下能够实现参数估计收敛.首先定义参数估计误差为  $\tilde{\theta}(k) = \theta^* - \hat{\theta}(k)$ ,则由WRLS算法可知

$$\begin{aligned} \phi(k)(y(k+1) - b_0u(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k)) &= \\ \phi(k)\phi^T(k)\tilde{\theta}(k). \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)可看作未知参数的瞬态估计误差信息.

此外,在算法(6)中矩阵  $P^{-1}(k)$  有如下性质<sup>[6]</sup>:

$$P^{-1}(k) \simeq \sum_{i=0}^k \beta(k, i)\phi(i)\phi^T(i), \quad (12)$$

其代表对所有历史回归信息  $\{\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(k)\}$  的加权求和<sup>[2]</sup>.因此,由式(6)、(11)和(12)可知,WRLS的每步迭代方向为当前瞬态误差(11)和历史回归信息加权与  $P^{-1}(k)$  的比值.对比基于随机梯度算法的最小均方二乘(LMS)算法<sup>[1-2]</sup>,WRLS算法采用历史回归信息加权和的逆  $P(k)$  作为时变学习增益.特别地,WRLS是对从0时刻到  $k$  时刻的所有误差信息的加权平方和进行最小化求解,而LMS仅对当前  $k$  时刻的误差平方和进行最小化求解.因此,WRLS在估计过程中具有收敛速度快、估计精度高且稳定性好等优点.在定常甚至慢时变参数估计问题中,其可以抑制扰动对估计性能的影响.但是,WRLS算法要求系统严格满足持续激励条件才可确保参数收敛.为此,本文从更好地运用所有历史信息以及历史激励的角度出发,在WRLS的基础上提出基于随机牛顿算法的自适应参数估计方法.

### 2.1 参数估计算法设计

受代价函数(5)的启发,为了求解参数估计的优化问题,定义新的代价函数如下式所示:

$$\begin{aligned}
J_N &= \\
&\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \beta(k, i) \cdot (y(i+1) - b_0 u(i) - \\
&\phi^T(i) \hat{\theta}(k))^2 = \\
&\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \beta(k, i) \cdot (\phi^T(i) \theta^* - \phi^T(i) \hat{\theta}(k))^2 = \\
&\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta^* - \hat{\theta}(k))^T M(k) (\theta^* - \hat{\theta}(k)). \quad (13)
\end{aligned}$$

其中

$$M(k) = \sum_{i=0}^k \beta(k, i) \phi(i) \phi^T(i) \in \mathbf{R}^{(p+q) \times (p+q)}, \quad (14)$$

且  $M(0) = 0$ . 对比新代价函数(13)与最小二乘算法定义的代价函数(5), 两者核心区别在于: 式(5)的含义是各时刻的瞬时预测误差  $\phi^T(k) \tilde{\theta}(k)$  平方加权和最小化; 而式(13)则将  $k$  时刻的参数估计误差  $\tilde{\theta}(k)$  与包含此前所有历史回归信息加权和的矩阵  $M(k)$  相乘再求和. 因此, 基于代价函数(13)最小化求解设计的参数估计算法能够调用所有历史回归信息  $\{\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(k)\}$  以及其中蕴含的历史激励信息, 进而放松对于PE条件的要求.

运用随机牛顿算法<sup>[22]</sup>求解代价函数(13)最小化, 得到参数自适应律为

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - (\nabla_{\hat{\theta}(k)}^2 J_N)^{-1} \nabla_{\hat{\theta}(k)} J_N, \quad (15)$$

$$\nabla_{\hat{\theta}(k)} J_N = -M(k) \tilde{\theta}(k), \quad (16)$$

$$\nabla_{\hat{\theta}(k)}^2 J_N = M(k) \preceq P^{-1}(k). \quad (17)$$

由式(13)和(14), 得到

$$\begin{aligned}
\nabla_{\hat{\theta}(k)} J_N &= - \sum_{i=0}^k \beta(k, i) \phi(k) (y(k+1) - b_0 u(k)) + \\
&\sum_{i=0}^k \beta(k, i) \phi(i) \phi^T(i) \cdot \hat{\theta}(k). \quad (18)
\end{aligned}$$

据此定义一个新辅助矩阵  $N(k) \in \mathbf{R}^{p+q}$  如下式所示:

$$N(k) = \sum_{i=0}^k \beta(k, i) \phi(k) (y(k+1) - b_0 u(k)). \quad (19)$$

由式(14)和(19), 得到  $M(k)$  和  $N(k)$  的递推形式为

$$M(k) = \lambda(k) M(k-1) + \phi(k) \phi^T(k), \quad (20)$$

$$N(k) = \lambda(k) N(k-1) + \phi(k) (y(k+1) - b_0 u(k)). \quad (21)$$

因此, 基于随机牛顿算法设计的参数估计算法(SNW)可写为

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + P(k) (N(k) - M(k) \hat{\theta}(k)), \\
\hat{\theta}_0 &= 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

**注2** 有别于WRLS算法(6), SNW算法(22)采

用所有历史误差信息加权和(蕴含于  $N(k)$  和  $M(k)$ ) 代替了瞬时误差(11), 故在PE条件可能缺失的情况下, 通过对历史信息的合理复用, 该算法仍然保有学习能力, 使得参数估计误差收敛. 此外, 根据凸优化理论<sup>[22]</sup>, 牛顿算法作为二阶优化算法, 其收敛速度远快于一阶优化算法. 同时, 通过代价函数的海森矩阵  $M(k)$  在梯度上进行线性变换得到搜索方向, 避免了普通梯度下降法繁琐的步长整定过程.

值得注意的是, 时变增益矩阵  $P(k)$  的引入使得单个时间窗内的激励信息不会被快速“淹没”在历史数据中. 由定义1和定义2, 可假设激励矩阵  $\sum_{i=0}^k \phi(i) \phi^T(i)$  的最小特征值为  $\alpha$ , 且回归信息向量  $\phi(k)$  恒不为0, 则其最大特征值定义为  $h$  是单调递增的. 当激励消失后, 系统的条件数(最大与最小特征值的比值  $h/\alpha$ ) 不断增大, 导致学习算法的收敛速度不断下降, 所以仅使用时变增益矩阵  $P(k)$  不足以保证估计参数最终收敛. 然而, 随机牛顿算法具有仿射不变性<sup>[23]</sup>, 在面临激励消失和病态条件数时对所提出SNW算法的影响有限. 为了进一步展现这一特性, 考虑如下示例.

**例2** 对于给定系统, 当  $k \leq k'$  时,  $\phi(k) = [1, 1]^T$ ; 否则,  $\phi(k)$  恒为0. 因此, 当  $k > k'$  时, 基于WRLS和SNW算法分别得到

$$\text{WRLS: } \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k'), \quad (23)$$

$$\text{SNW: } \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k') (N(k') - M(k') \hat{\theta}(k)). \quad (24)$$

可见当激励消失时, SNW算法能够利用历史信息中存在的激励信息, 保留对未知参数的学习能力.

进一步分析可知, 式(24)可写为  $\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k') M(k') \tilde{\theta}(k)$ , 即  $N(k') - M(k') \hat{\theta}(k) = M(k') \tilde{\theta}(k)$ . 此外, 由式(17)可知, SNW算法(22)中  $P(k)$  与  $M(k)$  相互补偿(见后文引理2), 故辅助矩阵  $M(k)$ 、 $N(k)$ 、 $P(k)$  共同作用使得误差收敛条件由PE条件转化为FE条件. 事实上,  $M(k)$ 、 $N(k)$  包含了所有加权历史回归信息, 是保证估计误差能够在FE条件下实现收敛的关键, 而时变增益矩阵  $P(k)$  能够从历史回归信息中提取到过去时间窗内的激励信息.

**注3** 不失一般性, 本文将  $\lambda(k)$  定义为可随迭代次数  $k$  而变化的遗忘因子, 可采用现有变遗忘因子方法<sup>[24-25]</sup> 进行拓展设计以改善算法性能. 特别地, 当选择  $\lambda(k) = \lambda_c$  为常数时, 历史数据按照固定比率衰减, 算法收敛性分析不变.

## 2.2 收敛性分析

本节讨论所提出SNW算法的收敛条件以及收敛性分析结果. 首先, 给出矩阵  $M(k)$  和  $P(k)$  在不同

激励条件下的性质.

**引理1** 对于矩阵  $M(k)$ , 有如下性质:

- 1) 对于任意  $\phi(k)$ ,  $M(k) \succeq 0$ ;
- 2) 若  $\phi(k)$  满足 FE 条件, 即存在  $N, \alpha, k' \geq 0$  使得

$\sum_{i=k'}^{k'+N} \phi^T(i)\phi(i) \succeq \alpha I$  成立, 则对于  $\forall k \geq k' + N$ , 矩阵  $M(k)$  正定;

3) 若  $\phi(k)$  满足 PE 条件, 即对于  $\forall k \geq 0$  存在  $N, \alpha > 0$  使得  $\sum_{i=k}^{k+N} \phi^T(i)\phi(i) \succeq \alpha I$  成立, 则对于  $\forall k \geq N$ , 矩阵  $M(k)$  正定.

**证明** 1) 假设  $\omega \in \mathbf{R}^{p+q}$  为任意单位向量, 易知

$$\omega^T M(k) \omega = \sum_{i=0}^k \beta(k, i) (\omega^T \phi(i))^2 \geq 0, \quad (25)$$

故引理1的1)得证.

2) 由  $\phi(k)$  满足 FE 条件, 得到

$$\sum_{i=k'}^{k'+N} (\omega^T \phi(i))^2 \geq \alpha. \quad (26)$$

此外, 由  $\beta(k, i) = \prod_{j=i+1}^k \lambda(j) > 0$ , 得到

$$\begin{aligned} \omega^T M(k) \omega &= \sum_{i=0}^{k'-1} \beta(k, i) (\omega^T \phi(i))^2 + \sum_{i=k'}^{k'+N} \beta(k, i) (\omega^T \phi(i))^2 + \\ &\sum_{i=k'+N+1}^k \beta(k, i) (\omega^T \phi(i))^2 > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

故对于  $\forall k \geq k' + N$ , 矩阵  $M(k)$  正定, 引理1的2)得证.

3) 由  $\phi(k)$  满足 PE 条件, 得到

$$\sum_{i=k}^{k+N} (\omega^T \phi(i))^2 \geq \alpha, \quad (28)$$

因此

$$\omega^T M(k) \omega = \sum_{i=0}^k \beta(k, i) (\omega^T \phi(i))^2 > 0. \quad (29)$$

对于  $\forall k \geq N$ , 矩阵  $M(k)$  正定, 故引理1的3)得证.  $\square$

记矩阵的特征值表示为  $\mathbf{e}(\cdot)$ , 则基于上述有关  $M(k)$  性质, 可进一步得到引理2.

**引理2** 考虑矩阵  $M(k)$  有如下奇异值分解:

$$M(k) = V(k)S(k)V^T(k). \quad (30)$$

其中:  $V(k)$  为酉矩阵,  $S(k) = \text{diag}\{\mathbf{e}_1(M(k)), \dots, \mathbf{e}_{p+q}(M(k))\}$  为  $M(k)$  的特征值对角矩阵, 则存在矩阵  $\bar{C}(k)$  使得下式成立:

$$P(k)M(k) + V(k)\bar{C}(k)V^T(k) = I. \quad (31)$$

**证明** 由  $P(k)$  的递推公式(6)以及  $P_0 = \mu I$ , 可推导得到

$$P(k) = (\mu\beta(k, 0)I + M(k))^{-1}. \quad (32)$$

将式(30)代入(32), 得到

$$\begin{aligned} P(k) &= (\mu\beta(k, 0)I + V(k)S(k)V^T(k))^{-1} = \\ &V(k)(\mu\beta(k, 0)I + S(k))^{-1}V^T(k). \end{aligned} \quad (33)$$

等式两边同时右乘  $M(k)$ , 得到

$$\begin{aligned} P(k)M(k) &= \\ V(k)(\mu\beta(k, 0)I + S(k))^{-1}V^T(k)M(k) &= \\ V(k)(\mu\beta(k, 0)I + S(k))^{-1}S(k)V^T(k) &= \\ V(k)C(k)V^T(k), \end{aligned} \quad (34)$$

其中对角矩阵

$$C(k) = \text{diag}\left\{ \frac{\mathbf{e}_1(M(k))}{\mathbf{e}_1(M(k)) + \mu\beta(k, 0)}, \dots, \frac{\mathbf{e}_{p+q}(M(k))}{\mathbf{e}_{p+q}(M(k)) + \mu\beta(k, 0)} \right\}.$$

因此, 存在矩阵

$$\bar{C}(k) = \text{diag}\left\{ \frac{\mu\beta(k, 0)}{\mathbf{e}_1(M(k)) + \mu\beta(k, 0)}, \dots, \frac{\mu\beta(k, 0)}{\mathbf{e}_{p+q}(M(k)) + \mu\beta(k, 0)} \right\},$$

使得式(31)成立.  $\square$

下文给出 SNW 参数估计方法的收敛性结论.

**定理1** 对于线性系统(4), 考虑基于随机牛顿算法时间的参数估计算法(22), 若  $\phi(k)$  满足 FE 条件, 则参数估计误差  $\tilde{\theta}(k)$  指数收敛至0.

**证明** 定义李雅普诺夫函数为

$$V(\tilde{\theta}(k+1)) = \tilde{\theta}^T(k+1)\tilde{\theta}(k+1). \quad (35)$$

运用式(15)~(22), 得到

$$\begin{aligned} V(\tilde{\theta}(k+1)) &= \\ (\theta^* - \hat{\theta}(k+1))^T(\theta^* - \hat{\theta}(k+1)) &= \\ (\tilde{\theta}(k) - P(k)M(k)\tilde{\theta}(k))^T(\tilde{\theta}(k) - P(k)M(k)\tilde{\theta}(k)) &= \\ \tilde{\theta}^T(k)(I - P(k)M(k))^2\tilde{\theta}(k). \end{aligned} \quad (36)$$

据此结合式(29), 得到

$$V(\tilde{\theta}(k+1)) = \tilde{\theta}^T(k)(V(k)\bar{C}(k)V^T(k))^2\tilde{\theta}(k) \leq \mathbf{e}_{\max}^2(\bar{C}(k))\tilde{\theta}^T(k)\tilde{\theta}(k). \quad (37)$$

由引理1, 若  $\phi(k)$  满足 FE 条件, 则对于  $\forall k \geq k' + N$ , 矩阵  $M(k)$  正定, 即  $\mathbf{e}(M(k)) > 0$ , 可知  $\mathbf{e}_{\max}(\bar{C}(k)) \in (0, 1)$ . 此外, 对于  $k < k' + N$ , 考虑矩阵  $M(k)$  半正定, 得到  $V(\tilde{\theta}(k+1)) \leq V(\tilde{\theta}(k)) \leq V(\tilde{\theta}(0))$ , 即李亚普诺夫函数  $V(\tilde{\theta}(k))$  恒小于其初始值. 因此, 根据李雅普诺夫稳定性理论可知, 估计误差  $\tilde{\theta}(k)$  最终指数收敛至0.  $\square$

**注4** 由 PE 和 FE 条件的定义以及引理1可知, PE 条件是 FE 条件的自然拓展. PE 条件要求在区间上任意滑动的时间窗满足激励条件, 而 FE 条件仅仅要求存在一个固定的时间窗满足激励条件, 故 PE 条

件可视为无穷多个满足FE条件的区间的叠加. 若  $\phi(k)$  满足PE条件, 则参数估计误差  $\tilde{\theta}(k)$  同样是指指数收敛的. 证明略.

### 3 数值仿真

为了验证所提出SNW算法(22)的正确性和有效性, 给出数值仿真实例并与WRLS算法(6)进行对比验证. 考虑如下系统:

$$\begin{aligned} A(z)y(k+1) &= B(z)u(k), \\ A(z) &= 1 + a_1z + a_2z^2 = 1 - 1.244z + 0.3679z^2, \\ B(z) &= b_0 + b_1z = 0.3109 + 0.3109z. \end{aligned} \quad (38)$$

式(38)可写为如下线性回归形式:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \phi^T(k)\theta^* + b_0u(k), \\ \phi(k) &= [-y(k) \quad -y(k-1) \quad u(k-1)]^T, \\ \theta^* &= [a_1 \quad a_2 \quad b_1]^T. \end{aligned} \quad (39)$$

其中: 控制器  $u(k)$  分别选取使得系统满足持续激励和有限激励条件的激励信号序列, 即

$$u_{PE}(k) = 0.2 \times \sin \frac{k}{10} + 0.2 \times \sin \frac{k}{20}. \quad (40)$$

$$u_{FE}(k) = \begin{cases} 10^{-4}(100-k), & 0 \leq k < 100; \\ 0, & k \geq 100. \end{cases} \quad (41)$$

为了对比公平, SNW与WRLS两种算法的初始值保持一致, 遗忘因子选取为  $\lambda(k) = 0.9$ , 时变增益矩阵初值设置为  $P_0 = 100I$ .

图1~图7为两种输入条件下的两种估计算法仿真对比结果. 图1为持续激励信号  $u_{PE}(k)$  下系统的输入和输出. 对比图2与图3可以看出, 在拥有持续激励条件的情况下, 基于WRLS和SNW算法的参数估计误差均能够实现收敛. 但是在同样的条件下, SNW算

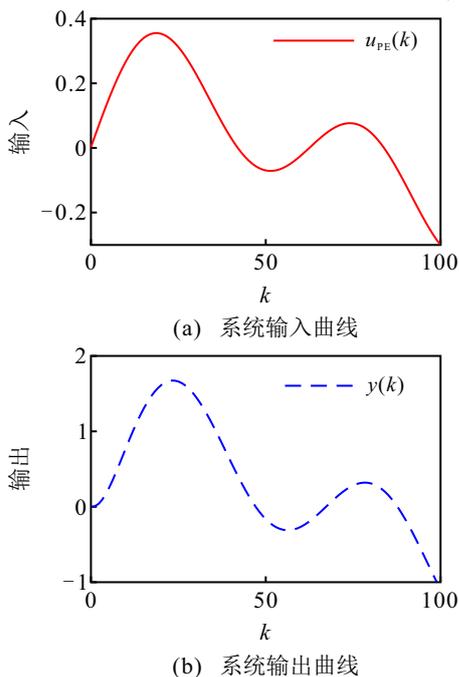


图1 持续激励下系统的输入和输出

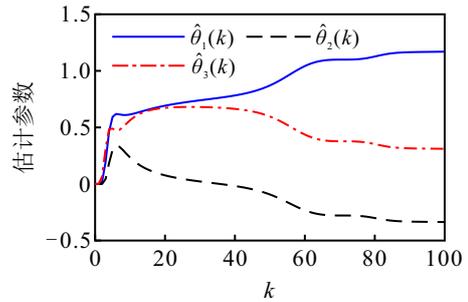


图2 持续激励下基于加权最小二乘法(6)的估计参数

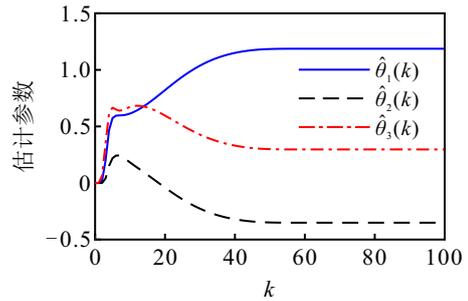
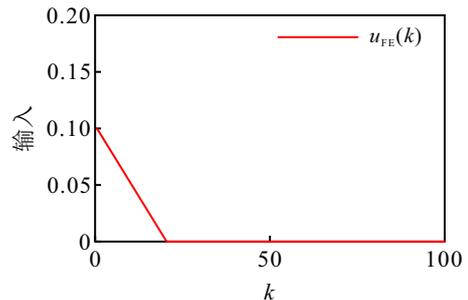
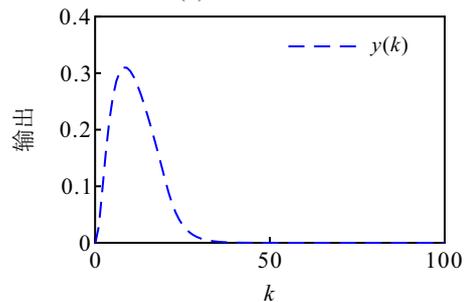


图3 持续激励下基于随机牛顿算法(22)的估计参数



(a) 系统输入曲线



(b) 系统输出曲线

图4 有限激励下系统的输入和输出

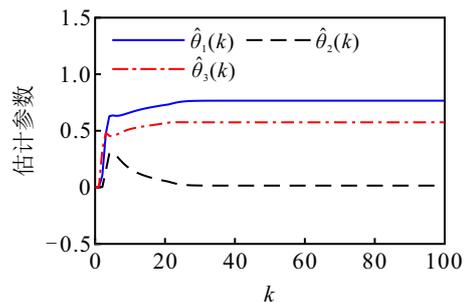


图5 有限激励下基于加权最小二乘法(6)的估计参数

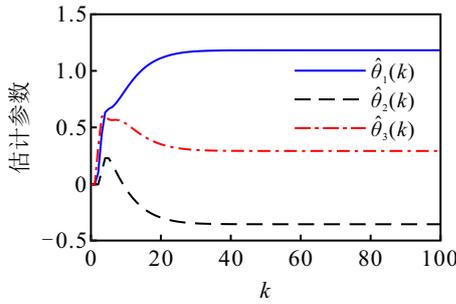


图6 有限激励下基于随机牛顿算法(22)的估计参数

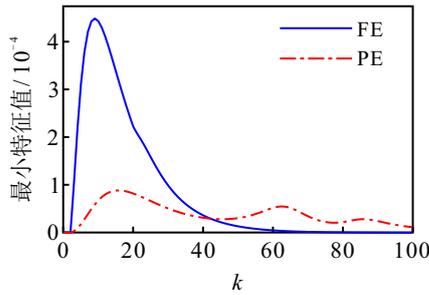


图7 不同激励下矩阵  $M(k)$  的最小特征值

法的收敛速度明显快于WRLS算法,表明所提出算法在收敛速度上存在显著优势。

上述结果表明,在持续激励条件下,系统未知参数可通过两种算法得到准确估计,但是,在实际控制系统中一般追求系统状态平稳,因此,PE条件可能无法满足。图4为有限激励信号  $u_{FE}(k)$  下系统的输入和输出,参考例1可验证,此时  $\phi(k)$  仅满足FE条件。对比图5与图6可以看出,在系统仅满足FE条件的情况下,基于WRLS算法的参数估计未能收敛到真值,其仅能够保证估计参数误差有界,而SNW算法仍然能够确保参数估计收敛。在系统满足FE条件下,即使在激励条件消失后,只需要满足矩阵  $M(k)$  的正定性条件,所提出算法通过对历史激励信息的复用仍然能够对未知参数进行精确估计。由图7可见,即使信号归0(即激励缺失),矩阵  $M(k)$  仍然能够保持一段时间的正定性。可见,得益于引入海森矩阵的近似逆  $P(k)$  作为时变增益,即使  $M(k)$  最小特征值快速衰减,依然能够确保算法收敛。

上述仿真结果表明,所提出算法通过对历史信息中包含的过往激励信息进行复用,参数的收敛性不需要满足PE条件。即使持续激励条件不能被严格满足而变为有限激励时,该参数估计算法仍然能够快速、准确地估计未知参数。

#### 4 结论

本文提出了一种基于随机牛顿算法的新型参数估计算法,通过构建包含加权历史误差信息的代价函数,并采用随机牛顿算法推导得出递推辅助矩阵,实

现了对历史激励信息的复用,从而将传统估计方法中要求的持续激励条件转化为有限激励条件,且能够保证估计误差的指数收敛。此外,引入了随机牛顿算法解决传统随机梯度下降法收敛速度慢的问题。基于李雅普诺夫定理也验证了参数估计算法的收敛性能,并通过对比数值仿真验证了所提出方法的正确性和有效性。目前,本文仅针对模型阶次已知且无噪声的情况进行了研究,未来将考虑系统模型阶次未知、存在量测噪声等情况,对所提出算法的收敛性及其性能增强做进一步研究和分析。

#### 参考文献(References)

- [1] Ljung L. System identification: Theory for the user[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [2] Goodwin G C, Sin K S. Adaptive filtering prediction and control[M]. New York: Dover Publications Inc., 2009.
- [3] Ortega R, Nikiforov V, Gerasimov D. On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes[J]. Annual Reviews in Control, 2020, 50: 278-293.
- [4] Goodwin G, Ramadge P, Caines P. Discrete-time multivariable adaptive control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1980, 25(3): 449-456.
- [5] 刘艳君, 丁锋. 多变量系统的耦合梯度辨识算法与性能分析[J]. 控制与决策, 2016, 31(8): 1487-1492. (Liu Y J, Ding F. Coupled stochastic gradient algorithm and performance analysis for multivariable systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(8): 1487-1492.)
- [6] Johnstone R M, Richard J C, Bitmead R R, et al. Exponential convergence of recursive least squares with exponential forgetting factor[J]. Systems & Control Letters, 1982, 2(2): 77-82.
- [7] Gibson T E, Qu Z, Annaswamy A M, et al. Adaptive output feedback based on closed-loop reference models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2728-2733.
- [8] 梁青, 王传榜, 潘金文, 等. 线性自抗扰控制参数  $b_0$  辨识及参数整定规律[J]. 控制与决策, 2015, 30(9): 1691-1695. (Liang Q, Wang C B, Pan J W, et al. Parameter identification of  $b_0$  and parameter tuning law in linear active disturbance rejection control[J]. Control and Decision, 2015, 30(9): 1691-1695.)
- [9] 陈晶, 程连元, 李俊红, 等. 结构未知系统降维辨识方法——变量消去算法[J]. 控制与决策, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0596. (Chen J, Cheng L Y, Li J H, et al. A reduced-dimension identification algorithm for systems with unknown structures: Variable elimination algorithm[J]. Control

- and Decision, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0596.)
- [10] Narendra K S, Annaswamy A M. Persistent excitation in adaptive systems[J]. *International Journal of Control*, 1987, 45(1): 127-160.
- [11] Astrom K J, Bohlin T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records[C]. *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Theory of Self-Adaptive Control Systems*. Teddington, 1966: 96-111.
- [12] Boyd S, Sastry S S. Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control[J]. *Automatica*, 1986, 22(6): 629-639.
- [13] Na J, Herrmann G, Ren X M, et al. Robust adaptive finite-time parameter estimation and control of nonlinear systems[C]. *IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Denver, 2011: 1014-1019.
- [14] Chowdhary G, Mühlegg M, Johnson E. Exponential parameter and tracking error convergence guarantees for adaptive controllers without persistency of excitation[J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(8): 1583-1603.
- [15] 张国柱, 陈杰, 李志平. 基于复合自适应律的直线电机自适应鲁棒控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(8): 833-837.  
(Zhang G Z, Chen J, Li Z P. An adaptive robust control for linear motors based on composite adaptation[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(8): 833-837.)
- [16] Aranovskiy S, Bobtsov A, Ortega R, et al. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3546-3550.
- [17] Bobtsov A, Yi B W, Ortega R, et al. Generation of new exciting regressors for consistent online estimation of unknown constant parameters[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(9): 4746-4753.
- [18] Song Y D, Zhao K, Krstic M. Adaptive control with exponential regulation in the absence of persistent excitation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(5): 2589-2596.
- [19] Gaudio J E, Annaswamy A M, Lavretsky E, et al. Parameter estimation in adaptive control of time-varying systems under a range of excitation conditions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(10): 5440-5447.
- [20] 那靖, 郑昂, 黄英博. 非线性严格反馈系统自适应非反步输出反馈控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(9): 2425-2432.  
(Na J, Zheng A, Huang Y B. Adaptive non-backstepping output-feedback control of nonlinear strict-feedback systems[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(9): 2425-2432.)
- [21] Nocedal J, Wright S J. *Numerical optimization*[M]. New York: Springer-Verlag, 1999: 30-62.
- [22] Boyd S, Vandenberghe L. *Convex optimization*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 484-496.
- [23] Schraudolph N N, Yu J, Günter S. A stochastic quasi-Newton method for online convex optimization[C]. *Proceedings of the 7th Conference on Artificial Intelligence and Statistics*. San Juan, 2007: 436-443.
- [24] Fortescue T R, Kershenbaum L S, Ydstie B E. Brief paper: Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors[J]. *Automatica: Journal of IFAC*, 1981, 17(6): 831-835.
- [25] Li W. *Adaptive control of robot motion*[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1990: 192-213.

### 作者简介

陈思宇(1996—), 男, 博士生, 从事自适应控制以及参数估计算法等研究, E-mail: chen\_siyu2020@163.com;

那靖(1982—), 男, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、参数估计、非线性控制及其应用等研究, E-mail: najing25@163.com;

黄英博(1991—), 男, 副教授, 博士, 从事智能自适应控制、汽车悬架系统主动控制等研究, E-mail: Yingbo\_Huang@126.com.