



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION

基于综合犹豫模糊熵的多属性决策研究

刘赢, 关欣, 李易城

引用本文:

刘赢, 关欣, 李易城. 基于综合犹豫模糊熵的多属性决策研究[J]. *控制与决策*, 2024, 39(6): 2022–2030.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.2088>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑个体累积共识贡献的犹豫模糊语言自适应共识模型

Adaptive consensus model with hesitant fuzzy linguistic information considering individual cumulative consensus contribution

控制与决策. 2021, 36(1): 187–195 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0556>

概率区间值直觉犹豫模糊Maclaurin对称平均算子及决策方法

Probabilistic interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and decision method

控制与决策. 2021, 36(5): 1249–1258 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1370>

大群体应急决策中考虑属性关联的偏好信息融合方法

Preference information fusion method of large groups emergency decision-making based on attributes association

控制与决策. 2021, 36(10): 2537–2546 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0117>

基于犹豫度和相似度的专家权重确定方法及其应用

Expert weights determination method and application based on hesitancy degree and similarity measure

控制与决策. 2021, 36(6): 1482–1488 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1382>

考虑时间序列的动态大群体应急决策方法

Dynamic large group emergency decision-making method considering time series

控制与决策. 2020, 35(11): 2609–2618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0088>

基于综合犹豫模糊熵的多属性决策研究

刘 赢^{1†}, 关 欣¹, 李易城²

(1. 海军航空大学, 山东 烟台 264001; 2. 93116 部队, 沈阳 110000)

摘要: 针对犹豫模糊集现有熵测度存在的计算过程复杂以及反直觉等现象, 提出一种综合犹豫模糊熵, 并基于累积前景理论, 改进传统的 TOPSIS 决策方法, 构建属性权重未知下的多属性决策模型. 首先, 在模糊度和非明确度的基础上, 给出犹豫模糊熵新的公理化定义; 然后, 定义综合犹豫模糊熵, 并证明其满足新的公理化定义, 与现有犹豫模糊熵的对比分析表明, 综合犹豫模糊熵在更为合理表征犹豫模糊元模糊性的同时, 也解决了反直觉的问题; 最后应用改进 TOPSIS 方法对所提出的综合性熵测度进行仿真分析, 通过实例分析验证所提出的犹豫模糊熵的有效性. 相比现有熵测度, 综合犹豫模糊熵还具有计算简单和易于理解等优点, 改进 TOPSIS 方法能够考虑决策者的心理偏好, 相比传统决策手段, 其决策效果更为合理.

关键词: 犹豫模糊集; 犹豫模糊熵; 模糊度; 非明确度; 累积前景理论; 改进 TOPSIS 方法

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.2088

引用格式: 刘赢, 关欣, 李易城. 基于综合犹豫模糊熵的多属性决策研究[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 2022-2030.

Multi-attribute decision making based on comprehensive hesitation fuzzy entropy

LIU Ying^{1†}, GUAN Xin¹, LI Yi-cheng²

(1. Naval Aviation University, Yantai 264001, China; 2. 93116 Troop of PLA, Shenyang 110000, China)

Abstract: In view of the complex calculation process and counter-intuitive phenomena of the existing entropy measures of hesitant fuzzy sets, a comprehensive hesitant fuzzy entropy is proposed. At the same time, the traditional TOPSIS method is improved based on the cumulative prospect theory, and a multi-attribute decision-making model with unknown attribute weights is constructed. First, a new definition of hesitation fuzzy entropy is offered based on fuzziness and uncertainty. Then, the comprehensive hesitation fuzzy entropy of the hesitation fuzzy element is provided, and it is shown that it fulfills the new axiomatic definition. Additionally, the results compared with the existing entropys demonstrate that the proposed entropy not only more accurately captures the fuzziness of hesitant fuzzy elements, but also resolves the paradoxical phenomena. Finally, the comprehensive entropy measure is applied and analyzed using the improved TOPSIS method. The case study serves as evidence for the success of the proposed approach. In addition, when compared to the existing entropies, the comprehensive hesitant fuzzy entropy offers the benefits of straightforward calculation and simple comprehension, at the same time, the improved TOPSIS method can take into account the psychological preferences of decision makers, and the effect is more reasonable than traditional methods.

Keywords: hesitant fuzzy sets; hesitant fuzzy entropy; fuzziness; uncertainty; cumulative prospect theory; improved TOPSIS method

0 引言

随着科技的进步, 决策过程中的未知因素和不确定性不断增加, 模糊集^[1]在处理不确定信息方面具有显著的优越性, 熵测度作为一种重要的数据间度量手段, 在模糊领域的研究逐渐得到广泛关注.

Torra^[2]于2010年提出了犹豫模糊集的概念, 与模糊集相比, 犹豫模糊集能够通过隶属度的多个取值表达决策者决策过程中的犹豫不决, 因而能更有效地解决不确定条件下的群体决策问题. 对犹豫模糊集的研究主要集中在集成算子、测度理论以及多属性

收稿日期: 2022-12-02; 录用日期: 2023-03-12.

基金项目: 国防科技卓越青年人才基金项目(2017-JCJQ-ZQ-003); 泰山学者工程专项经费项目(ts201712072).

责任编辑: 徐泽水.

[†]通讯作者. E-mail: prettywarm@126.com.

*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

决策^[3-6]等方面。

本文主要研究犹豫模糊集的熵测度理论,相关学者也已经取得了部分成果,如: Xu等^[7]讨论了犹豫模糊环境下的信息熵和交叉熵,并分析了二者与相似度之间的关系; Zhao等^[8]定义了一种二元熵,分别描述了犹豫模糊集的两种不确定性; Wei等^[9]提出了一系列基于犹豫模糊元均值与偏差值的组合熵。此外,部分学者还研究了熵测度与其他测度之间的关系,如: Farhadinia^[10]分析了距离测度、相似度与熵测度的相互转换方法,给出了一类通用的熵测度; Hu等^[11]分别根据距离测度、相似度以及优先关系构造了3类犹豫模糊熵; 秦娟等^[12]分析了犹豫模糊熵准则的不足,并提出了基于模糊熵的犹豫模糊熵; 王拥兵等^[5]构造了指数型熵测度,在一定程度上优化了现有的犹豫模糊熵; Wan等^[13]结合 Hausdorff 距离与模糊度,构造了一种组合型犹豫模糊熵。

然而,上述研究存在一些普遍缺陷: 首先,现有的犹豫模糊熵的公理化定义并不完善,使得据此构造的熵测度在计算一些特殊犹豫模糊元时会出现反直觉现象。其次,现有犹豫模糊熵的构造方法主要分为两类: 一类是在严格数学定义的准则下寻找恰当的映射函数,这样得到的熵测度通过改变内部参数一般有若干种形式,且结构复杂、理解困难,如文献[7-9]都是这类熵测度; 第二类主要是根据熵测度与距离测度和相似度的关系,通过一定形式的转化函数得到,如文献[5,10-13]都是这类熵测度,这类熵本质上均属于距离型熵测度,即它们仅仅衡量了犹豫模糊元的模糊度,对犹豫模糊元包含的不确定性描述并不完善。

此外,传统决策方法如 TOPSIS 方法^[14]和 VIKOR 方法^[15]等,均建立在决策者完全理性的基础上,而实际过程中,由于知识水平、个人经历等因素的限制,决策者是有限理性的,即对结果具有一定的风险偏好,需要将其纳入决策考量中来。

基于以上研究,本文提出一种综合犹豫模糊熵测度。首先给出新的公理化准则; 然后结合模糊度和非明确度定义新的综合犹豫模糊熵,并拓展到犹豫模糊集上,通过与现有熵测度比较分析,验证本文熵测度的优越性; 最后基于累积前景理论^[16]改进传统的 TOPSIS 方法,建立属性权重未知条件下的多属性决策模型,并通过案例分析验证本文综合熵测度和改进决策方法的有效性和合理性。

1 预备知识

本节主要介绍犹豫模糊集的基本概念、现有的若干典型犹豫模糊熵以及累积前景理论的基础知识。

1.1 犹豫模糊集

定义1^[2] 设 X 为非空集合,犹豫模糊集(HFS) A 定义为集合 X 到区间 $[0,1]$ 上的一个映射,其数学表达式为

$$A = \{ \langle x, h_A(x) \rangle | x \in X \}. \quad (1)$$

其中: $h_A(x)$ 为一个犹豫模糊元(HFE),其取值为 $[0,1]$ 中一些数值的集合,表示元素 x 属于集合 A 的隶属度。以下 $h_A(x)$ 均简写为 $h(x)$,其数学表达式为

$$h(x) = \{ \gamma_i, i = 1, 2, \dots, l \}. \quad (2)$$

其中: l 为 $h(x)$ 中隶属度的数量,隶属度 γ_i 为元素 $x \in X$ 属于犹豫模糊集 A 的可能性。

定义2^[2] 设 $A = \{ \langle x, h_A(x) \rangle | x \in X \}$ 为一任意犹豫模糊集,则犹豫模糊集 A 的补定义为

$$A^c = \{ \langle x, h_A^c(x) \rangle | x \in X \}, \quad (3)$$

其中 $h_A^c(x) = \bigcup_{\gamma \in h_A(x)} \{ 1 - \gamma \}$ 。

定义3^[4] 假设 $h_1(x) = \{ \gamma_1^i, i = 1, 2, \dots, l \}$ 和 $h_2(x) = \{ \gamma_2^i, i = 1, 2, \dots, l \}$ 为两个长度相同的犹豫模糊元,其汉明(Hamming)距离定义为

$$d(h_1, h_2) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l | \gamma_1^{\sigma(j)} - \gamma_2^{\sigma(j)} |, \quad (4)$$

其中 $\gamma_1^{\sigma(j)}$ 和 $\gamma_2^{\sigma(j)}$ 分别为 h_1 和 h_2 中第 j 大的隶属度。

1.2 现有犹豫模糊熵测度

Xu等^[7]首先定义了若干种犹豫模糊环境下的犹豫模糊熵

$$E_1(h) = \frac{1}{l(\sqrt{2}-1)} \sum_{i=1}^l \left[\sin \frac{\pi(\gamma^{\sigma(i)} + \gamma^{\sigma(l-i+1)})}{4} + \sin \frac{\pi(2 - \gamma^{\sigma(i)} - \gamma^{\sigma(l-i+1)})}{4} - 1 \right], \quad (5)$$

$$E_2(h) = - \frac{1}{l \ln(2)} \sum_{i=1}^l \left[\frac{\gamma^{\sigma(i)} + \gamma^{\sigma(l-i+1)}}{2} \ln \frac{\gamma^{\sigma(i)} + \gamma^{\sigma(l-i+1)}}{2} + \frac{2 - \gamma^{\sigma(i)} - \gamma^{\sigma(l-i+1)}}{2} \ln \frac{2 - \gamma^{\sigma(i)} - \gamma^{\sigma(l-i+1)}}{2} \right]. \quad (6)$$

文献[12]中,秦娟等又给出了一种基于模糊熵的犹豫模糊熵定义

$$E_3(h) = 1 - \frac{2}{l} \sum_{i=1}^l | \gamma^{\sigma(i)} - 0.5 |. \quad (7)$$

王拥兵等^[5]在此基础上进行了改进,定义了一种指数型犹豫模糊熵

$$E_4(h) = \frac{e^{-\frac{2}{l} \sum_{i=1}^l | \gamma^{\sigma(i)} - 0.5 |} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}}. \quad (8)$$

1.3 累积前景理论

不同于传统的期望效用理论,累积前景理论由参考点、价值函数和权重函数构成,以有限理性为前提,能够反映决策者的心理偏好。

常见的参考点包括零点、中位数、属性的期望值以及正负理想解,本文中以正、负理想解为参考点进行的研究.决策指标为综合前景值 V ,具体表达式为

$$V = v(\Delta x) \cdot \Pi_i. \quad (9)$$

其中: $v(\Delta x)$ 为价值函数,其结果与决策者对收益或损失的主观感受有关,具体表达式为

$$v(\Delta x) = \begin{cases} \Delta x^\phi, & \Delta x \geq 0; \\ -\delta(-\Delta x)^\varphi, & \Delta x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

这里: Δx 为 x 偏离参考点 x_0 的大小, $\Delta x \geq 0$ 表示收益, $\Delta x < 0$ 表示损失; ϕ, φ 为决策者对收益和损失的敏感程度,经分析研究, $\phi = \varphi = 0.88$; δ 为损失厌恶系数, $\delta \geq 1$ 表明决策者相对于收益而言对损失更加敏感,经分析研究, $\delta = 2.25$.

Π_i 为权重函数,即

$$\Pi^+(\omega_j) = \frac{\omega_j^\lambda}{[\omega_j^\lambda + (1 - \omega_j)^\lambda]^{1/\lambda}}, \quad (11)$$

$$\Pi^-(\omega_j) = \frac{\omega_j^\varepsilon}{[\omega_j^\varepsilon + (1 - \omega_j)^\varepsilon]^{1/\varepsilon}}. \quad (12)$$

其中: ω_j 为属性权重; λ, ε 为概率权重函数的弯曲程度参数,经分析研究, $\lambda = 0.61, \varepsilon = 0.69$.

2 综合犹豫模糊熵测度

本节分析现有犹豫模糊熵公理化定义的不足,给出新的公理化定义,并基于模糊度和非明确度给出综合犹豫模糊熵的具体公式和相应的证明。

2.1 公理性定义

文献[17]给出了模糊熵的定义,用于描述模糊集的不确定性,其满足:

- 1) 若模糊集的隶属度为0或1,则其模糊熵为0.
- 2) 若模糊集的隶属度为0.5,则其模糊熵最大.
- 3) 模糊集的隶属度越接近0.5,其模糊熵越大;反之,越远离0.5,其模糊熵越小.
- 4) 模糊集 A 与它的补集 A^c 的模糊熵相等.

Xu等^[7]给出了犹豫模糊熵的公理性定义如下。

定义4^[7] 假设 $h = \{\gamma^{\sigma(i)}, i = 1, 2, \dots, l\}, h_1 = \{\gamma_1^{\sigma(i)}, i = 1, 2, \dots, l\}, h_2 = \{\gamma_2^{\sigma(i)}, i = 1, 2, \dots, l\}$ 为集合 X 上的3个犹豫模糊元.定义实函数 $E: H \rightarrow [0, 1]$,其满足如下条件,则 E 为犹豫模糊熵:

- 1) 若 $h = \{0\}$ 或 $h = \{1\}$,则 $E(h) = 0$;
- 2) 若 $\gamma_{\sigma(i)} + \gamma_{\sigma(l-i+1)} = 1$,则 $E(h) = 1$,其中

$i = 1, 2, \dots, l$;

3) $E(h) = E(h^c)$;

4) 若 $\gamma_2^{\sigma(i)} + \gamma_2^{\sigma(l-i+1)} \leq 1$ 时, $\gamma_1^{\sigma(i)} \leq \gamma_2^{\sigma(i)}$,或 $\gamma_2^{\sigma(i)} + \gamma_2^{\sigma(l-i+1)} \geq 1$ 时, $\gamma_1^{\sigma(i)} \geq \gamma_2^{\sigma(i)}$,则有 $E(h_1) \leq E(h_2)$,其中 $i = 1, 2, \dots, l$.

分析上述定义,存在以下不足:首先,若犹豫模糊元的元素个数不等,则无法对其进行度量;其次,定义4中的2)存在反直觉情况,如对于犹豫模糊元 $h = \{0.3, 0.5, 0.7\}$,根据定义4中的2),犹豫模糊熵的计算结果为1,而根据模糊熵的定义,0.5的模糊熵为1,0.3与0.7的模糊熵相等且均小于1,因此 h 的犹豫模糊熵必然小于1,结论与定义4中的2)相矛盾.因此需要对上述公理性定义进行完善。

2.2 犹豫模糊熵的二元性

由文献[8,18]可知,对于犹豫模糊集,除了模糊性,还存在另一种不确定性,即非明确性,模糊性与犹豫模糊集偏离分明集 $\{0.5\}$ 的程度有关,而非明确性与犹豫模糊集表示信息的不明确程度有关.下面通过一个例子对上述分析进行说明。

例1 有两个决策组参与一个多属性决策问题,每个决策组分别由几个专家组成,评估方案 x 满足属性 M 的程度.第1个决策组的每个专家都认为满足程度是0.01,而第2个决策组,一些专家给出的评价是0.01,其他专家给出的是0.99,且这两部分专家不能彼此说服。

可以推断出:第1组倾向于认为 x 不满足属性 M ,第2组中的一些专家倾向于认为 x 不满足属性 M ,而其他专家倾向于认为 x 满足属性 M ,并且 x 满足和不满足属性 M 的程度是一样的,这意味着根据第2组的决策信息不能确定 x 是否满足属性 M ,因此可以认为,第1组提供的决策信息比第2组更具体。

根据犹豫模糊元素的含义,可以使用犹豫模糊元 $h_1 = \{0.01\}$ 和 $h_2 = \{0.01, 0.99\}$ 表示两个决策组分别提供的方案 x 满足属性 M 的程度,根据上述分析可以得出结论,即 $E(h_1) < E(h_2)$ 。

而根据式(7)和(8)计算得到 $E(h_1) = E(h_2)$ 的结论,显然是不合理的,因为基于本节分析可知, h_1 与 h_2 有着不同的明确性,即通过 h_1 得出的结论倾向于 x 不满足属性 M ,而通过 h_2 很难判断 x 是否满足属性 M 。

为此,在文献[18-19]的启发下,本文引入反映犹豫模糊集的模糊度和非明确度的公式,其中,模糊度通过现有的熵测度^[7]表征,具体定义如下。

定义5 假设 h 为一任意犹豫模糊元,其模糊度

和非明确度分别定义如下:

$$\theta(h) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (1 - 2|\gamma_i - 0.5|), \quad (13)$$

$$\eta(h) = |\gamma_{\max} - \gamma_{\min}|. \quad (14)$$

根据上述定义对例1中的 h_1 和 h_2 进行分析, 计算得到其模糊度和非明确度分别为

$$\theta(h_1) = \theta(h_2) = 0.02, \quad \eta(h_1) = 0, \quad \eta(h_2) = 0.98.$$

分析可知, 模糊度和非明确度分别衡量了犹豫模糊元的一部分特征, 若仅通过模糊度则会得到 $E(h_1) = E(h_2)$ 的结论, 仅通过非明确度则会得到 $E(h_1) = 0$ 的结论, 很显然与直觉都不相符, 即仅仅通过某一种特征进行计算都是不完善和不合理的, 需要对两者进行综合权衡, 才能更合理地对犹豫模糊元的熵值进行度量.

基于上述定义, 并结合2.1节中的分析, 本节给出新的犹豫模糊熵的公理化定义.

定义6 假设 $h = \{\gamma^{\sigma(i)}, i = 1, 2, \dots, l\}$, $h_1 = \{\gamma_1^{\sigma(i)}, i = 1, 2, \dots, l_1\}$, $h_2 = \{\gamma_2^{\sigma(i)}, i = 1, 2, \dots, l_2\}$ 为集合 X 上的3个犹豫模糊元, 且 $l = l_1 = l_2$. 定义实函数 $E: H \rightarrow [0, 1]$, 其满足如下条件, 则 E 为犹豫模糊熵:

- 1) $0 \leq E(h) \leq 1$;
- 2) 当且仅当 $h = \{0\}$ 或 $h = \{1\}$ 时, 有 $E(h) = 0$;
- 3) 当且仅当 $h = \{0.5\}$ 时, 有 $E(h) = 1$;
- 4) $E(h) = E(h^c)$;
- 5) 若 $\theta(h_1) \leq \theta(h_2)$ 且 $\eta(h_1) \leq \eta(h_2)$, 则有 $E(h_1) \leq E(h_2)$, $i = 1, 2, \dots, l$.

2.3 综合犹豫模糊熵测度

综合犹豫模糊熵测度通过综合权衡模糊度和非明确度, 构造其数学表达式如下:

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{\alpha\theta(h) + (1 - \alpha)\eta(h)}{\alpha + (1 - \alpha)\eta(h)} = \frac{\alpha - \frac{2\alpha}{l} \sum_{i=1}^l |\gamma_i - 0.5| + (1 - \alpha)|\gamma_{\max} - \gamma_{\min}|}{\alpha + (1 - \alpha)|\gamma_{\max} - \gamma_{\min}|}, \quad (15)$$

其中参数 $\alpha \in (0, 1)$ 为权衡系数. 现对综合犹豫模糊熵测度满足定义6的公理性条件给出证明.

证明 设 $h = \{\gamma^i, i = 1, 2, \dots, l\}$ 为一犹豫模糊元. 首先, 对模糊度 $\theta(h)$ 和非明确度 $\eta(h)$ 进行分析, 已知对于犹豫模糊元 h , 总有 $0 \leq \gamma^i \leq 1$ 成立, 因此推导可得 $0 \leq 1 - 2|\gamma^i - 0.5| \leq 1$.

容易得到 $\theta(h) \in [0, 1]$ 和 $\eta(h) \in [0, 1]$ 始终成立.

1) 对于犹豫模糊元 h , 总有 $\theta(h) \in [0, 1]$ 和 $\eta(h) \in [0, 1]$ 成立. 以此为基础, 进一步推导可得

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha\theta(h) + (1 - \alpha)\eta(h) \leq 1, \\ \alpha \leq \alpha + (1 - \alpha)\eta(h) \leq 1, \\ \alpha\theta(h) + (1 - \alpha)\eta(h) \leq \alpha + (1 - \alpha)\eta(h). \end{cases} \quad (16)$$

因此 $E_{\text{new}}(h) \in [0, 1]$, 即定义6的条件1) 必然成立.

2) 因为 $\alpha \neq 0, 1 - \alpha \neq 0$, 根据 $E_{\text{new}}(h) = 0$ 可知 $\theta(h) = 0$ 且 $\eta(h) = 0$ 必然成立, 进一步推导可得

$$\begin{cases} |\gamma^i - 0.5| = 0.5, \quad i = 1, 2, \dots, l; \\ \gamma_{\max} = \gamma_{\min}. \end{cases} \quad (17)$$

求解上述方程组可知 $\gamma^i = 0$ 或 1 , 因此可得 $h = \{0\}$ 或 $h = \{1\}$. 反之, 根据 $h = \{0\}$ 或 $h = \{1\}$ 可以推导出 $E_{\text{new}}(h) = 0$. 因此定义6中的条件2) 成立.

3) 因为 $\alpha \neq 0, 1 - \alpha \neq 0$, 根据 $E_{\text{new}}(h) = 1$ 可知 $\theta(h) = 1$ 必然成立, 进一步推导可得

$$|\gamma^i - 0.5| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (18)$$

求解上述方程组可知 $\gamma^i = 0.5$, 因此可得 $h = \{0.5\}$. 反之, 根据 $h = \{0.5\}$ 可以推导出 $E_{\text{new}}(h) = 1$. 因此定义6中的条件3) 成立.

4) 由于 $h^c(x) = \bigcup_{\gamma \in h(x)} \{1 - \gamma\}$, 可以得到

$$\begin{aligned} \theta(h^c) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (1 - 2|(1 - \gamma_i) - 0.5|) = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (1 - 2|0.5 - \gamma_i|) = \theta(h), \\ \eta(h^c) &= |(1 - \gamma_{\max}) - (1 - \gamma_{\min})| = \eta(h), \\ E_{\text{new}}(h^c) &= \frac{\alpha\theta(h^c) + (1 - \alpha)\eta(h^c)}{\alpha + (1 - \alpha)\eta(h^c)} = \\ &= \frac{\alpha\theta(h) + (1 - \alpha)\eta(h)}{\alpha + (1 - \alpha)\eta(h)} = E_{\text{new}}(h). \end{aligned} \quad (19)$$

因此定义6中的条件4) 成立.

5) 令 $\theta(h) = \theta, \eta(h) = \eta$, 则式(9)可记作 $E(\theta, \eta) = \frac{\alpha\theta + (1 - \alpha)\eta}{\alpha + (1 - \alpha)\eta}$, 分别对 $E(\theta, \eta)$ 关于 θ 和 η 求偏导, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\theta, \eta)}{\partial \theta} &= \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha)\eta} \geq 0, \\ \frac{\partial E(\theta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(1 - \alpha)\alpha(1 - \theta)}{[\alpha + (1 - \alpha)\eta]^2} \geq 0. \end{aligned}$$

因此, $E(\theta, \eta)$ 关于 θ 和 η 在 $[0, 1]$ 上均单调递增.

于是, 对于犹豫模糊元 h_1, h_2 , 若 $\theta(h_1) \leq \theta(h_2)$ 且 $\eta(h_1) \leq \eta(h_2)$, 则根据 $E(\theta, \eta)$ 的单调性容易分析得到 $E(h_1) \leq E(h_2)$, 即条件5) 成立. \square

2.4 犹豫模糊熵比较分析

为了说明本文综合犹豫模糊熵的合理性和有效性, 将其用于9个典型的犹豫模糊元的熵值计算, 分

别与现有的几种犹豫模糊熵测度进行比较,即根据文献[7]中的 $E_1(h)$ 和 $E_2(h)$ 、文献[12]中的 $E_3(h)$ 、文献

[5]中的 $E_4(h)$ 进行计算,计算结果如表1所示,不同犹豫模糊熵下犹豫模糊元的排序情况如表2所示.

表1 不同犹豫模糊熵测度的计算结果

犹豫模糊元	E_1	E_2	E_3	E_4	$E_{new}/\alpha = 0.3$	$E_{new}/\alpha = 0.5$
$h_1 = \{0.5\}$	1	1	1	1	1	1
$h_2 = \{0.4\}$	0.9585	0.9710	0.8	0.7132	0.8	0.8
$h_3 = \{0.3, 0.7\}$	1	1	0.6	0.4785	0.7931	0.7143
$h_4 = \{0.4, 0.6\}$	1	1	0.8	0.7132	0.8636	0.8333
$h_5 = \{0.4, 0.5, 0.6\}$	1	1	0.8025	0.8667	0.8653	0.8354
$h_6 = \{0.3, 0.5, 0.7\}$	1	1	0.7333	0.6297	0.8621	0.8095
$h_7 = \{0.7, 0.8, 0.9\}$	0.6279	0.7219	0.4	0.2862	0.5909	0.5
$h_8 = \{0.7, 0.9, 0.95\}$	0.4924	0.6023	0.3	0.2036	0.5579	0.44
$h_9 = \{0, 1\}$	1	1	0	0.3775	0.7	0.5

表2 不同熵测度下各犹豫模糊元排序结果

熵测度	犹豫模糊元排序情况
E_1, E_2	$h_1 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = h_9 > h_2 > h_7 > h_8$
E_3	$h_1 > h_5 > h_2 = h_4 > h_6 > h_3 > h_7 > h_8 > h_9$
E_4	$h_1 > h_5 > h_2 = h_4 > h_6 > h_3 > h_9 > h_7 > h_8$
$E_{\alpha=0.3}$	$h_1 > h_5 > h_4 > h_6 > h_2 > h_3 > h_9 > h_8 > h_7$
$E_{\alpha=0.5}$	$h_1 > h_5 > h_4 > h_6 > h_2 > h_3 > h_7 = h_9 > h_8$

对不同犹豫模糊熵测度的结果进行如下分析:

1) 分析 E_1 和 E_2 . 根据两种熵测度计算的 h_3, h_4, h_5, h_6, h_9 的熵值均为1,而根据定义6的条件2)以及2.1节的分析,显然这样的结论是错误的. 原因在于:文献[7]在熵测度 E_1 和 E_2 需满足的公理化条件中明确要求:若 $\gamma^{\sigma(i)} + \gamma^{\sigma(l-i+1)} = 1$, 则 $E(h) = 1$. 即当犹豫模糊元的隶属度存在互补关系时,其熵值为1,且 h_3, h_4, h_5, h_6, h_9 均满足互补关系,而定义5的分析已经给出结论,即使犹豫模糊元 $h(h \neq \{0.5\})$ 的隶属度为互补的,其熵值也必然小于1,因此,该定义是反直觉的, E_1 和 E_2 对存在互补关系的犹豫模糊元不具备区分能力,因此这两种熵测度都存在一定的缺陷. 而本文通过重新定义犹豫模糊熵测度需满足的公理性条件(即要求当且仅当 $h = \{0.5\}$, 有 $E(h) = 1$)很好地对这一问题进行了改善.

2) 分析 E_3 和 E_4 . 对于 h_2, h_4 , 由例1可知, $E_i(h_2) < E_i(h_4)$, 与 E_3 和 E_4 的结论不同, 原因在于: E_3 的表达式 $1 - \frac{2}{l} \sum_{i=1}^l |\gamma^{\sigma(i)} - 0.5|$ 实际上与本文熵测度的模糊度部分 $\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (1 - 2|\gamma^i - 0.5|)$ 完全一致, 而通过 E_4 的表达式可知, 虽然通过引入指数熵的形式解决了原

有测度存在的一些问题,但实际上 E_4 仍然只是模糊度的一种拓展变形,同样面临与 E_3 相同的问题,即 E_3 和 E_4 均是对犹豫模糊元各隶属度与分明集 $\{0.5\}$ 的偏离程度的加权平均的度量,存在一定的片面性,因此, E_3 和 E_4 均存在一定程度的不足. 而本文的综合犹豫模糊熵通过引入非明确度,相比 E_3 和 E_4 ,还能够对犹豫模糊元表征信息的不确定程度进行度量,起到辅助区分的作用,很好地解决了这一问题,使得计算结果更加符合实际要求.

3) 由表2可知,当权衡系数 α 改变时, h_7, h_8 和 h_9 之间有不同的序关系,这是由于对模糊度和非明确度的侧重程度不同导致的,显然,当 α 较小时,非明确度的比重更大,因此,非明确度更大的 h_9, h_8 , 其熵值要大于 h_7 , 同时也说明了本文的综合熵测度具有最好的区分能力,可以通过调整 α 的数值得到理想的序关系.

综合上述分析,无论从区分能力还是从计算的合理性上,本文的综合犹豫模糊熵都更为完善,同时相比现有的犹豫模糊熵,本文熵测度的计算过程更为简单,物理意义更为清晰,也更易于研究人员理解.

2.5 犹豫模糊集的综合犹豫模糊熵

定义7 记论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, A 和 B 为 X 上的两犹豫模糊集, $h_A(x_i)$ 和 $h_B(x_i)$ 为 A, B 上的犹豫模糊元,定义实函数 $E: H \rightarrow [0, 1]$, 使其满足以下条件,则 E 为犹豫模糊集的综合犹豫模糊熵:

- 1) 当且仅当 $h_A(x_i) = \{0\}$ 或 $\{1\}$ 时, $E(A) = \{0\}$;
- 2) 当且仅当 $h_A(x_i) = \{0.5\}$ 时, $E(A) = \{1\}$;
- 3) $E(A) = E(A^c)$.

$$E(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(h_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\alpha - \frac{2\alpha}{l} \sum_{i=1}^l |\gamma_i - 0.5| + (1 - \alpha)|\gamma_{\max} - \gamma_{\min}|}{\alpha + (1 - \alpha)|\gamma_{\max} - \gamma_{\min}|} \right]. \tag{20}$$

3 基于累积前景理论的改进TOPSIS算法

本节将累积前景理论与TOPSIS方法结合,得到一种改进的TOPSIS决策方法,并应用到犹豫模糊环境中,具体步骤如下。

假设有 n 个方案 $X = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 和 m 种属性 $A = \{a_j | j = 1, 2, \dots, m\}$, 属性权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)^T$, 其中属性权重完全未知。

step 1: 决策者提供方案 x_i 在属性 a_j 下的所有可能的评估值,从而得到决策矩阵 H , 其元素用犹豫模糊元 $h_{ij} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{l_{ij}}\}$ 表示。其中: $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, l_{ij}$ 为 h_{ij} 中的隶属度个数。

step 2: 对决策矩阵 H 进行归一化处理,旨在消除量纲与数量级的影响,归一化决策矩阵为 \bar{H} , 其元素用 \bar{h}_{ij} 表示。其中:对于效益型属性, $\bar{h}_{ij} = h_{ij}$; 对于成本型属性, $\bar{h}_{ij} = h_{ij}^c = \{1 - \gamma_1, 1 - \gamma_2, \dots, 1 - \gamma_{l_{ij}}\}$ 。

step 3: 根据信息熵理论确定属性权重。属性 a_j 权重的计算公式如下:

$$\omega_j = \frac{1 - E_j}{m - \sum_{j=1}^m E_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (21)$$

其中: $E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(h_{ij})$ 为属性 a_j 下的平均熵值, $E(h_{ij})$ 根据本文犹豫模糊熵的公式(15)计算。

step 4: 确定正负理想方案。正理想方案为 $h^+ = (h_1^+, h_2^+, \dots, h_m^+)$, 负理想方案为 $h^- = (h_1^-, h_2^-, \dots, h_m^-)$ 。其中: $h_1^+ = 1, h_1^- = 0$ 。

step 5: 分别以正负理想方案为参考点,计算各方案相对于参考点的前景损失值和前景收益值

$$v_{ij}^- = -\delta d(h_{ij}, h_j^+)^{\varphi}, \quad (22)$$

$$v_{ij}^+ = d(h_{ij}, h_j^-)^{\phi}, \quad (23)$$

其中犹豫模糊数间的距离可根据式(4)求解得到。

step 6: 根据下式分别计算各方案在面对收益和损失时的综合收益值和损失值:

$$V_i^+ = \sum_{j=1}^m v_{ij}^+ \Pi^+(\omega_j), \quad (24)$$

$$V_i^- = \sum_{j=1}^m v_{ij}^- \Pi^-(\omega_j), \quad (25)$$

其中 $\Pi^+(\omega_j), \Pi^-(\omega_j)$ 可根据式(11)和(12)计算求得。

step 7: 结合 Liao 等^[20] 提出的考虑决策者偏好的满意度和TOPSIS方法,本文提出以下满意度公式:

$$CI_i = \frac{(1 - \theta)V_i^+}{(1 - \theta)V_i^+ + \theta V_i^-}. \quad (26)$$

其中: $\theta \in [0, 1]$ 为风险偏好系数,若 $\theta < 0.5$, 则代表决策者为风险规避型,若 $\theta > 0.5$, 则代表决策者为风险接受型,若 $\theta = 0.5$, 则代表决策者为风险中立型。满意度 CI_i 越大代表方案 x_i 越好。

4 实例分析

为了便于比较分析,通过文献[5]中的仿真实例对本文的综合熵测度和决策方法进行验证。

4.1 实例仿真

某公司为其关键部件选择合适的供应商。经过预先评估,4个供应商 $X_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 作为备选方案需要进一步评估。为了评估这些供应商,现考虑5种属性 $G_j (j = 1, 2, \dots, 5)$ 。其中: G_1, G_2, G_3 和 G_5 为效益型属性, G_4 为成本型属性。犹豫模糊决策矩阵如表3所示。

表3 犹豫模糊决策矩阵

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
X_1	{0.2, 0.4, 0.7}	{0.1, 0.2, 0.5, 0.7}	{0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8}	{0.1, 0.4, 0.6}	{0.4, 0.5, 0.6}
X_2	{0.2, 0.6, 0.7}	{0.1, 0.2, 0.4, 0.6}	{0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9}	{0.1, 0.2, 0.4}	{0.3, 0.5, 0.7}
X_3	{0.2, 0.3, 0.6}	{0.3, 0.4, 0.5, 0.9}	{0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8}	{0.3, 0.4, 0.8}	{0.1, 0.5, 0.9}
X_4	{0.2, 0.3, 0.5}	{0.2, 0.3, 0.5, 0.7}	{0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9}	{0.1, 0.2, 0.7}	{0.2, 0.5, 0.8}

参数设置: $\alpha = 0.5, \theta = 0.5, \phi = \varphi = 0.88, \delta = 0.670, E_5 = 0.788, \lambda = 0.61, \varepsilon = 0.69$ 。

step 1、step 2: 对犹豫模糊决策矩阵做归一化处理。

step 3: 根据式(15)计算所有犹豫模糊元的犹豫模糊熵,计算结果如表4所示。

计算各属性的平均熵如下:

$$E_1 = \frac{1}{4}(0.73 + 0.733 + 0.714 + 0.744) = 0.7311.$$

同理可得, $E_2 = 0.742, E_3 = 0.733, E_4 =$

表4 犹豫模糊熵计算结果

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
X_1	0.733	0.719	0.75	0.733	0.889
X_2	0.733	0.7	0.725	0.59	0.81
X_3	0.714	0.781	0.75	0.733	0.704
X_4	0.744	0.767	0.707	0.625	0.75

根据式(21)确定各属性权重如下:

$$\omega_1 = 0.2013, \omega_2 = 0.1934,$$

$$\omega_3 = 0.1999, \omega_4 = 0.2468, \omega_5 = 0.1587.$$

step 4: 确定正负理想方案如下:

$$h^+ = \{\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}\},$$

$$h^- = \{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}.$$

step 5、step 6: 计算各方案的综合收益值和综合损失值,计算结果如表5所示.

表5 各方案相对参考点的综合收益、损失值

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
V_i^+	0.6951	0.7758	0.6890	0.7349
V_i^-	-1.5862	-1.3933	-1.6047	-1.4899

step 7: 根据式(26)计算各方案的满意度,分别为:

$$CI_1 = 0.3047, CI_2 = 0.3576, CI_3 = 0.3004, CI_4 = 0.3303.$$

根据满意度判定最终的供应商排序结果为 $X_2 > X_4 > X_1 > X_3$,即最佳的供应商为 X_2 .

最终的排序结果与文献[5]一致,验证了本文犹豫模糊熵测度和决策方法的有效性.

4.2 参数敏感性分析

保持其他参数不变,设置权衡系数 α 从0.1按步长0.1递增至0.9,分析各属性权重以及各供应商的满意度变化情况,计算结果如图1和图2所示.

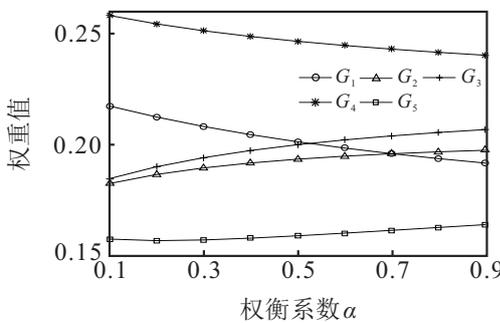


图1 属性权重随权衡系数 α 的变化

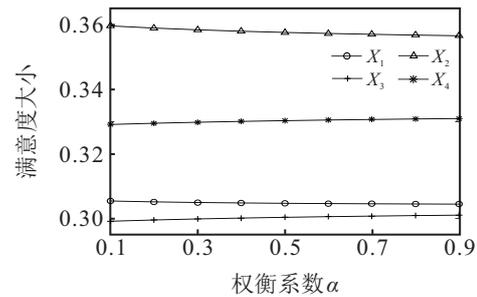


图2 满意度随权衡系数 α 的变化

由图1可知,随着 α 不断增大,属性权重的大小关系先后在0.52和0.7附近经历了3次变化,即 $\omega_4 > \omega_1 > \omega_3 > \omega_2 > \omega_5, \omega_4 > \omega_3 > \omega_1 > \omega_2 > \omega_5, \omega_4 > \omega_3 > \omega_2 > \omega_1 > \omega_5$. 其中: G_1 和 G_4 呈现相同的减小趋势,且降幅最为明显; G_2 和 G_3 呈现相似的增大趋势, G_3 增幅更为显著; G_5 权重呈现出先减小后增大的趋势. 而且随着 α 的增大,属性间的区分程度越来越差,表明属性权重对权衡系数的敏感性较高. 尽管根据图3,权重变化并未影响最终的排序情况,但在实际应用中,仍需根据实际情况选择合适的权衡系数.

由图2可知,随着权衡系数不断变化,排序结果始终保持 $X_2 > X_4 > X_1 > X_3$ 不变,与上文结果一致,表明本文所提熵测度及决策方法对权衡系数的敏感性较低. 但随着 α 不断增大, X_1 和 X_2 的满意度呈缓慢减小的趋势, X_3 和 X_4 的满意度的变化幅度不明显,并且随着权衡系数的增大,方案的区分度越来越差. 总体而言,在本文实例中,较小的权衡系数得到的满意度区分效果更好.

4.3 对比分析

4.3.1 熵测度对比分析

为说明本文熵测度的优越性,将其与 $E_a(h)^{[12]}$ 、 $E_b(h)^{[5]}$ 、 $E_c(h)^{[21]}$ 、 $E_d(h)^{[7]}$ 、 $E_e(h)^{[7]}$ 和 $E_f(h)^{[13]}$ 进行比较,分别对属性权重及满意度进行求解,并计算各方法的运行时间,对比结果如表6所示.

表6 不同熵测度下的排序结果

熵测度	属性权重 ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5$)	满意度 (CI_1, CI_2, CI_3, CI_4)	排序结果	运行时间/s
$E_a(h)$	(0.190, 0.198, 0.208, 0.239, 0.165)	(0.304, 0.356, 0.301, 0.331)	$X_2 > X_4 > X_1 > X_3$	5.1645×10^{-3}
$E_b(h)$	(0.193, 0.200, 0.208, 0.231, 0.167)	(0.304, 0.356, 0.301, 0.330)	$X_2 > X_4 > X_1 > X_3$	5.7150×10^{-3}
$E_c(h)$	(0.161, 0.208, 0.199, 0.257, 0.177)	(0.306, 0.356, 0.303, 0.333)	$X_2 > X_4 > X_1 > X_3$	0.06032
$E_d(h)$	(0.198, 0.204, 0.156, 0.443, 0)	(0.309, 0.378, 0.294, 0.337)	$X_2 > X_4 > X_1 > X_3$	0.04230
$E_e(h)$	(0.195, 0.199, 0.154, 0.452, 0)	(0.309, 0.379, 0.294, 0.338)	$X_2 > X_4 > X_1 > X_3$	0.04025
$E_f(h)$	(0.182, 0.227, 0.212, 0.227, 0.152)	(0.302, 0.353, 0.303, 0.330)	$X_2 > X_4 > X_3 > X_1$	0.07843
$E_{new}(h)$	(0.201, 0.193, 0.199, 0.247, 0.159)	(0.305, 0.358, 0.300, 0.330)	$X_2 > X_4 > X_1 > X_3$	5.6715×10^{-3}

分析可知,不同熵公式计算得到的最佳供应商都是 X_2 ,表明了本文所提熵测度的有效性和合理性. 但进一步分析表6可以得到以下结论:

1) $E_a(h)$ 实际上与本文综合犹豫模糊熵的模糊

度部分 $\left(1 - \frac{2}{l} \sum_{i=1}^l |\gamma_i - 0.5|\right)$ 相同,即 $E_a(h)$ 仅反映了犹豫模糊元隶属度偏离 $\{0.5\}$ 的程度,而无法度量犹豫模糊元的非明确度,相比本文熵测度存在一定的

缺陷,使得 $E_a(h)$ 的属性排序结果 $\omega_4 > \omega_3 > \omega_2 > \omega_1 > \omega_5$ 与本文的 $\omega_4 > \omega_1 > \omega_3 > \omega_2 > \omega_5$ 有所不同.

2) $E_b(h)$ 和 $E_c(h)$ 虽然与本文的排序结果一致,但相比本文测度,其表达形式过于复杂,且在理解上更为困难,因此同样存在一定程度的不足.

3) 可以发现, $E_d(h)$ 和 $E_e(h)$ 在计算时,属性 G_5 对应的犹豫模糊元的熵值均为1,导致 G_5 的权重为0,使得该属性完全被忽略,而实际上各方案在属性 G_5 上的值是完全不同的,即 $E_d(h)$ 与 $E_e(h)$ 存在反直觉现象,在计算过程中会丢失原本的参数信息,导致误差引入,而本文所提熵测度通过综合模糊度和非明确度能够始终保证各属性均不被忽略,因此能够得到更为合理的结论.

4) 同样的, $E_f(h)$ 的排序结果 $X_2 > X_4 > X_3 > X_1$ 与其他熵测度的结论均不相同,这是由于 $E_f(h)$ 在计算过程中采用 Hausdorff 距离测度进行计算,只是简单地根据每个犹豫模糊元中的最大值或最小值进行求解,忽略了犹豫模糊元内部的大量信息,导致信息的缺失,从而影响最终的结果.

分析不同测度的运行时间可知,本文综合熵测度的计算时间相比大部分熵测度,均提升了一个数量级,仅 $E_a(h)$ 、 $E_b(h)$ 与本文熵测度的运行速度接近,表明这两种熵测度的构造同样简洁,但二者仅仅衡量了犹豫模糊元的模糊度这一特征,对犹豫模糊元不确定性的描述并不完善,这表明本文综合性熵测度在充分考虑犹豫模糊元的模糊性与非明确性的同时,还保证了其构造简单、易于理解的优势.

综上分析,相比现有测度,本文熵测度克服了衡量犹豫模糊元不确定性相对片面的缺陷,解决了特殊情况下的反直觉现象,同时还具有计算简单、易于理解的优点,对比分析验证了本文熵测度的有效性.

4.3.2 决策方法对比分析

为了验证本文决策方法的优越性,保持其他参数不变,分别与文献[22-24]中3种不同的决策方法进行对比,对文献[25]中的算例进行分析.其中:文献[22]同样考虑了决策者的心理偏好;文献[23-24]则为传统决策方法,决策过程中未考虑决策者的心理偏好.其排序结果如表7所示.

分析表7可知,当考虑决策者的心理偏好时,文献[22]的排序结果为 $A_4 > A_1 > A_5 > A_3 > A_2$,与本文决策结论一致,这是因为两种决策方法都能够考虑到决策者在面对收益和损失时不同的主观偏好.

表7 不同决策方法的排序结果

	本文方法	文献[22]	文献[23]	文献[24]
A_1	0.409 1	0.792 6	0.710 7	0.146 8
A_2	0.309 4	0.00	0.302 5	0.210 9
A_3	0.309 5	0.025 2	0.282 4	0.168 1
A_4	0.448 6	1.00	0.702 3	0.165 8
A_5	0.391 6	0.387 1	0.651 8	0.147 1

反之,文献[23]采用计算贴近度的方法,文献[24]计算了各方案与正理想解的欧氏距离,两种方法均判定 A_1 为最优结果,与本文决策方法的结论不一致的原因在于文献[23-24]中假设决策者面对损失和收益具有相同的心理偏好,而本文方法在决策过程中考虑了决策者在面临收益和损失时具有不同风险态度的心理行为特征,更符合实际决策需要.

5 结 论

本文首先针对现有犹豫模糊熵中存在的计算复杂、理解困难以及反直觉现象等问题,定义了更完善的公理化准则,并基于模糊度与非明确度构造了综合犹豫模糊熵,给出了相应的证明过程,通过与现有犹豫模糊熵进行对比可知,综合犹豫模糊熵对犹豫模糊元不确定性的刻画更为合理准确,同时也避免了反直觉等现象的出现,还具有计算简单、易于理解等优势;此外,基于累积前景理论改进了传统的TOPSIS决策方法,在决策过程中能够考虑决策者面临收益和损失时不同的心理偏好,实例分析验证了综合熵测度与决策方法的有效性和合理性.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.
- [3] 方冰, 韩冰, 朱江. 基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2657-2666. (Fang B, Han B, Zhu J. Multi-attribute decision-making method based on the reconciled hesitant fuzzy information[J]. Control and Decision, 2022, 37(10): 2657-2666.)
- [4] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.
- [5] 王拥兵, 苗妙. 指数型犹豫模糊熵在多属性决策中的应用[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1460-1468. (Wang Y B, Miao M. Application of exponential hesitation fuzzy entropy in multi-attribute decision making[J]. Control and Decision, 2022, 37(6): 1460-1468.)
- [6] 冯锋, 万喆, 徐泽水, 等. 基于软粗糙集的犹豫模糊三

- 支决策方法[J]. 控制与决策, 2023, 38(3): 834-842.
(Feng F, Wan Z, Xu Z S, et al. Hesitant fuzzy three-way decision method based on soft rough sets[J]. Control and Decision, 2023, 38(3): 834-842.)
- [7] Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multiattribute decision-making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.
- [8] Zhao N, Xu Z S, Liu F J. Uncertainty measures for hesitant fuzzy information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2015, 30(7): 818-836.
- [9] Wei C P, Yan F F, Rodríguez R M. Entropy measures for hesitant fuzzy sets and their application in multi-criteria decision-making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 31(1): 673-685.
- [10] Farhadinia B. Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2013, 240: 129-144.
- [11] Hu J H, Zhang X L, Chen X H, et al. Hesitant fuzzy information measures and their applications in multi-criteria decision making[J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(1): 62-76.
- [12] 秦娟, 陈振颂, 李延来. 基于改进犹豫模糊熵的群体multimora决策方法[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(12): 2375-2392.
(Qin J, Chen Z S, Li Y L. An approach for group multimora decision making based upon the improved hesitant fuzzy entropy[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2016, 36(12): 2375-2392.)
- [13] Wan S P, Zou W C, Zhong L G, et al. Some new information measures for hesitant fuzzy PROMETHEE method and application to green supplier selection[J]. Soft Computing, 2020, 24(12): 9179-9203.
- [14] 董鹏宇, 王红卫, 陈游. 区间条件下基于GRA和TOPSIS的辐射源威胁评估[J]. 控制与决策, 2021, 36(6): 1516-1522.
(Dong P Y, Wang H W, Chen Y. Combining TOPSIS and GRA for emitter threat evaluation with interval number[J]. Control and Decision, 2021, 36(6): 1516-1522.)
- [15] 殷春武. 无人飞行器航迹方案的VIKOR择优评价[J]. 控制与决策, 2020, 35(12): 2950-2958.
(Yin C W. Unmanned aerial vehicle path scheme optimal evaluation based-VIKOR[J]. Control and Decision, 2020, 35(12): 2950-2958.)
- [16] 周晓光, 何欣. 基于累积前景理论的可变下标犹豫模糊语言多准则投资组合优化[J]. 控制与决策, 2022, 37(9): 2389-2398.
(Zhou X G, He X. Multi-criteria portfolio optimization of variable subscripts hesitant fuzzy linguistic based on cumulative prospect theory[J]. Control and Decision, 2022, 37(9): 2389-2398.)
- [17] Luca A D, Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. Information and Control, 1972, 20(4): 301-312.
- [18] 闫菲菲, 魏翠萍, 任智亮. 犹豫模糊集的熵[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(14): 243-250.
(Yan F F, Wei C P, Ren Z L. Entropy measure for hesitant fuzzy sets[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2018, 48(14): 243-250.)
- [19] 方冰, 韩冰. 混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 546-554.
(Fang B, Han B. Hybrid entropy and cross-entropy measures of probabilistic hesitant fuzzy information[J]. Control and Decision, 2023, 38(2): 546-554.)
- [20] Liao H C, Xu Z S, Xia M M. Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2014, 13(1): 47-76.
- [21] 谭吉玉, 刘高常. 犹豫模糊指数熵及其应用[J]. 统计与决策, 2017(24): 66-69.
(Tan J Y, Liu G C. Hesitant fuzzy exponential entropy and its application[J]. Statistics and Decision, 2017(24): 66-69.)
- [22] Zhang X L, Xu Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61: 48-58.
- [23] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52: 53-64.
- [24] 张小路. 基于犹豫模糊信息的多属性决策方法研究[D]. 南京: 东南大学经济管理学院, 2015: 95-106.
(Zhang X L. Research on multi-attribute decision-making method based on hesitant fuzzy information[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2015: 95-106.)
- [25] 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 864-870.
(Wang Y M, Que C P, Lan Y X. Hesitant fuzzy TOPSIS multi-attribute decision method based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 864-870.)

作者简介

刘赢(1995—), 男, 博士生, 从事信息处理与模糊理论的研究, E-mail: prettywarm@126.com;

关欣(1978—), 女, 教授, 博士生导师, 从事智能信息处理、多源信息融合等研究, E-mail: gxtongwin@163.com;

李易城(1995—), 男, 助理工程师, 从事情报分析的研究, E-mail: liyichengyy@qq.com.