中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION

不协调广义多尺度决策系统的最优尺度组合的层次关系

曾华鑫, 吴伟志

引用本文:

曾华鑫,吴伟志. 不协调广义多尺度决策系统的最优尺度组合的层次关系[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 2041-2050.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1648

不协调广义多尺度决策系统的最优尺度组合的层次关系

曾华鑫[1,2], 吴伟志[1,2†]

(1. 浙江海洋大学 信息工程学院，浙江 舟山 316022；
2. 浙江海洋大学 浙江省海洋大数据挖掘与应用重点实验室，浙江 舟山 316022)

摘　要: 多尺度信息系统是一类特殊的对象-属性值系统,数据集中的每个对象在每个属性下根据不同的尺度或粒度可呈现出不同的值,并从细粒度属性值域到粗粒度属性值域间存在粒信息变换函数. 从多尺度数据集中的每个属性中选择一个满足预设条件的尺度用于最终的决策分析(这个过程称为最优尺度组合选择)是多尺度决策系统知识获取的关键问题. 针对不协调广义多尺度决策系统的最优尺度组合选择问题,首先,通过引入三层思维提出广义决策类最优尺度组合和对象最优尺度组合的概念,讨论两者间的层次关系;然后,提出属性约简诱导的最优尺度组合和关键尺度组合的概念,讨论对象关键尺度组合与广义决策类关键尺度组合间的层次关系;最后,依据对象关键尺度组合与广义决策类关键尺度组合间的层次关系给出两者间互相计算的方法.

关键词: 粒计算；粗糙集；信息系统；多尺度信息系统；最优尺度组合

中图分类号: TP18　　　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1648

引用格式: 曾华鑫, 吴伟志. 不协调广义多尺度决策系统的最优尺度组合的层次关系[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 2041-2050.

Hierarchical relationships of optimal scale combinations in inconsistent generalized multi-scale decision systems

ZENG Hua-xin[1,2], *WU Wei-zhi*[1,2†]

(1. School of Information Engineering，Zhejiang Ocean University，Zhoushan 316022，China；2. Key Laboratory of Oceanographic Big Data Mining and Application of Zhejiang Province，Zhejiang Ocean University，Zhoushan 316022，China)

Abstract: A multi-scale information system is an attribute-value system in which each object under each attribute is represented by different scales at different levels of granulations having a granular information transformation from a finer to a coarser labelled value. For a given multi-scale decision system, a key step is the selection of an optimal scale for each attribute to determine a proper decision table with some requirement for final decision or classification, and such a process is called the optimal scale combination selection. Aiming at the problem of optimal scale combination selection in inconsistent generalized multi-scale decision systems, by introducing tri-level thinking, concepts of optimal scale combinations for generalized decision classes and object scale combinations in inconsistent generalized multi-scale decision systems are first introduced, and the hierarchical relationship between them is discussed. Notions of optimal scale combinations and key scale combinations induced by an attribute reduct are then defined, and the hierarchical relationship between object key scale combinations and generalized decision class key scale combinations is examined. Finally, methods of mutual calculation between key scale combinations of objects and key scale combinations of generalized decision classes are presented.

Keywords: granular computing；rough sets；information system；muti-scale information system；optimal scale combination

0　引　言

随着信息技术不断深入人们的生产生活,社会各领域涌现出了大量需要基于大数据进行决策的场景. 如何面向大量复杂决策数据进行挖掘,实现智能化决策是当前人工智能领域的重要研究方向. 作为一种处理复杂数据的重要计算范式,粒计算(granular

收稿日期: 2022-09-17；**录用日期:** 2023-03-11.
基金项目: 国家自然科学基金项目(61976194, 62076221).
责任编委: 刘宝碇.
†通讯作者. E-mail: wuwz@zjou.edu.cn.

computing, GrC)在大数据挖掘和分析方面呈现出独特的优势[1-4],其以粒(granule)为基本计算单位,以信息粒化等方式简化复杂问题求解[5-9].

Pawlak[10]提出的粗糙集数据分析是推动和发展粒计算研究的一个重要模型,该模型的数据以各种信息系统形式呈现,通过定义在数据样本集上的二元关系来构造“粒”,通过属性约简等手段挖掘出蕴含在数据集中的决策规则集. 原始的Pawlak粗糙集数据分析及其推广模型所呈现的信息系统中每个对象在每个属性上只取唯一的值,即信息系统是单一尺度属性的数据. 然而,在实际生活中,呈现在人们面前的数据可以是多尺度的,人们可能要根据不同的目标需求,以较低的计算代价选择合适的尺度或粒度进行最终的分析和决策. 针对类似问题,Wu等[11]提出了多尺度信息系统的数据分析模型,后称Wu-Leung模型[12]. 由于Wu-Leung模型假设不同的属性具有相同的尺度个数,而实际问题的数据集中可能不同的属性具有不同的尺度个数,基于此,Li等[12]通过引入尺度组合概念提出了广义多尺度信息系统的数据分析模型. 从广义多尺度信息系统(或决策表)选择一个针对目标需求的最优尺度组合,提取出一个单尺度的信息系统或决策表用于最终决策. 最优尺度选择是Wu-Leung多尺度信息系统及其各种推广数据模型中知识获取研究的关键问题,已成为多尺度数据分析研究的一个重要方向[13-34].

根据粗糙集数据分析中由下近似算子和上近似算子将对象空间划分为正域、负域和边界域的思想,Yao[35-36]提出了三支决策(three-way decision)模型,不同于传统接受-拒绝的非此即彼决策思想,三支决策模型将中间态(延迟决策)的选项纳入其中,是一种更符合人类认知习惯的决策模型. 目前,三支决策思想已被引入研究多尺度数据的决策问题中[17, 31-33, 37-38]. 近年来,在三支决策基础上提出的三层思维(tri-level thinking)[39-42]是一个新的处理和分析问题的思考方式,其主要思想是从3个相对简单,但有针对性的层面来观察和处理一个复杂的整体.

Zhang等[41]将三层思想应用于单一尺度的信息系统中,采用粗糙集方法从对象-决策类-系统分类3个层面讨论了决策系统中属性约简的层次关系. 从理论上提示了对象的(局部)约简、决策类的约简和系统的分类约简关系及其相互转化,为决策系统的粗糙集数据分析提供了新手段. 众所周知,多尺度决策系统的最优尺度选择是多尺度数据知识获取的一个关键步骤. 迄今为止,广义多尺度决策系统的(系统)最优尺度组合和对象(局部)最优尺度组合的选择大多数是根据定义直接计算的,且较少考虑两者间的转化关系. 针对多尺度数据分析的最优尺度组合选择和知识获取问题,本文借鉴文献[41]的思想,将三层思想应用于不协调广义多尺度决策系统,探索从对象、决策类、系统分类3个视角对多尺度决策系统的最优尺度组合选择和属性约简的研究,讨论不协调广义多尺度决策系统中最优尺度组合的层次关系,在此基础上,进一步结合属性约简提出关键尺度组合概念,即仅考虑属性约简中的属性尺度组合下研究最优尺度组合的层次关系,并给出层级间互相计算的方法.

1 相关基础知识

本节简要介绍信息系统和多尺度信息系统的相关概念和性质.

1.1 信息系统

一个信息系统[10]为一个二元组(U, A). 其中:$U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$为一个非空有限对象集,也称为论域;$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$为一个非空有限属性集,对于$\forall a \in A$, a为U到V_a的映射$U \longrightarrow V_a$, $V_a = \{a(x)|x \in U\}$为属性a的值域.

若B为A的非空子集,则$R_B = \{(x_1, x_2)|a_i(x_1) = a_i(x_2),\ x_1, x_2 \in U, \forall a_i \in B\}$称为由$B$诱导的不可分辨关系. 论域$U$被关系$R_B$划分为两两不相交的等价类$U/R_B = \{[x]_B|x \in U\}$,其中$[x]_B = \{y \in U|(x, y) \in R_B\}$. 将$U/R_B$简记为$\pi_B$.

对于论域U的任意非空子集X, X关于属性子集B的上近似和下近似定义如下式所示:

$$\overline{R_B}(X) = \{x \in U|[x]_B \bigcap X \neq \varnothing\}, \tag{1}$$

$$\underline{R_B}(X) = \{x \in U|[x]_B \subseteq X\}. \tag{2}$$

称$(\underline{R_B}(X), \overline{R_B}(X))$为$X$关于属性子集$B$的Pawlak粗糙集[10].

二元组$S = (U, C \bigcup \{d\})$称为一个决策系统[10]. 其中:(U, C)为一个信息系统,C称为条件属性集,$d \notin C$为决策属性,由决策属性d诱导的不可分辨关系为

$$R_d = \{(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in U, d(x_1) = d(x_2)\}. \tag{3}$$

不失一般性,假设$V_d = \{1, 2, \ldots, s\}$,则$R_d$将论域$U$划分为两两不相交的决策类,有

$$U/R_d = \{D_1, D_2, \ldots, D_s\} = \{[x]_d|x \in U\}, \tag{4}$$

其中$D_j = \{x \in U|d(x) = j\}(j = 1, 2, \ldots, s)$. 将$U/R_d$简记为$\pi_d$.

对象x的决策为j当且仅当$[x]_d = D_j$, D_j称为对象x的决策类. 若$R_C \subseteq R_d$,则称该决策系统S是协调的;否则,称S是不协调的.

对于协调决策系统$S=(U,C\bigcup\{d\}),B\subseteq C$,若$B$满足: 1) $[x]_B\subseteq[x]_d,\forall x\in U$; 2) $\forall r\in B,\exists x\in U$, $[x]_{B-\{r\}}\nsubseteq[x]_d$. 则称$B$是决策系统$S$的一个约简.

1.2　多尺度信息系统

一个多尺度信息系统[11]为一个二元组(U,A). 其中: $U=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$为非空有限对象集,称为论域; $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$为非空有限属性集,且每个属性均是多尺度属性. 若所有属性均具有I个相同的尺度等级,则一个多尺度信息系统可表示为$(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I,\ j=1,2,\dots,m\})$. 其中: $a_j^k:U\longrightarrow V_j^k$, V_j^k为属性a_j在第k个尺度标记下的值域. 对于$j=1,2,\dots,m,k=1,2,\dots,I_{j-1}$,存在满射$g_j^{k,k+1}:V_j^k\longrightarrow V_j^{k+1}$,使得$a_j^{k+1}=g_j^{k,k+1}\circ a_j^k$,称映射$g_j^{k,k+1}$为信息粒度变换.

记$A^k=\{a_j^k|j=1,2,\dots,m\}(k=1,2,\dots,I)$,则一个多尺度信息系统$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I,\ j=1,2,\dots,m\})$可分解为$I$个信息系统$S=(U,A^k)(k=1,2,\dots,I)$.

称$(U,C\bigcup\{d\})$为一个多尺度决策系统. 其中: $(U,C)=(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I,\ j=1,2,\dots,m\})$为一个多尺度信息系统; 决策属性$d$为一个单尺度标记属性,且$d\notin\{a_j^k|k=1,2,\dots,I,\ j=1,2,\dots,m\}$, $d:U\longrightarrow V_d$, V_d为决策属性d的值域.

设$S=(U,A)$为一个多尺度信息系统,若其中每个属性均是多尺度属性,且不同的属性具有不同的尺度个数,则称S为一个广义多尺度信息系统[12]. 设属性a_j具有I_j个尺度等级标记,则一个广义多尺度信息系统可表示为$(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I_j,\ j=1,2,\dots,m\})$. 其中: $a_j^k:U\longrightarrow V_j^k$, V_j^k为属性a_j在第k个尺度标记等级下的值域; 对于$j=1,2,\dots,m,k=1,2,\dots,I_{j-1}$,存在满射$g_j^{k,k+1}:V_j^k\longrightarrow V_j^{k+1}$,使得$a_j^{k+1}=g_j^{k,k+1}\circ a_j^k$,称$g_j^{k,k+1}$为信息粒度变换.

对于广义多尺度信息系统$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I_j,\ j=1,2,\dots,m\})$,若属性$a_j\in A$取第$l_j$个尺度标记$(1\leqslant l_j\leqslant I_j),j=1,2,\dots,m$,记$L=(l_1,l_2,\dots,l_m)$,则称$L$为系统$S=(U,A)$的一个尺度组合[12],记系统$S$的全体尺度组合为$\mathcal{L}$,则系统$S$的每个尺度组合$L=(l_1,l_2,\dots,l_m)$对应一个完备的信息系统$S^L=(U,A^L)$,其中$A^L=\{a_1^{l_1},a_2^{l_2},\dots,a_m^{l_m}\}$.

定义1[12]　设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I_j,\ j=1,2,\dots,m\})$为一个广义多尺度信息系统, $L_1=(l_1^1,l_2^1,\dots,l_m^1)\in\mathcal{L}$, $L_2=(l_1^2,l_2^2,\dots,l_m^2)\in\mathcal{L}$,若对于$\forall j\in\{1,2,\dots,m\}$,均有$l_j^1\leqslant l_j^2$,则称尺度组合$L_1$细于$L_2$,或称$L_2$粗于$L_1$,记作$L_1\preccurlyeq L_2$. 若$L_1\preccurlyeq L_2$,且存在$j\in\{1,2,\dots,m\}$,使得$l_j^1<l_j^2$,则称尺度组合$L_1$严格细于$L_2$,或称$L_2$严格粗于$L_1$,记作$L_1\prec L_2$.

对于$L_1\in\mathcal{L},L_2\in\mathcal{L}$,若满足$L_1\preccurlyeq L_2$或$L_1\succcurlyeq L_2$,则称$L_1$与$L_2$可比较; 否则,称$L_1$与$L_2$不可比较.

定理1[12]　设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I_j,\ j=1,2,\dots,m\})$为一个广义多尺度信息系统, $L_1=(l_1^1,l_2^1,\dots,l_m^1)\in\mathcal{L}$, $L_2=(l_1^2,l_2^2,\dots,l_m^2)\in\mathcal{L}$,定义

$$L_1\bigvee L_2=(l_1^1\bigvee l_1^2,l_2^1\bigvee l_2^2,\dots,l_m^1\bigvee l_m^2),\tag{5}$$

$$L_1\bigwedge L_2=(l_1^1\bigwedge l_1^2,l_2^1\bigwedge l_2^2,\dots,l_m^1\bigwedge l_m^2).\tag{6}$$

其中

$$l_j^1\bigvee l_j^2=\max\{l_j^1,l_j^2\},$$
$$l_j^1\bigwedge l_j^2=\min\{l_j^1,l_j^2\},$$
$$j=1,2,\dots,m,$$

则$L_1\preccurlyeq L_2\Leftrightarrow L_1\bigwedge L_2=L_1\Leftrightarrow L_1\bigvee L_2=L_2$,且$(L,\preccurlyeq,\bigwedge,\bigvee)$为一个完备格,其最大元为$(I_1,I_2,\dots,I_m)$,最小元为$(1,1,\dots,1)$.

设$S=(U,A)=(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I_j,\ j=1,2,\dots,m\})$为一个广义多尺度信息系统, $B\subseteq A$, $L=(l_1^1,l_2^1,\dots,l_m^1)\in\mathcal{L}$,记$L_B$为尺度组合$L$在属性子集$B$上的限制. 若$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B=\{a_1,a_4\}$, $L=(3,2,2,1)$,则$L_B=(3,1)$.

称$S=(U,C\bigcup\{d\})=(U,\{a_j^k|k=1,2,\dots,I_j,\ j=1,2,\dots,m\}\bigcup\{d\})$为一个广义多尺度决策系统. 其中: (U,C)为一个广义多尺度信息系统; $d\notin\{a_j^k|k=1,2,\dots,I_j,j=1,2,\dots,m\}$为一个单尺度标记属性, $d:U\longrightarrow V_d$, V_d为决策属性d的值域.

设B^L为广义多尺度决策系统在尺度组合L下属性集C的子集,记S中最细的尺度组合为L_0,显然有$L_0\preccurlyeq L$对于$\forall L\in\mathcal{L}$成立. 在最细尺度$L_0=(1,1,\dots,1)$下的属性子集记为B^{L_0}. 若决策系统

$$S^{L_0}=(U,C^{L_0}\bigcup\{d\})=(U,\{a_j^1|j=1,2,\dots,m\}\bigcup\{d\})\tag{7}$$

是协调的,即$R_{C^{L_0}}\subseteq R_d$,则称S是协调的; 否则,称S是不协调的. 记$\partial_{C^L}(x)=\{d(y)|y\in[x]_{C^L}\}$为对象$x$在尺度组合$L$下的广义决策值,即对象$x$的等价类在尺度组合$L$下所有可能的决策值的集合,不难得到以下推论.

推论1　设$S^{L_0}=(U,C^{L_0}\bigcup\{d\})$为一个决策系统,则

$$R_{C^{L_0}}\subseteq R_d\Leftrightarrow\forall x\in U,\ |\partial_{C_0^L}(x)|=1.$$

2　三层思维下的决策系统

Zhang等[41]从三层理论出发,以对象、决策类和分类3个视角对决策系统的属性约简问题做出探讨,

本节介绍决策系统中三层思想的相关理论.

2.1 基本定义

定义 2[10] 记 π_C 为决策系统 $S=(U,C\bigcup\{d\})$ 中由属性集 C 导出的等价关系对于论域 U 的划分,则 S 中决策类 D_j 关于划分 π_C 的正域、负域和边界域分别定义如下:

$$\mathrm{POS}\,(D_j|\pi_C)=\{x\in U|[x]_C\subseteq D_j\}; \tag{8}$$

$$\mathrm{NEG}\,(D_j|\pi_C)=\{x\in U|[x]_C\subseteq D_j^c\},\ D_j^c=U-D_j; \tag{9}$$

$$\mathrm{BND}\,(D_j|\pi_C)=$$
$$\{x\in U|[x]_C\bigcap D_j\neq\varnothing,[x]_C\bigcap D_j^c\neq\varnothing\}. \tag{10}$$

记

$$\mathrm{POS}\,(\pi_d|\pi_B)=\bigcup_{j=1}^{s}\mathrm{POS}(D_j|\pi_B),\ B\subseteq C. \tag{11}$$

2.2 属性约简的层次关系

文献[41]采用了3种属性约简刻画单尺度决策系统 $S=(U,C\bigcup\{d\})$,具体如下.

1) 对象属性约简(object-specific attribute reduct),对象 $x\in U$ 的所有对象属性约简 $\mathrm{RED}\,(x)=\{B\subseteq C|[x]_B\subseteq[x]_d$, 且 $\forall r\in B,[x]_{B-\{r\}}\nsubseteq[x]_d\}$.

2) 决策类属性约简(class-specific attribute reduct),决策类 $D_j\in\pi_d$ 的所有决策类属性约简 $\mathrm{RED}\,(D_j)=\{B\subseteq C|\forall x\in D_j,[x]_B\subseteq[x]_d$, 且 $\forall r\in B$, $[x]_{B-\{r\}}\nsubseteq[x]_d\}$.

3) 分类属性约简(classification-specific attribute reduct),单尺度决策系统 S 的分类属性约简 $\mathrm{RED}\,(\pi_d)=\{B\subseteq C|\forall x\in U,[x]_B\subseteq[x]_d$, 且 $\forall r\in B,\exists y\in U$, 使得 $[y]_{B-\{r\}}\nsubseteq[y]_d\}$.

全体对象属性约简、决策类属性约简和分类属性约简分别构成 S 中属性约简的对象层、决策类层和分类层. 对象层与决策类层间的关系由定理2和定理3给出.

定理 2[41] 设 $S=(U,C\bigcup\{d\})$ 为一个决策系统, $D_j\in\pi_d$, $B\in\mathrm{RED}\,(D_j)$, 则对于 $\forall x\in\mathrm{POS}\,(D_j|\pi_C)$, $\exists B'\in\mathrm{RED}\,(x)$, 使得 $B'\subseteq B$.

定理 3[41] 设 $S=(U,C\bigcup\{d\})$ 为一个决策系统, $D_j\in\pi_d$, 对于任意的决策类约简 $B\in\mathrm{RED}\,(D_j)$, 存在一族对象约简 $\{B_{y_i}|B_{y_i}\in\mathrm{RED}\,(y_i),\ y_i\in\mathrm{POS}\,(D_j|\pi_C),i=1,2,\dots,r\}$, 使得 $B=\bigcup_{i=1}^{r}B_{y_i}$.

定理2和定理3表明对象层与决策类层的关系可概括如下:决策类属性约简可通过其所包含对象的对象属性约简取“$\bigcup$”运算得到. 决策类层与分类层的关系是相似的,即对象属性约简、决策类属性约简、分类属性约简3者从左到右可依次计算;反之,从右到左则一般不成立,这是因为存在不被任何决策类属性约简所包含的对象属性约简,称为盲点[41](“the 3rd blind spot”),如例1所示.

例 1 设 $S=(U,C\bigcup\{d\})$ 为一个决策系统. 其中: $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$, $C=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $V_d=\{1,2\}$. $D_1=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$ 和 $D_2=\{x_3,x_4,x_7\}$ 为两个决策类. 对象属性约简、决策类属性约简以及分类属性约简分别如表1所示.

表 1 例 1 中的属性约简

subject	RED
x_1	$\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\}$
x_2	$\{a_3\}$
x_3	$\{a_1\},\{a_2,a_4\}$
x_4	$\{a_4\}$
x_5	$\{a_3\},\{a_4\}$
x_6	$\{a_4\}$
x_7	$\{a_1,a_4\}$
D_1	$\{a_1,a_3\},\{a_3,a_4\}$
D_2	$\{a_1,a_4\}$
π_d	$\{a_1,a_3,a_4\}$

表1中对象属性约简、决策类属性约简、分类属性约简从下到上分别构成了 S 中属性约简的对象层、决策类层和分类层,如图1所示. 从下往上看,决策类属性约简可通过对象属性约简取“$\bigcup$”运算得到,分类属性约简可通过决策类属性约简取“$\bigcup$”运算得到.

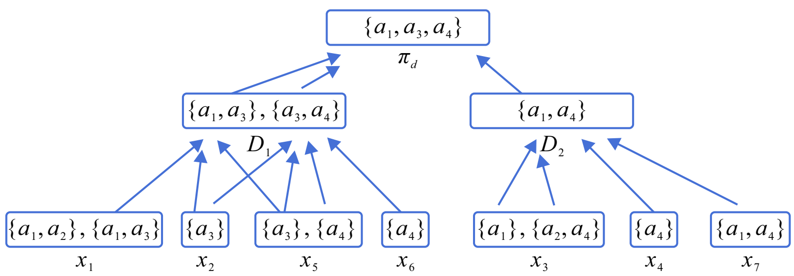

图 1 例 1 中属性约简的层次关系

注意到, $\{a_2,a_4\}\in \mathrm{RED}\,(x_3), x_3\in D_2$, 而 $\forall B\in \mathrm{RED}\,(D_2)$, 有 $\{a_2,a_4\}\not\subseteq B$, 即 $\{a_2,a_4\}$ 无法由 $\mathrm{RED}\,(D_2)$ 中的元素通过“$\bigcap$”和“$\bigcup$”运算得到,故由上往下时,对象属性约简一般无法全部由决策类属性约简通过删减属性得到.

3 不协调广义多尺度信息系统的层次关系

本节将三层思想应用于不协调广义多尺度决策系统中,讨论不协调广义多尺度决策系统中的最优尺度组合中的层次关系.

设 $S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统. $\partial_{C^{L_0}}(x)=\{d(y)|y\in[x]_{C^{L_0}}\}$ 为对象 $x\in U$ 在最细尺度 L_0 下的广义决策,在不至于引起混淆的情况下将 $\partial_{C^{L_0}}$ 简记为 ∂_C. 采用广义决策 ∂_C 代替原决策属性 d 得到一个新的广义多尺度决策系统,记为 $S_\partial=(U, C\bigcup\{\partial_C\})=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{\partial_C\})$,则易见, S_∂ 是协调的.

设 $S=(U,C\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统,定义由广义决策 ∂_C 诱导的不可分辨关系 $R_{\partial_C}=\{(x_1,x_2)|x_1,x_2\in U,\partial_C(x_1)=\partial_C(x_2)\}$.

记 $V_{\partial_C}=\{\partial_{C^{L_0}}(x)|x\in U\}$ 为广义决策 ∂_C 的值域. 若 $\partial_{C^{L_0}}(x)=\rho$,记 $\mathrm{GD}_\rho=\{y|\partial_{C^{L_0}}(y)=\rho\}$ 为对象 x 的广义决策类,则论域 U 被关系 R_{∂_C} 粒化为两两不相交的广义决策类 $U/R_{\partial_C}=\{\mathrm{GD}_{\rho_1},\mathrm{GD}_{\rho_2},\ldots,\mathrm{GD}_{\rho_t}\}$, 简记为 π_{∂_C}. U 中对象 x 关于关系 R_{∂_C} 的等价类为 $[x]_{\partial_C}=\{y\in U|(x,y)\in R_{\partial_C}\}$.

众所周知,最优尺度组合的选择是从不协调广义多尺度决策系统中进行知识获取的一个关键步骤. 以下从对象、广义决策类、分类3个层面讨论不协调广义多尺度决策系统中最优尺度组合的计算问题.

定义3 设 $S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统, $L\in\mathcal{L}$ 称为 S 的一个分类最优尺度组合,若满足: 1) $\mathrm{POS}\,(\pi_{\partial_C}|\pi_{C^L})=\mathrm{POS}\,(\pi_{\partial_C}|\pi_{C^{L_0}})$; 2) 对于 $\forall L_1\in\mathcal{L}$, $L_1\succ L$, 有 $\mathrm{POS}\,(\pi_{\partial_C}|\pi_{C^{L_1}})\neq\mathrm{POS}\,(\pi_{\partial_C}|\pi_{C^{L_0}})$. 其中 $\mathrm{POS}\,(\pi_{\partial_C}|\pi_{C^{L_0}})=\bigcup\limits_{\rho\in V_{\partial_C}}\mathrm{POS}\,(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L_0}})$. 记 S 所有分类最优尺度组合的集合为 $\mathrm{OOS}\,(\pi_{\partial_C})$.

定义4 设 $S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统, $\rho\in V_{\partial_C}, L\in\mathcal{L}$ 称为广义决策类 GD_ρ 的一个最优尺度组合,若满足: 1) $\mathrm{POS}\,(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^L})=\mathrm{POS}\,(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L_0}})$; 2) 对于 $\forall L_1\in\mathcal{L}, L_1\succ L$, 有 $\mathrm{POS}\,(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L_1}})\neq\mathrm{POS}\,(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L_0}})$. 则记广义决策类 GD_ρ 的最优尺度组合的集合为 $\mathrm{OOS}\,(\mathrm{GD}_\rho)$.

定义5 设 $S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统, $x\in U, L\in\mathcal{L}$ 称为对象 x 的一个最优尺度组合, 若满足: 1) $[x]_{C^L}\subseteq[x]_{\partial_C}$; 2) 对于 $\forall L_1\in\mathcal{L}, L_1\succ L$, 有 $[x]_{C^{L_1}}\not\subseteq[x]_{\partial_C}$. 则记对象 x 的最优尺度组合的集合为 $\mathrm{OOS}\,(x)$.

$\{\mathrm{OOS}\,(x)|x\in U\}$、$\{\mathrm{OOS}\,(\mathrm{GD}_\rho)|\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}\}$ 和 $\mathrm{OOS}\,(\pi_{\partial_C})$ 分别构成了不协调广义多尺度决策系统中最优尺度组合的对象层、广义决策类层和分类层. 广义决策类层与对象层的关系由定理4给出.

定理4 设 $S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统, $\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}$, 记 $\mathrm{GD}_\rho/R_C=\{[x]_C|x\in\mathrm{GD}_\rho\}$, 记 GD_ρ 中等价类的个数为 $p=|\mathrm{GD}_\rho/R_C|$, 定义 GD_ρ 的分解集合 $S_{\mathrm{GD}_\rho}=\{y_i|i=1,2,\ldots,p,\bigcup\limits_{i=1}^{p}[y_i]_C=\mathrm{GD}_\rho, [y_i]_C\bigcap[y_j]_C=\varnothing(i\neq j)\}$(即 GD_ρ/R_C 的代表类), 则 $\forall L\in\mathrm{OOS}\,(\mathrm{GD}_\rho)$, $\exists L_i\in\mathrm{OOS}\,(y_i)$, 其中 $y_i\in S_{\mathrm{GD}_\rho}$, 使得 $L_1\bigwedge L_2\bigwedge\ldots\bigwedge L_p=L$.

证明 由于 $L\in\mathrm{OOS}\,(\mathrm{GD}_\rho)$, 对于 $\forall y_i\in S_{\mathrm{GD}_\rho}(i=1,2,\ldots,p)$, 有 $[y_i]_{C^L}\subseteq[y_i]_{\partial_C}$, 即 $\exists L_i'\in\mathrm{OOS}\,(y_i)$, 使得 $L\preccurlyeq L_i'$; 令 $L'=\bigwedge\limits_{i=1}^{p}L_i'$, 则 $L\preccurlyeq L'$, 且 $\mathrm{POS}\,(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L'}})=\mathrm{POS}\,(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L_0}})$, 则 $L\succcurlyeq L'$, 从而 $L=L'$, 取 $L_i=L_i'$. □

推论2 设 $S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统, $x_i\in U, \mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}$, 对于 $\forall L_i\in\mathrm{OOS}\,(x_i)$ 和 $L\in\mathrm{OOS}\,(\mathrm{GD}_\rho)$, 若 L 与 L_i 是可比较的, 则 $L_i\succcurlyeq L$.

定理4和推论2表明,最优尺度组合的对象层与广义决策类层间同样存在层次关系,即广义决策类最优尺度均可由对象最优尺度组合作“$\bigwedge$”运算得到;反之,由于并非每个对象最优尺度组合均存在相应的广义决策类最优尺度组合与之可比较粗细,一般不能由广义决策类最优尺度组合计算得到全体对象最优尺度组合.

下面引入属性约简诱导的最优尺度组合,讨论保持最细尺度下属性约简不变的最优尺度组合中的层次关系.

首先给出不协调广义多尺度决策系统中对象属性约简和广义决策类属性约简的定义.

定义6 设 $S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$ 为一个不协调广义多尺度决策系统, $x\in U, \mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}$, x 的所有对象属性约简记为 $\mathrm{RED}\,(x)=\{B\subseteq C|[x]_B\subseteq[x]_{\partial_C},\forall r\in B,[x]_{B-\{r\}}\not\subseteq[x]_{\partial_C}\}$, 在不至于引起混淆的情况下, $\mathrm{RED}\,(x)$ 中的元素也称为 x 的一个属性约简.

广义决策类 $\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}$ 的所有广义决策类属性约简记为 $\mathrm{RED}\,(\mathrm{GD}_\rho)=\{B\subseteq C|\forall x\in\mathrm{GD}_\rho,[x]_B\subseteq$

$[x]_{\partial_C}$, 且$\forall r\in B, [x]_{B-\{r\}}\nsubseteq[x]_{\partial_C}\}$. 在不至于引起混淆的情况下, RED(GD$_\rho$)中的元素也称为GD$_\rho$的一个属性约简.

记RED$(x|L)$为对象x在尺度组合L下属性约简构成的集合, 对象x在最细尺度下L_0的属性约简的集合恒记为RED(x).

定义7 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, $x\in U, B\in \mathrm{RED}(x), L\in\mathcal{L}$, 若$L$满足: 1) $[x]_{B^L}\subseteq[x]_{\partial_C}$; 2) 对于$\forall L'\in\mathcal{L}$, 满足$L'_B\succ L_B$, 有$[x]_{B'}\nsubseteq[x]_{\partial_C}$. 则称$L$为对象$x$由属性约简$B$诱导的一个最优尺度组合, 记$x$由属性约简$B$诱导的所有最优尺度组合的集合为OOS$(x|B)$.

定义8 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, $\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}, B\in\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_\rho), L\in\mathcal{L}$, 若$L$满足: 1) $\mathrm{POS}(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^L})=\mathrm{POS}(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L_0}})$; 2) 对于$\forall L'\in\mathcal{L}$, 满足$L'_B\succ L_B$, 有$\mathrm{POS}(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L'}})\neq\mathrm{POS}(\mathrm{GD}_\rho|\pi_{C^{L_0}})$. 则称$L$为GD$_\rho$由属性约简$B$诱导的一个最优尺度组合, 记GD$_\rho$由属性约简$B$诱导的所有最优尺度组合的集合为OOS$(\mathrm{GD}_\rho|B)$.

推论3 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, $x_i\in U, B\in\mathrm{RED}(x_i), L\in\mathrm{OOS}(x_i|B)$, 有:

1) 对于$\forall L'\in\mathcal{L}$, 若$L'_B\preccurlyeq L_B$, 则$[x_i]_{C^{L'}}\subseteq[x_i]_{\partial_C}$;

2) 当$L'_B=L_B$时, $[x_i]_{C^{L'}}=[x_i]_{\partial_C}$.

推论3表明, 给定任意$L\in\mathrm{OOS}(x|B)$, 任意改变L中属性约简B外的属性尺度, 不会影响x的广义决策, 即对于属性约简诱导的最优尺度组合, 可忽略属性约简外的属性尺度变化带来的影响.

定义9 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, 定义$F_j:\mathcal{L}\longrightarrow\{l_j^k|k=1,2,\ldots,I_j\}(j=1,2,\ldots,m)$为尺度组合的取值函数, 即若$L=(l_1,l_2,\ldots,l_m)\in\mathcal{L}$, 则$F_j(L)=l_j(j=1,2,\ldots,m)$.

由于属性约简外的属性不影响属性约简诱导的最优尺度组合, 为了便于讨论, 给出如下定义.

定义10 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, $x\in U, B\in\mathrm{RED}(x)$, 对于$\forall L=(l_1,l_2,\ldots,l_m)\in\mathrm{OOS}(x|B)$, 若$\exists\bar{L}=(l'_1,l'_2,\ldots,l'_m)\in\mathcal{L}$满足: 1) $l'_i=I_i$, 若$a_i\in C-B$; 2) $l'_i=F_i(L)$, 若$a_i\in B$. 则称$\bar{L}$为x关于属性约简B的一个关键尺度组合, x关于属性约简B的全体关键尺度组合记为KV$(x|B)$, x的全体关键尺度组合的集合记为

$$\mathrm{KV}(x)=\bigcup_{B\in\mathrm{RED}(x)}\mathrm{KV}(x|B).\tag{12}$$

定义11 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, $\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}, B\in\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_\rho)$, 对于$\forall L=(l_1,l_2,\ldots,l_m)\in\mathrm{OOS}(x|B)$, 若$\exists\bar{L}=(l'_1,l'_2,\ldots,l'_m)\in\mathcal{L}$满足: 1) $l'_i=I_i$, 若$a_i\in C-B$; 2) $l'_i=F_i(L)$, 若$a_i\in B$. 则称$\bar{L}$为GD$_\rho$关于属性约简B的一个关键尺度组合, GD$_\rho$关于属性约简B的全体关键尺度组合记为KV$(\mathrm{GD}_\rho|B)$, GD$_\rho$的全体关键尺度组合的集合记为

$$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho)=\bigcup_{B\in\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_\rho)}\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B).\tag{13}$$

$\{\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho)|\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}\}$和$\{\mathrm{KV}(x)|x\in U\}$分别构成了不协调广义多尺度决策系统中关键尺度组合的广义决策类层和对象层.

由于广义决策类的关键尺度组合是由广义决策类属性约简导出的, 为了简化描述, 给出如下定义.

定义12 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, $\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}$, GD$_\rho$中等价类的个数$p=|\mathrm{GD}_\rho/R_C|$, S_{GD_ρ}为GD$_\rho$的分解集合. 对于$\forall B\in\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_\rho)$, 定义$B$的分解集合$T_B=\{(B_1,B_2,\ldots,B_p)|B_i\in\mathrm{RED}(y_i), y_i\in S_{\mathrm{GD}_\rho}, \bigcup_{i=1}^{p}B_i=B\}$, T_B中的元素称为B的一个分解. 对于$\forall\bar{B}=(B_1,B_2,\ldots,B_p)\in T_B$, 定义$G_{\bar{B}}=\{(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p)|\eta_i\in\mathrm{KV}(y_i|B_i), y_i\in S_{\mathrm{GD}_\rho}, i=1,2,\ldots,p\}$.

下面的定理5给出了不协调广义多尺度决策系统中关键尺度组合的广义决策类层与对象层的关系.

定理5 设$S=(U,\{a_j^k|k=1,2,\ldots,I_j,\ j=1,2,\ldots,m\}\bigcup\{d\})$为一个不协调广义多尺度决策系统, $\mathrm{GD}_\rho\in\pi_{\partial_C}, B\in\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_\rho)$, GD$_\rho$中等价类的个数$p=|\mathrm{GD}_\rho/R_C|$, S_{GD_ρ}为GD$_\rho$的分解集合, 对于$\forall\varepsilon\in\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B)$, $\exists\bar{B}=(B_1,B_2,\ldots,B_p)\in T_B$, 且存在$(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p)\in G_{\bar{B}}$, 记$\eta=\eta_1\bigwedge\eta_2\bigwedge\ldots\bigwedge\eta_p$, 使得$\varepsilon$与$\eta$是可比较的, 则$\varepsilon=\eta$.

证明 $\forall y_i\in S_{\mathrm{GD}_\rho}, B'_i\in\mathrm{RED}(y_i)(B'_i\subseteq B)$, 由于$\varepsilon\in\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B)$, 有$[y_i]_{B_i'^{\varepsilon}}=[y_i]_{\partial_C}$, 即$\exists\eta'_i\in\mathrm{KV}(y_i|B'_i)$, 使得$\eta'_i\succcurlyeq\varepsilon$, 进而对于$\forall\bar{B}=(B_1,B_2,\ldots,B_p)\in T_B$, 可得到$(\eta'_1,\eta'_2,\ldots,\eta'_p)\in G_{\bar{B}}$, 其中$\eta'_i\succcurlyeq\varepsilon$; 令$\eta=\eta'_1\bigwedge\eta'_2\bigwedge\ldots\bigwedge\eta'_p$, 有$\eta\succcurlyeq\varepsilon$. 又由于$\varepsilon\in\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B)$, 即$\eta\preccurlyeq\varepsilon$, 则$\varepsilon=\eta$. □

定理5表明, 给定不协调广义多尺度决策系统S, $B\in\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_\rho), \varepsilon\in\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B), \exists\bar{B}\in T_B$, 使得$\varepsilon$可通过$G_{\bar{B}}$计算得到, 即在不协调广义多尺度决策系统

中,关键尺度组合的广义决策类层可由对象层中元素作“$\bigwedge$”运算得到;反之,由广义决策类层一般不能计算得到全部的对象层,反例见后文例2.

基于定理5,算法1和算法2给出了关键尺度组合的广义决策类层与对象层间互相转化的计算步骤.

算法1　由$\mathrm{KV}(x_i)$计算$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$.

输入: $\mathrm{GD}_\rho, \{\mathrm{KV}(x_i)|x_i \in \mathrm{GD}_\rho\}, B_1 \in \mathrm{RED}\,(\mathrm{GD}_\rho), \{\mathrm{RED}\,(x_i)|x_i \in \mathrm{GD}_\rho\}$;

输出: $\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$.

step 1: 初始化$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)=\varnothing, p=|\mathrm{GD}_\rho/R_C|$.

step 2: 遍历GD_ρ中元素$x_i : S_{x_i}=\varnothing$.

step 3: 遍历$\mathrm{RED}\,(x_i)$中元素B:若有$B \subseteq B_1$,则计算$S_{x_i}=S_{x_i} \bigcup \mathrm{KV}(x_i|B)$.

step 4: 遍历$S_{x_1} \times S_{x_2} \times \ldots \times S_{x_p}$中元素$\eta$:若$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho)$中存在比$\eta$细的元素$\alpha$,则用$\eta$替换$\alpha$;否则,执行$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)=\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1) \bigcup \eta$.

step 5: 输出$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$.

算法1主要包括两个部分: 1) 遍历$\mathrm{RED}\,(x_i)$构造S_{x_i},即step 2和step 3,这部分时间复杂度为$O\Big(\sum\limits_{x_i \in \mathrm{GD}_\rho} |\mathrm{RED}\,(x_i)|\Big)$; 2) 遍历$S_{x_1} \times S_{x_2} \times \ldots \times S_{x_p}$,得到$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$,即step 4,时间复杂度为$O\Big(\prod\limits_{i=1}^{p} |\mathrm{RED}\,(x_i)|\Big)$. 故算法1总的时间复杂度为$O\Big(\prod\limits_{i=1}^{p} |\mathrm{RED}\,(x_i)|\Big)$.

算法2　由$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$计算$\mathrm{KV}(x_j|B_2)$.

输入: $B_1 \in \mathrm{RED}\,(\mathrm{GD}_\rho), B_2 \in \mathrm{RED}\,(x_j) (B_2 \subseteq B_1), \mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$;

输出: $\mathrm{KV}(x_j|B_2)$.

step 1: 初始化$\mathrm{KV}(x_j|B_2)=\varnothing$.

step 2: 在$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$中任意取出一元素$\beta$,初始化$\alpha=(I_1, I_2, \ldots, I_m)$.

step 3: 赋值$F_i(\beta)=F_i(\alpha)$,其中i满足$a_i \notin B_2$.

step 4: 由粗到细遍历满足$\beta \preccurlyeq \eta \preccurlyeq \alpha$的关键尺度组合$\eta$:若$\eta$满足$\eta \in \mathrm{OOS}\,(x_j|B_2)$,则将$\eta$加入$\mathrm{KV}(x_j|B_2)$.

step 5: 若$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_\rho|B_1)$中元素已被遍历,则执行step 6;否则,执行step 2.

step 6: 输出$\mathrm{KV}(x_j|B_2)$.

在算法2中, step 3中的时间复杂度为$O(m)$,其中m为属性个数,主要的计算量为step 4中在上界为α和下界为β的格结构中搜索关键尺度组合η,这部分时间复杂度为$O\Big(\prod\limits_{a_i \in B_2} I_i\Big)$,故总的时间复杂度为$O\Big(\prod\limits_{a_i \in B_2} I_i\Big)$.

下面通过例2表明对象关键尺度与广义决策类关键尺度间的计算方法.

例2　表2为一个不协调广义多尺度决策系统$S=(U, C \bigcup \{d\})$. 其中: $U=\{x_1, x_2, \ldots, x_{12}\}$; $C=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,属性a_1和a_4有3个尺度,属性a_2和a_3有2个尺度. 最后一列为系统在最细尺度$L_0=(1,1,1,1)$下的广义决策值.

表2　不协调广义多尺度决策系统

U	a_1			a_2		a_3		a_4			d	∂_C
	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_3^1	a_3^2	a_4^1	a_4^2	a_4^3		
x_1	2	A	g	3	优	1	N	4	M	B	1	$\{1,2\}$
x_2	2	A	g	3	优	1	N	4	M	B	2	$\{1,2\}$
x_3	1	A	g	4	优	2	P	4	M	B	1	$\{1\}$
x_4	0	C	b	3	优	3	P	2	M	B	1	$\{1\}$
x_5	0	C	b	4	优	3	P	3	M	B	3	$\{3\}$
x_6	3	B	g	2	良	1	N	0	L	W	2	$\{2\}$
x_7	2	A	g	0	良	1	N	5	H	W	2	$\{2\}$
x_8	2	A	g	2	良	1	N	5	H	W	3	$\{3\}$
x_9	4	B	g	1	良	1	N	4	M	B	1	$\{1\}$
x_{10}	3	B	g	3	优	2	P	4	M	B	3	$\{3\}$
x_{11}	1	A	g	0	良	0	N	4	M	B	2	$\{2\}$
x_{12}	0	C	b	0	良	0	N	1	L	W	2	$\{2\}$

以广义决策类$\mathrm{GD}_{\{3\}}=\{x_5, x_8, x_{10}\}$为例,对象$x_5$、$x_8$、$x_{10}$在$L_0$尺度下的对象约简如下式所示:

$$\mathrm{RED}\,(x_5)=\{\{a_1, a_2\}, \{a_4\}, \{a_2, a_3\}\},$$

$$\mathrm{RED}\,(x_8)=\{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_4\}\},$$

$$\mathrm{RED}\,(x_{10})=\{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}\}.$$

$\mathrm{GD}_{\{3\}}$在L_0尺度组合下的广义决策类约简$\mathrm{RED}\,(\mathrm{GD}_{\{3\}})=\{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3, a_4\}\}$.

对象x_5、x_8、x_{10}的关键尺度组合如下式所示:

$$\mathrm{KV}(x_5|\{a_1,a_2\})=\{(3,1,I_3,I_4)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_5|\{a_2,a_3\})=\{(I_1,1,1,I_4)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_5|\{a_4\})=\{(I_1,I_2,I_3,1)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_8|\{a_1,a_2\})=\{(2,1,I_3,I_4)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_8|\{a_2,a_4\})=\{(I_1,1,I_3,2)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_{10}|\{a_1,a_2\})=\{(2,2,I_3,I_4)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_{10}|\{a_1,a_3\})=\{(2,I_2,2,I_4)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_{10}|\{a_1,a_4\})=\{(1,I_2,I_3,3)\},$$

$$\mathrm{KV}(x_{10}|\{a_2,a_3\})=\{(I_1,1,1,I_4)\}.$$

由$\mathrm{KV}(x_5)$、$\mathrm{KV}(x_8)$、$\mathrm{KV}(x_{10})$计算$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_{\{3\}})$的过程如下.

对于$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_{\{3\}}|\{a_2,a_3,a_4\})$:

1) 考虑 $\mathrm{RED}(x_5)$ 中有: $\{a_4\},\{a_2,a_3\}\in\mathrm{RED}(x_5)$; $\{a_4\},\{a_2,a_3\}\subseteq\{a_2,a_3,a_4\}$.

2) $\mathrm{RED}(x_8)$中有$\{a_2,a_4\}\in\mathrm{RED}(x_8)$, $\{a_2,a_4\}\subseteq\{a_2,a_3,a_4\}$.

3) $\mathrm{RED}(x_{10})$中有$\{a_2,a_4\}\subseteq\{a_2,a_3,a_4\}$, $\{a_2,a_3\}\subseteq\{a_2,a_3,a_4\}$.

记

$$S_{x_5}=\mathrm{KV}(x_5|\{a_1,a_2\})\bigcup\mathrm{KV}(x_5|\{a_4\})=$$
$$\{(3,1,I_3,I_4),(I_1,I_2,I_3,1)\},$$

$$S_{x_8}=\{\mathrm{KV}(x_8|\{a_2,a_4\})\}=\{(I_1,1,I_3,2)\},$$

$$S_{x_{10}}=\{\mathrm{KV}(x_{10}|\{a_2,a_3\})\}=\{(I_1,1,1,I_4)\},$$

则$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_{\{3\}}|\{a_2,a_3,a_4\})$可能的取值有

$$(3,1,I_3,I_4)\bigwedge(I_1,1,I_3,2)\bigwedge(I_1,1,1,I_4)=(3,1,1,2),$$

$$(I_1,I_2,I_3,1)\bigwedge(I_1,1,I_3,2)\bigwedge(I_1,1,1,I_4)=$$
$$(I_1,1,1,2).$$

由$(3,1,1,2)=(I_1,1,1,2)$,有$(I_1,1,1,2)\in\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_{\{3\}}|\{a_2,a_3,a_4\})$.

由$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_{\{3\}})$计算$\mathrm{KV}(x_5)$的过程如下.

取$\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_{\{3\}})$的约简$\{a_2,a_3,a_4\}$,在$\mathrm{RED}(x_5)$中有$\{a_2,a_3,a_4\}\supset\{a_2,a_3\}$, $\{a_2,a_3,a_4\}\supset\{a_4\}$. 遍历满足$(I_1,1,1,I_4)\preccurlyeq\eta\preccurlyeq(I_1,I_2,I_3,I_4)$的尺度组合$\eta$,其中仅有$\eta=(I_1,1,1,I_4)$满足$[x_5]_{\{a_2,a_3\}^{\eta}}\subseteq[x_5]_{\partial_C}$,故$\mathrm{KV}(x_5|\{a_2,a_3\})=(I_1,1,1,I_4)$.

注意到,$\mathrm{KV}(x_5|\{a_4\})$中仅有一个元素$(I_1,I_2,I_3,1)$, $\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_{\{3\}})$ 中仅有 $\{a_2,a_3,a_4\}$ 包含 $\{a_4\}$, $\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_{\{3\}}|\{a_2,a_3,a_4\})$仅有一个元素$(I_1,1,1,2)$,且$F_4(I_1,1,1,2)=2$, $F_4(I_1,I_2,I_3,1)=1$,故通过遍历$(I_1,I_2,I_3,2)\preccurlyeq\eta\preccurlyeq(I_1,I_2,I_3,I_4)$的方式无法得到$(I_1,I_2,I_3,1)$,即不能通过$\mathrm{KV}(\mathrm{GD}_{\{3\}}|\{a_2,a_3,a_4\})$计算得到$\mathrm{KV}(x_5|\{a_4\})$,这是由于$\mathrm{RED}(\mathrm{GD}_{\{3\}})$中元素$\{a_2,a_3,a_4\}$中的属性$a_4$不来自$\mathrm{RED}(x_5)$中的$\{a_4\}$,而是来自$\mathrm{RED}(x_8)$中的$\{a_2,a_4\}$.

4 结 论

本文将文献[41]的三层思想应用于不协调广义多尺度决策系统的最优尺度组合选择研究中,通过给出由对象最优尺度组合、广义决策类最优尺度组合和分类最优尺度组合组成的3层结构,得到了对象层与决策类层间的转化关系,即全体广义决策类最优尺度组合可由对象最优尺度组合作“$\bigwedge$”运算得到. 进一步地,本文通过定义关键尺度组合的概念,讨论了不协调广义多尺度决策系统中属性约简诱导的最优尺度组合,得到了相应的层次结构和转化关系,即广义决策类的关键尺度组合可由对象的关键尺度组合作“$\bigwedge$”运算得到. 这种转化关系提供了不同层级的关键尺度组合间的计算方法,为不协调广义多尺度决策系统的粗糙集数据分析提供了新视角.

在后续的研究中,一方面可以研究在其他局部最优尺度组合意义下的层次关系,另一方面可在不同类型的数据集中结合三层关系研究IF-THEN决策规则提取等问题.

参考文献(References)

[1] 梁吉业, 钱宇华, 李德玉, 等. 大数据挖掘的粒计算理论与方法[J]. 中国科学: 信息科学, 2015, 45(11): 1355-1369.
(Liang J Y, Qian Y H, Li D Y, et al. Theory and method of granular computing for big data mining[J]. Scientia Sinica: Informationis, 2015, 45(11): 1355-1369.)

[2] Chen C L P, Zhang C Y. Data-intensive applications, challenges, techniques and technologies: A survey on big data[J]. Information Sciences, 2014, 275: 314-347.

[3] 苗夺谦, 张清华, 钱宇华, 等. 从人类智能到机器实现模型——粒计算理论与方法[J]. 智能系统学报, 2016, 11(6): 743-757.
(Miao D Q, Zhang Q H, Qian Y H, et al. From human intelligence to machine implementation model: Theories and applications based on granular computing[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2016, 11(6): 743-757.)

[4] 徐计, 王国胤, 于洪. 基于粒计算的大数据处理[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1497-1517.
(Xu J, Wang G Y, Yu H. Review of big data processing

based on granular computing[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8): 1497-1517.)

[5] Pedrycz W. Granular computing: An introduction[C]. Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569). Vancouver, 2002: 1349-1354.

[6] Yao Y Y. Granular computing: Basic issues and possible solutions[C]. Proceedings of the 5th Joint Conference on Computing and Information. Durham: Duke University Press, 2000: 186-189.

[7] 陈德刚, 徐伟华, 李金海, 等. 粒计算基础教程[M]. 北京: 科学出版社, 2019: 1-126.
(Chen D G, Xu W H, Li J H, et al. Basic course of granular computing[M]. Beijing: Science Press, 2019: 1-126.)

[8] 苗夺谦, 王国胤, 刘清, 等. 粒计算: 过去、现在与展望[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 1-373.
(Miao D Q, Wang G Y, Liu Q, et al. Granular computing: Past, present and future[M]. Beijing: Science Press, 2007: 1-373.)

[9] 庞继芳, 宋鹏, 梁吉业. 面向决策分析的多粒度计算模型与方法综述[J]. 模式识别与人工智能, 2021, 34(12): 1120-1130.
(Pang J F, Song P, Liang J Y. Review on multi-granulation computing models and methods for decision analysis[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(12): 1120-1130.)

[10] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991: 1-224.

[11] Wu W Z, Leung Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3878-3897.

[12] Li F, Hu B Q. A new approach of optimal scale selection to multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2017, 381: 193-208.

[13] Wu W Z, Leung Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(8): 1107-1129.

[14] 吴伟志, 陈超君, 李同军, 等. 不协调多粒度标记决策系统最优粒度的对比[J]. 模式识别与人工智能, 2016, 29(12): 1095-1103.
(Wu W Z, Chen C J, Li T J, et al. Comparative study on optimal granularities in inconsistent multi-granular labeled decision systems[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2016, 29(12): 1095-1103.)

[15] Hao C, Li J H, Fan M, et al. Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions[J]. Information Sciences, 2017, 415/416: 213-232.

[16] Xie J P, Yang M H, Li J H, et al. Rule acquisition and optimal scale selection in multi-scale formal decision contexts and their applications to smart city[J]. Future Generation Computer Systems, 2018, 83: 564-581.

[17] Cheng Y L, Zhang Q H, Wang G Y, et al. Optimal scale selection and attribute reduction in multi-scale decision tables based on three-way decision[J]. Information Sciences, 2020, 541: 36-59.

[18] Zhang X Q, Zhang Q H, Cheng Y L, et al. Optimal scale selection by integrating uncertainty and cost-sensitive learning in multi-scale decision tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(5): 1095-1114.

[19] Zheng J W, Wu W Z, Bao H, et al. Evidence theory based optimal scale selection for multi-scale ordered decision systems[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2022, 13(4): 1115-1129.

[20] 苑红星, 卓雪雪, 竺德, 等. 基于矩阵的混合型邻域决策粗糙集增量式更新算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1621-1631.
(Yuan H X, Zhuo X X, Zhu D, et al. Incremental updating algorithms of neighborhood decision-theoretic rough set model for hybrid data based on matrix[J]. Control and Decision, 2022, 37(6): 1621-1631.)

[21] Huang B, Li H X, Feng G F, et al. Double-quantitative rough sets, optimal scale selection and reduction in multi-scale dominance IF decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 130: 170-191.

[22] Li F, Hu B Q, Wang J. Stepwise optimal scale selection for multi-scale decision tables via attribute significance[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 129: 4-16.

[23] 吴伟志, 庄宇斌, 谭安辉, 等. 不协调广义多尺度决策系统的尺度组合[J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(6): 485-494.
(Wu W Z, Zhuang Y B, Tan A H, et al. Scale combinations in inconsistent generalized multi-scale decision systems[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 485-494.)

[24] Wu W Z, Leung Y. A comparison study of optimal scale combination selection in generalized multi-scale decision tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(5): 961-972.

[25] Bao H, Wu W Z, Zheng J W, et al. Entropy based optimal scale combination selection for generalized multi-scale information tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2021, 12(5): 1427-1437.

[26] She Y H, Zhao Z J, Hu M T, et al. On selection of optimal cuts in complete multi-scale decision tables[J]. Artificial Intelligence Review, 2021, 54(8): 6125-6148.

[27] 吴伟志, 孙钰, 王霞, 等. 不协调广义多尺度决策系统

的局部最优尺度组合选择[J]. 模式识别与人工智能, 2021, 34(8): 689-700.
(Wu W Z, Sun Y, Wang X, et al. Local optimal scale combination selections in inconsistent generalized multi-scale decision systems[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(8): 689-700.)

[28] 张清华, 张雪秋, 庞国弘. 多尺度决策系统中代价敏感的最优尺度组合[J]. 控制与决策, 2021, 36(10): 2369-2378.
(Zhang Q H, Zhang X Q, Pang G H. Cost-sensitive optimal scale combination in multi-scale decision systems[J]. Control and Decision, 2021, 36(10): 2369-2378.)

[29] Zhu Y J, Yang B. Optimal scale combination selection for inconsistent multi-scale decision tables[J]. Soft Computing, 2022, 26(13): 6119-6129.

[30] 陈应生, 李进金, 林荣德, 等. 多尺度集值决策信息系统[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 455-463.
(Chen Y S, Li J J, Lin R D, et al. Multi-scale set value decision information system[J]. Control and Decision, 2022, 37(2): 455-463.)

[31] Luo C, Li T R, Huang Y Y, et al. Updating three-way decisions in incomplete multi-scale information systems[J]. Information Sciences, 2019, 476: 274-289.

[32] Zhang Q H, Cheng Y L, Zhao F, et al. Optimal scale combination selection integrating three-way decision with hasse diagram[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(8): 3675-3689.

[33] Chen Y S, Li J H, Li J J, et al. A further study on optimal scale selection in dynamic multi-scale decision information systems based on sequential three-way decisions[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2022, 13(5): 1505-1515.

[34] 李金海, 贺建君. 多粒度形式背景的不确定性度量与最优粒度选择[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1299-1308.
(Li J H, He J J. Uncertainty measurement and optimal granularity selection for multi-granularity formal context[J]. Control and Decision, 2022, 37(5): 1299-1308.)

[35] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[36] Yao Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1080-1096.

[37] Deng J, Zhan J M, Xu Z S, et al. Regret-theoretic multiattribute decision-making model using three-way framework in multiscale information systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(6): 3988-4001.

[38] Huang X F, Zhan J M. TWD-R: A three-way decision approach based on regret theory in multi-scale decision information systems[J]. Information Sciences, 2021, 581: 711-739.

[39] Yao Y Y. Tri-level thinking: Models of three-way decision[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(5): 947-959.

[40] Zhang X Y, Gou H Y, Lv Z Y, et al. Double-quantitative distance measurement and classification learning based on the tri-level granular structure of neighborhood system[J]. Knowledge-Based Systems, 2021, 217: 106799.

[41] Zhang X Y, Yao Y Y. Tri-level attribute reduction in rough set theory[J]. Expert Systems with Applications, 2022, 190: 116187.

[42] Yao Y Y, Zhang X Y. Class-specific attribute reducts in rough set theory[J]. Information Sciences, 2017, 418/419: 601-618.

作者简介

曾华鑫 (1995−), 男, 硕士生, 从事粗糙集理论与粒计算等研究, E-mail: 940203748@qq.com;

吴伟志 (1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事粗糙集理论、粒计算与知识发现等研究, E-mail: wuwz@zjou.edu.cn.