



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



灰色欧拉优化模型及其应用

王安, 党耀国, 王俊杰

引用本文:

王安, 党耀国, 王俊杰. 灰色欧拉优化模型及其应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 2060–2068.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1772>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

时滞累积TDAGM($1, N, t$)模型及其在粮食生产中的应用

Time-delayed accumulative TDAGM($\{1, N, t\}$)

控制与决策. 2021, 36(8): 2002–2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering

控制与决策. 2021, 36(12): 2946–2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计

Distributed moving horizon estimation for stochastic uncertain system with packet dropouts and quantized measurements

控制与决策. 2021, 36(7): 1771–1778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1603>

一种基于深度学习的时间序列预测方法

A time series prediction method based on deep learning

控制与决策. 2021, 36(3): 645–652 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0809>

基于小波变换与差分变异BSO-BP算法的大坝变形预测

Dam deformation prediction based on wavelet transform and differential mutation BSO-BP algorithm

控制与决策. 2021, 36(7): 1611–1618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1431>

灰色欧拉优化模型及其应用

王安^{1,2}, 党耀国^{1†}, 王俊杰¹

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106;

2. 平顶山学院 数学与统计学院, 河南 平顶山 467002)

摘要: 针对一类具有近似幂函数特征的序列建模预测问题, 通过引入非齐次欧拉方程, 提出一种优化的灰色欧拉模型. 对该模型的建模机理、参数估计和时间响应式等进行研究, 讨论以误差平方和最小为目标, 对灰色欧拉模型的初始点进行优化, 研究灰色欧拉模型的 3 种基本形式和 3 种优化形式. 该模型能很好地拟合幂函数特征的序列, 拓展灰色预测理论的体系, 扩大灰色预测理论的应用范围. 最后, 利用中国能源消费量和幂函数拟合两个实例来测试模型的有效性, 结果表明, 所提出的新模型具有更好的拟合和预测精度.

关键词: GM(1,1) 模型; GEM(1,1) 模型; OSGEM(1,1) 模型; 最小二乘法

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1772

引用格式: 王安, 党耀国, 王俊杰. 灰色欧拉优化模型及其应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(6): 2060-2068.

An optimized grey Euler model and its applications

WANG An^{1,2}, DANG Yao-guo^{1†}, WANG Jun-jie¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China)

Abstract: Aiming at solving the predicting problems for the power function series, the grey Euler model (GEM(1,1)) with grey action optimization is proposed by introducing the nonhomogeneous Euler equation. The modeling mechanism, parameter estimation and the time response function are studied. The initial point of GEM(1,1) is optimized with the minimum of the square sum of the error as the target. And further studies on three basic forms and three optimized forms of the GEM(1,1) model are also discussed. Researches show that the OSGEM(1,1) model can fit the series of power function characteristics well, which expands the system of gray prediction theory and the application scope of gray prediction theory. Finally, in the case studies, the natural gas consumption of China and the fitting of the power function series data are adopted to test the effectiveness of this model, and the good results obtained show the effectiveness and practicality of the proposed optimization model.

Keywords: GM(1,1) model; GEM(1,1) model; OSGEM(1,1) model; least square method

0 引言

自 20 世纪 80 年代, 华中理工大学邓聚龙教授提出灰色系统理论以来, 灰色预测模型已成为该理论的主要研究方向之一. 该模型通过原始数据的累加与微分方程拟合, 得到累加数据的指数拟合模型, 用差分方程估计参数, 用微分方程描述系统的发展趋势, 对累加数据的预测值还原, 得到原始序列的预测结果, 进而得到系统的发展规律, 对系统的未来发展趋势做出科学的定量分析. 灰色预测模型结构简单、原

理清晰, 建模过程中不需要大量的样本数据, 因此, 灰色预测模型迅速在环境^[1]、能源^[2-3]、交通^[4]、经济^[5]和舆情分析^[6]等领域得到广泛应用.

随着灰色预测模型在实际中的广泛应用, 很多学者在模型拓展方面做了大量工作, 目前关于模型拓展的研究主要有以下 4 个方面.

1) GM(1,1) 模型及其系列拓展模型. 利用一阶线性微分方程, 构造累加序列的指数增长拟合模型. 如 Cui 等^[7] 构建了优化的 NGM 模型, 将 GM(1,1) 模

收稿日期: 2022-10-12; 录用日期: 2023-04-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(72271120, 72001107, 71771119, 72001093); 教育部人文社会科学研究青年基金项目(19YJC630167); 中国博士后科学基金项目(2020T130297, 2019M660119); 江苏省自然科学基金青年项目(BK20190426); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(NP2022104); 河南省软科学研究项目(212400410239).

责任编辑: 李登峰.

†通讯作者. E-mail: iamdangyg@163.com.

型右端的常数项修改为 bt ,并对微分方程的初值进行了优化. Zeng等^[8]提出了一种自适应的灰色预测模型SIGM,并对中国天然气需求进行预测. Ma等^[9]将GM(1,1)模型右端的常数项修改为时间的二次多项式累加,其本质是时间的三次多项式,设计了TDPGM(1,1)模型,对中国天然气消费进行预测并取得了较好的预测效果. 罗党等^[10]将GM(1,1)模型右端的常数项修改为时间 t 的 N 次多项式,构建了灰色GMP(1,1, N)模型. Wei等^[11]用GPMB(1,1, N)模型对中国人均用电量进行预测. Wang等^[12]对灰色GM(1,1)模型的初值进行优化,取得了较好的效果.

2) 离散灰色模型及其系列拓展模型. 利用等比数列的性质,构造累加序列呈指数组合增长的拟合模型. 如谢乃明等^[13]构建了离散GM(1,1)模型,分析了该模型的建模机理. Xie等^[14]研究了离散GM(1,1)模型的系列优化模型. 罗党等^[15]将离散GM(1,1)模型的常数项推广到时间的 N 次多项式,构建了DGMP(1,1, N)模型,并给出了模型阶数 N 取值的判定准则. 吴紫恒等^[16]研究了含时间幂次项灰色模型的建模机理,证明了该模型的部分性质.

3) 灰色Bernoulli模型及其系列拓展模型. 利用非线性微分方程,构造累加序列呈指数组合增长的拟合模型. 如Wu等^[17]将灰色Bernoulli模型右端常数修正为一次多项式,构建了NGM(1,1, k , c)模型. Zheng等^[18-19]构建了无偏灰色Bernoulli模型,并对中国的水力发电量进行预测,将灰色分数阶Bernoulli模型右端常数修正为一次多项式,构建了分数阶CFNHGBM(1,1, k)模型. Liu等^[20]将灰色分数阶Bernoulli模型右端常数修正为 N 次多项式,构建了分数阶WFNGBM(1,1, N)模型. Ma等^[21]设计了多变量的灰色NGBMC(1, n)模型,将单变量的灰色Bernoulli模型推广到多变量. Wang等^[22]设计了分数阶时滞的灰色Bernoulli模型. Xiao等^[23]对NGBM(1,1)模型的参数进行优化,构建了BC-NGBM(1,1)模型.

4) 灰色Riccati模型及其系列拓展模型. 利用特殊的非线性微分方程,构造累加序列呈对数组合增长的拟合模型. 如周伟杰等^[24]提出了灰色广义Verhulst模型,该模型结构就是后来发展起来的灰色Riccati模型. Xiao等^[25]将模型应用推广到交通预测方面. Zeng^[26]设计了离散灰色Riccati模型. Zhang等^[27]设计了FDFGRM模型,并用该模型对中国的天然气和水泥产量进行预测. Luo等^[28]在灰色Riccati模型的右端增加一个时滞项,构建了CCRGM(1,1)模

型,并在水电清洁能源消费预测中取得了较好的效果. Wu等^[29]对灰色Riccati模型的参数进行优化,给出了灰色Riccati模型的3种情况的解析式,并用该方法对中国的能源消费和核能消费进行预测. Gao等^[30]构建了分数阶灰色Riccati模型,该模型在碳排放预测中取得了较好的效果.

上述讨论的拓展的灰色预测模型提高了模型的预测精度,并在多个领域得到成功的应用. 灰色GM(1,1)系列模型和灰色离散系列模型主要研究原始序列累加呈指数增长的动力系统,灰色Bernoulli系列模型主要研究原始序列倒数的累加呈现指数增长的动力系统. 传统的灰色GM(1,1)模型其本质是利用原始序列累加的指数拟合,而指数函数受到凸函数的限制,当建模序列不满足凸函数变化特征时模拟精度可能较低,一般的时间序列很难满足凸函数的变化特征. 目前,对灰色模型的改进大多停留在常数系数微分方程的范围内,模型的结构相对固定,未改变模型内在累加的指数拟合建模原理,对各种数据的适应能力不强.

为了突破模型结构的限制,本文借助欧拉方程的结构,提出一种变系数微分方程作为白化方程的灰色欧拉模型. 首先得到累加序列为幂函数特征的时间响应式,突破了灰色模型的凸函数限制;然后,通过优化初值设计灰色欧拉优化模型,并给出初值优化的参数计算公式;最后,通过对中国能源消费量和幂函数特征数据实例进行模拟和预测分析,根据本文的模型检查指标,验证了灰色欧拉优化模型的性能.

1 灰色欧拉模型的构建

1755年,瑞士数学家L.欧拉在《流体运动的一般原理》一书中首次提出了欧拉方程,其结构如下: $x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$,该方程是运动微分方程,属于无黏性流体动力学中最重要的基本方程,该方程应用十分广泛. $xy' + ay = b$ 是一阶欧拉方程,该方程的解析解为 $y = C + Bx^{-a}$. 如图1所示,不同的参数 B 和 a 对应不同的曲线变化趋势. 图1是一阶欧拉方程的主要形式,这几种变化趋

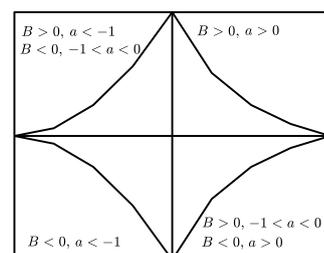


图1 欧拉方程的4种趋势

势可以很好地表示种群或新产品的发展过程,分别表示早期的稳定增长、中期快速增长、后期趋于稳定直至种群或产品的消亡过程.

灰色系统理论是用时间数据序列建立系统的动态模型,把原始数据序列经累加生成规律性较强的序列,对累加生成序列进行指数模拟建模. 本文基于欧拉方程,设计一种新的对累加生成序列进行幂函数组合模拟建模的方法.

定义1 令 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ 为非负序列,令 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ 为 $X^{(0)}$ 的1-AGO序列, $Z^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\}$,其中 $z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k) + (1 - \alpha)x^{(1)}(k - 1)$,一般情况下 $\alpha = 0.5$, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$,则称

$$kx^{(1)}(k) - (k - 1)x^{(1)}(k - 1) + (a - 1)z^{(1)}(k) = b \tag{1}$$

为灰色欧拉模型 (grey Euler model),简称 GEM(1,1)模型. 称

$$t \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \tag{2}$$

为灰色欧拉模型的白化方程.

方程(2)的两边同乘以 t^{a-1} ,可以得到 $\hat{x}^{(1)}(t) = b/a + [x^{(0)}(1) - b/a]t^{-a}$,简记为 $\hat{x}^{(1)}(t) = b/a + Bt^{-a}$,因此,该模型结构可以很好地描述如图1所示的种群或产品等时间序列的发展趋势.

GM(1,1)模型为 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$,其白化方程为 $dx^{(1)}(t)/dt + ax^{(1)}(t) = b$,白化方程的时间响应式为 $\hat{x}^{(1)}(t) = (x^{(1)}(1) + b/a)e^{-a(t-1)} + b/a$. 由GM(1,1)模型定义可以发现,其在建模机理和模型结构方面存在一些缺陷: 1)建模机理缺陷. 其白化方程为一阶常系数线性微分方程,存在理想化情况下的简化处理. 2)模型结构缺陷. GM(1,1)模型白化方程的时间响应式为指数函数,而指数函数是凸函数,因此限制了GM(1,1)模型的应用. 为了解决上述问题,本文构建白化方程为变系数的微分方程,时间响应式为幂函数的GEM(1,1)模型,由于幂函数结构本身具有凹函数和凸函数的特征,所构建的GEM(1,1)模型突破了灰色GM(1,1)时间响应式为凸函数的限制,拓展了GM(1,1)模型应用范围.

方程(1)是(2)的离散形式,方程(2)两边在区间 $[k - 1, k]$ 上取积分,可得

$$\int_{k-1}^k t \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = \int_{k-1}^k b dt.$$

等号右边等于 b ,等号左边是

$$kx^{(1)}(k) - (k - 1)x^{(1)}(k - 1) + (a - 1) \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt,$$

利用梯形公式可得

$$\int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt \approx z^{(1)}(k).$$

定理1 设 $X^{(0)}$ 、 $X^{(1)}$ 和 $Z^{(1)}$ 如定义1所述,并记 $a - 1 = a_1$,则灰色欧拉模型的最小二乘参数估计满足

$$\hat{u} = (\hat{a}_1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y, \tag{3}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2x^{(1)}(2) - x^{(1)}(1) \\ 3x^{(1)}(3) - 2x^{(1)}(2) \\ \vdots \\ nx^{(1)}(n) - (n - 1)x^{(1)}(n - 1) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

证明 令 $S = \|Y - Bu\|_2 = (Y - Bu)^T(Y - Bu)$,为了求最优的参数估计,选取 $Y - Bu$ 的二范数最小. 根据极值原理,只需满足 $\frac{\partial S}{\partial u} = 0$ 和二阶导数矩阵

$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}$ 正定,而

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u} &= \frac{\partial(Y - Bu)^T(Y - Bu)}{\partial u} = \\ &= \frac{\partial(Y^T Y - Y^T B u - u^T B^T Y + u^T B^T B u)}{\partial u} = \\ &= -2B^T Y + 2B^T B u. \end{aligned}$$

进一步,求得 $\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = (2B^T B)^T = 2B^T B$,显然 B 矩阵是列满秩的,因此 $\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}$ 是正定矩阵. 要使 S 最小,只需 $\frac{\partial S}{\partial u} = -2B^T Y + 2B^T B u = 0$,即 $\hat{u} = (B^T B)^{-1} B^T Y$,于是定理得证. \square

定理2 设 B 、 Y 、 $\hat{\mu}$ 如定理1所述, $\hat{u} = (\hat{a} - 1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$,则:

1) 假设 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$,有

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] k^{-a}. \tag{5}$$

2) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} x^{(0)}(1), & k = 1; \\ \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] [k^{-a} - (k - 1)^{-a}], & k \geq 2, k \in N. \end{cases} \tag{6}$$

称式(5)为初始点灰色欧拉模型时间响应式,称此时灰色欧拉模型为初始点灰色欧拉模型,简称 SGEM(1,1)模型.

证明 将式(2)左右两边乘以 $1/t$,得到非齐次微分方程

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + a \frac{x^{(1)}(t)}{t} = \frac{b}{t}.$$

先求齐次方程

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + a \frac{x^{(1)}(t)}{t} = 0$$

的解, 得到齐次方程通解为

$$x^{(1)}(t) = C_1 \cdot t^{-a}. \tag{7}$$

根据常数变易法, 式(2)的通解为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + C_2 t^{-a}. \tag{8}$$

令初始条件 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$, 代入式(6)可得

$$C_2 = x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}. \tag{9}$$

将式(9)代入(8), 得到白化方程(2)的解为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] t^{-a}. \tag{10}$$

所以由式(10)可得还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} x^{(0)}(1), & k = 1; \\ \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] [k^{-a} - (k-1)^{-a}], & \\ k \geq 2, & k \in N. \end{cases} \tag{11}$$

于是定理得证. \square

灰色欧拉模型是基于序列的第1个数据不变的假设. 实际上, 第1个数据是序列中最古老的信息. 因此, 这个初值是可以优化的. 为了解决这一问题, 本文构建一个3种不同初值的灰色欧拉拓展模型.

定理3 设 B 、 Y 、 $\hat{\mu}$ 如定理1所述, $\hat{u} = (\hat{a} - 1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(m) = \sum_{i=1}^m x^{(0)}(i)$, 则

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[\hat{x}^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] k^{-a}; \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(m), & 1 < m < n. \end{cases} \tag{12}$$

称式(12)为中间点灰色欧拉模型时间响应式, 称此时灰色欧拉模型为中间点灰色欧拉模型, 简称MGEM(1,1)模型.

定理4 设 B 、 Y 、 $\hat{\mu}$ 如定理1所述, $\hat{u} = (\hat{a} - 1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(n) = \sum_{i=1}^n x^{(0)}(i)$, 则

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[\hat{x}^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] k^{-a}, \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(n) = x^{(0)}(n). \end{cases} \tag{13}$$

称式(13)为末点灰色欧拉模型时间响应式, 称此时灰色欧拉模型为末点灰色欧拉模型, 简称EGEM(1,1)模型.

2 灰色欧拉优化模型

为了提升模型的精度, 对初值进行修正, 给初值一个参数以抵消迭代预先确定初值产生的误差. SGEM(1,1)模型、MGEM(1,1)模型和EGEM(1,1)模型的新形式如下.

2.1 OSGEM(1,1)模型

设 B 、 Y 、 $\hat{\mu}$ 如定理1所述, $\hat{u} = (\hat{a} - 1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[\hat{x}^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] k^{-a}, \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + c. \end{cases} \tag{14}$$

称式(14)为初始点灰色欧拉模型时间响应式, 称此时灰色欧拉模型为初始点优化的灰色欧拉模型, 简称OSGEM(1,1)模型.

2.2 OMGEM(1,1)模型

设 B 、 Y 、 $\hat{\mu}$ 如定理1所述, $\hat{u} = (\hat{a} - 1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[\hat{x}^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] k^{-a}, \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(m) + c. \end{cases} \tag{15}$$

称式(15)为中间点灰色欧拉模型时间响应式, 称此时灰色欧拉模型为优化的中间点灰色欧拉模型, 简称OMGEM(1,1)模型.

2.3 OEGEM(1,1)模型

设 B 、 Y 、 $\hat{\mu}$ 如定理1所述, $\hat{u} = (\hat{a} - 1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[\hat{x}^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] k^{-a}, \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(n) + c. \end{cases} \tag{16}$$

称式(16)为末点灰色欧拉模型时间响应式, 称此时灰色欧拉模型为优化的末点灰色欧拉模型, 简称OEGEM(1,1)模型.

2.4 模型的参数估计

在优化的灰色欧拉模型中有3个参数与一般灰色欧拉模型一致, 见定理1, 即

$$\hat{u} = (\hat{a}_1, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

对于参数 c 的估计, 以OSGEM(1,1)模型为例进行求解. 在OMGEM(1,1)模型和OEGEM(1,1)模型中可以得到相同的结论. 本文用最小二乘法建立一个无约束优化模型, 求出参数 c 的值, 使 $x^{(1)}(k)$ 与 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 误差平方的总和最小, 即

$$\min_c \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2. \tag{17}$$

令 $S = \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2$, 将式(17)、 a 、 b 和 $x^{(1)}(k)$ 代入 S , 得到

$$S = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{b}{a} + \left[x^{(0)}(1) + c - \frac{b}{a} \right] k^{-a} - x^{(1)}(k) \right\}^2.$$

令 $\frac{dS}{dc} = 0$, 可得

$$2 \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{b}{a} + \left[x^{(0)}(1) + c - \frac{b}{a} \right] k^{-a} - x^{(1)}(k) \right\} k^{-a} = 0,$$

所以

$$c = \frac{\sum_{k=1}^n x^{(1)}(k) \cdot k^{-a} - \frac{b}{a} \sum_{k=1}^n k^{-a} - \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \sum_{k=1}^n k^{-2a}}{\sum_{k=1}^n k^{-2a}}. \tag{18}$$

2.5 3种灰色欧拉优化模型的时间响应式

参数 a 、 b 、 c 值与式(3)和(18)相同, 易得模拟序列和预测序列的递推公式, 即优化灰色欧拉模型的时间响应式.

定理5 对于 OSGEM(1,1) 模型, 有:

1) 累加序列的递推公式

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[x^{(1)}(1) + c - \frac{b}{a} \right] k^{-a}, \tag{19}$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

2) 模拟序列和预测序列的递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} x^{(1)}(1) + c, & k = 1; \\ \left[x^{(1)}(1) + c - \frac{b}{a} \right] [k^{-a} - (k-1)^{-a}], & k = 2, 3, \dots, n, \dots \end{cases} \tag{20}$$

证明过程与定理2类似, 不再赘述.

定理6 对于 OMGEM(1,1) 模型, 有:

1) 累加序列的递推公式

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[x^{(1)}(m) + c - \frac{b}{a} \right] k^{-a}, \tag{21}$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

2) 模拟序列和预测序列的递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} x^{(1)}(m) + c, & k = 1; \\ x^{(1)}(m) + c - \frac{b}{a} [k^{-a} - (k-1)^{-a}], & k = 2, 3, \dots, n, \dots \end{cases} \tag{22}$$

证明过程与定理2类似, 不再赘述.

定理7 对于 OEGEM(1,1) 模型, 有:

1) 累加序列的递推公式

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left[x^{(1)}(n) + c - \frac{b}{a} \right] k^{-a}, \tag{23}$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

2) 模拟序列和预测序列的递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} x^{(1)}(n) + c, & k = 1; \\ x^{(1)}(n) + c - \frac{b}{a} [k^{-a} - (k-1)^{-a}], & k = 2, 3, \dots, n, \dots \end{cases} \tag{24}$$

证明过程与定理2类似, 不再赘述.

利用灰色欧拉优化模型原理, 分别对 GM(1,1) 模型和 DGM(1,1) 模型的初值进行优化, 可得如下相似的结论.

定理8 设 $X^{(0)}$ 、 $X^{(1)}$ 和 $Z^{(1)}$ 如定义1所述, 称方程

$$\begin{cases} x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + c_1 \end{cases} \tag{25}$$

为 OSGM(1,1) 模型, 则有:

1) 模型的优化参数 c_1 的计算公式为

$$c_1 = \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{b_1}{a_1} - x^{(0)}(1) \right) e^{-a_1(2k-2)} - \left(\frac{b_1}{a_1} - x^{(1)}(k) \right) e^{-a_1(k-1)} \right] \right\} / \sum_{k=1}^n e^{-a_1(2k-2)}. \tag{26}$$

累加序列的递推公式

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b_1}{a_1} + \left[x^{(1)}(1) + c_1 - \frac{b_1}{a_1} \right] e^{-a_1(k-1)}, \tag{27}$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

2) 模拟序列和预测序列的递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} x^{(1)}(1), & k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), & k = 2, 3, \dots, n, \dots \end{cases} \tag{28}$$

证明过程与定理2类似, 不再赘述.

定理9 设 $X^{(0)}$ 和 $X^{(1)}$ 如定义1所述, 称方程

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2, \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + c_2 \end{cases} \tag{29}$$

为 OSDGM(1,1) 模型, 则有:

1) 模型的优化参数 c_2 的计算公式为

$$c_2 = \left\{ \sum_{k=1}^n \left[-x^{(0)}(1) \beta_1^{(2k-2)} - \left(\frac{1 - \beta_1^{k-1}}{1 - \beta_1} \right) \beta_2 \right] \right\}$$

$$x^{(1)}(k) \beta_1^{(k-1)} \Big] \Big/ \sum_{k=1}^n \beta_1^{(2k-2)}. \quad (30)$$

累加序列的递推公式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(1)}(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1} + c_2 \right] \beta_1^k + \frac{\beta_2}{1-\beta_1},$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (31)$$

2) 模拟序列和预测序列的递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} x^{(1)}(1), & k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), & k = 2, 3, \dots, n, \dots \end{cases} \quad (32)$$

证明过程与定理2类似,不再赘述.

对研究对象的预测效果好坏和应用范围是否广泛是评价模型的重要方面,尤其是模型的拟合和预测精度是评价模型的重要指标.对评价模型的预测精度的指标主要有:

1) 相对误差.拟合或预测值的相对误差为

$$APE(k) = \frac{|\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)}. \quad (33)$$

2) 平均相对误差.拟合或预测值的平均相对误差为

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n APE(k). \quad (34)$$

3 实例分析

例1 中国的能源消费主要包括煤炭、石油、天然气和一次电力及其他能源,根据2022年国家统计局年鉴中中国能源消费总量及构成数据(<http://www.stats.gov.cn/sj/ndsj/2022/indexch.htm>),中国能源消费总量逐年增加,尤其是天然气和一次电力的能源消费占比由2002年2.3%和8.2%分别增长到2021年8.9%和16.6%,中国的能源消费结构中清洁能源占比快速增加,因此,中国的能源消费结构正在向清洁能源转变.合理预测我国能源消费趋势以及能源结构变化,对我国政府制定能源政策、调整产业结构具有重要意义.选取2002~2018年中国能源消费总量数据,利用OSGM(1,1)模型、OSDGM(1,1)模型和OSGEM(1,1)模型建模分析,用2019~2021年中国能源消费总量数据验证模型的精度.

如图2所示,OSGEM(1,1)模型的仿真和预测与实际数据最接近,能准确反映中国能源消费量的总趋势.由图3和表1可以看出,OSGEM(1,1)模型模拟值和预测值的平均相对误差分别为0.0114和0.0208,OSGM(1,1)模型模拟值和预测值的平均相对误差分别为0.0543和0.0914,OSDGM(1,1)模型

模拟值和预测值的平均相对误差分别为0.0504和0.0908,显然,OSGEM(1,1)模型的模拟值和预测值精度明显优于其他模型.

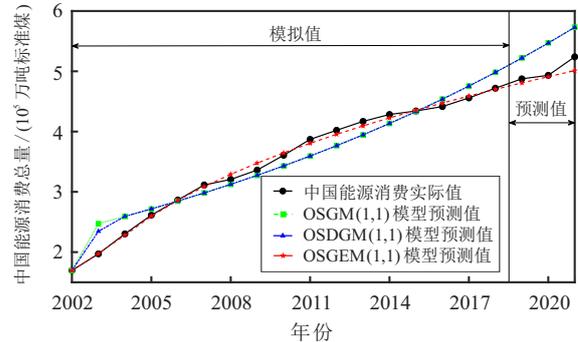


图2 中国能源消费量预测值与实际值对比

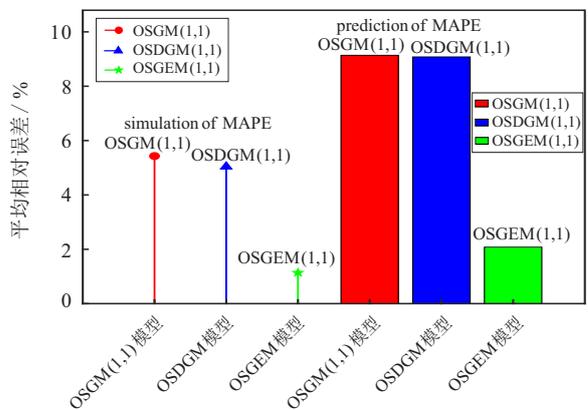


图3 平均相对误差对比(1)

例2 为了验证OSGEM(1,1)模型的幂函数系统特征,选择幂函数 $f(t) = \lambda t^\mu$ 作为仿真对象,当参数 λ 和 μ 取固定值, t 取不同值时,可以得到具有幂函数系统特征的仿真数据.令 $\lambda = 2, \mu = 0.8$,可得幂函数 $f(t) = 2t^{0.8}$,选取 $t = 1, 2, \dots, 19$,得到仿真数据序列如表2所示.为了比较OSGM(1,1)模型、OSDGM(1,1)模型和OSGEM(1,1)模型的模拟和预测性能,利用仿真数据序列中的前14个数据分别构建OSGM(1,1)模型、OSDGM(1,1)模型和OSGEM(1,1)模型,根据后5个数据验证3个模型的预测性能.OSGM(1,1)模型、OSDGM(1,1)模型和OSGEM(1,1)模型的仿真和预测数据对比结果如表2所示.

如图4所示,对具有幂函数系统特征时间序列进行仿真和预测,OSGEM(1,1)模型的结果与实际数据基本重合,因此,OSGEM(1,1)模型能准确反映幂函数系统特征时间序列的变化趋势.如表2所示,OSGM(1,1)模型、OSDGM(1,1)模型和OSGEM(1,1)模型模拟值的预测平均误差都在0.1以内.但对于3个模型的预测值,OSGM(1,1)模型和OSDGM(1,1)模型的预测误差逐渐增大,而OSGEM(1,1)模型的预

表1 3个模型的中国能源消费总量的预测值和相对误差

年份	能源消费总量/ 万吨标准煤	OSGM(1,1)模型		OSDGM(1,1)模型		OSGEM(1,1)模型	
		预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
2002	169 577	169 577	0	169 577	0	169 577	0
2003	197 083	247 293	0.254 8	234 504	0.189 9	197 628	0.002 8
2004	230 281	259 118	0.125 2	259 311	0.126 1	228 074	0.009 6
2005	261 369	271 508	0.038 8	271 690	0.039 5	259 589	0.006 8
2006	286 467	284 491	0.006 9	284 659	0.006 3	285 862	0.002 1
2007	311 442	298 095	0.042 9	298 248	0.042 4	308 707	0.008 8
2008	320 611	312 348	0.025 8	312 486	0.025 3	329 099	0.026 5
2009	336 126	327 284	0.026 3	327 403	0.026 0	347 626	0.034 2
2010	360 648	342 934	0.049 1	343 032	0.048 8	364 681	0.011 2
2011	387 043	359 332	0.071 6	359 407	0.071 4	380 534	0.016 8
2012	402 138	376 514	0.063 7	376 564	0.063 6	395 385	0.016 8
2013	416 913	394 518	0.053 7	394 540	0.053 7	409 386	0.018 1
2014	428 334	413 382	0.034 9	413 374	0.034 9	422 652	0.013 3
2015	434 113	433 149	0.002 2	433 107	0.002 3	435 277	0.002 7
2016	441 492	453 861	0.028 0	453 782	0.027 8	447 337	0.013 2
2017	455 827	475 563	0.043 3	475 445	0.043 0	458 893	0.006 7
2018	471 925	498 303	0.055 9	498 141	0.055 6	469 997	0.004 1
模拟值平均相对误差		0.054 3		0.050 4		0.011 4	
2019	487 488	522 131	0.071 1	521 920	0.070 6	480 692	0.013 9
2020	493 314	547 097	0.109 0	546 835	0.108 5	491 016	0.004 7
2021	524 000	573 258	0.094 0	572 939	0.093 4	501 000	0.043 9
预测值平均相对误差		0.091 4		0.090 8		0.020 8	

表2 3个模型的幂函数系统特征的模拟值、预测值和相对误差

序号	由幂函数得到的 仿真数据序列	OSGM(1,1)模型		OSDGM(1,1)模型		OSGEM(1,1)模型	
		预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
1	2.000 0	2.000 0	0.000 0	2.000 0	0	2.000 0	0
2	3.482 2	5.345 9	0.535 2	4.517 3	0.297 3	3.755 6	0.078 5
3	4.816 4	5.904 5	0.225 9	5.915 0	0.228 1	4.633 1	0.038 1
4	6.062 9	6.521 5	0.075 6	6.532 0	0.077 4	5.968 2	0.015 6
5	7.247 8	7.203 0	0.006 2	7.213 3	0.004 8	7.209 4	0.005 3
6	8.385 9	7.955 6	0.051 3	7.965 7	0.050 1	8.382 6	0.000 4
7	9.486 6	8.787 0	0.073 7	8.796 6	0.072 7	9.503 4	0.001 8
8	10.556 1	9.705 1	0.080 6	9.714 2	0.079 8	10.581 7	0.002 4
9	11.599 1	10.719 3	0.075 9	10.727 4	0.075 2	11.624 6	0.002 2
10	12.619 1	11.839 4	0.061 8	11.846 4	0.061 2	12.637 2	0.001 4
11	13.619 0	13.076 5	0.039 8	13.082 0	0.039 4	13.623 6	0.000 3
12	14.600 7	14.442 9	0.010 8	14.446 6	0.010 6	14.586 7	0.001 0
13	15.566 3	15.952 2	0.024 8	15.953 5	0.024 9	15.529 1	0.002 4
14	16.517 0	17.619 1	0.066 7	17.617 5	0.066 6	16.452 9	0.003 9
模拟值平均相对误差		0.094 9		0.077 7		0.010 9	
15	17.454 3	19.460 2	0.005 4	19.455 2	0.114 6	17.359 8	0.114 9
16	18.379 2	21.493 6	0.007 0	21.484 5	0.169 0	18.251 1	0.169 5
17	19.292 5	23.739 6	0.008 5	23.725 5	0.229 8	19.128 3	0.230 5
18	20.195 2	26.220 2	0.010 0	26.200 2	0.297 3	19.992 3	0.298 3
19	21.087 9	28.960 1	0.011 6	28.933 1	0.372 0	20.844 0	0.373 3
预测值平均相对误差		0.237 3		0.236 5		0.008 5	

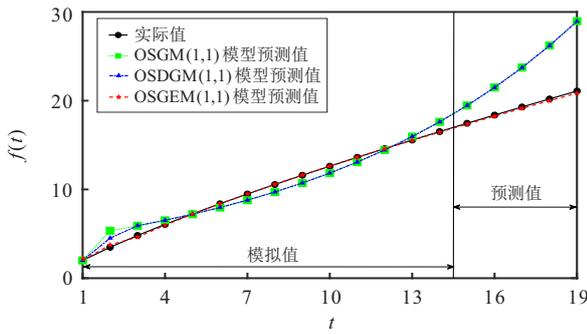


图4 幂函数系统特征时间序列的预测值与实际值对比

测结果仍保持较高的精度. OSGM(1,1)模型的模拟值和预测值平均相对误差分别为0.0949和0.2373, OSDGM(1,1)模型的模拟值和预测值平均相对误差分别为0.0777和0.2365, 而OSGEM(1,1)模型的模拟值和预测值平均相对误差仅为0.0109和0.0085. 如图5所示, OSGEM(1,1)模型不仅具有较好的模拟精度, 而且具有更高的预测精度.

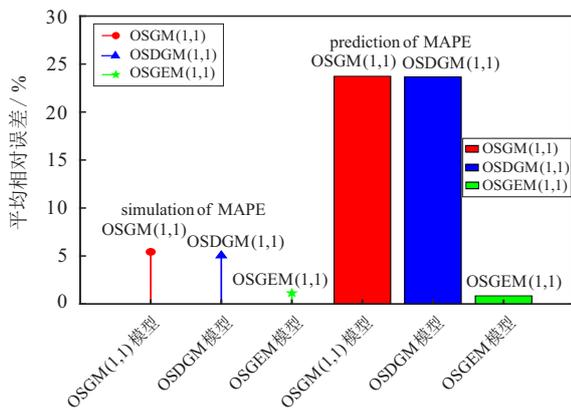


图5 平均相对误差对比(2)

4 结论

本文针对累加数据呈幂函数增长的动力系统, 构建了符合该数据特征的灰色欧拉模型, 推导了该模型的时间响应式, 并对初值进行优化, 得到了优化参数的计算公式. 将该模型用于累加数据呈幂函数增长的序列建模, 发现该模型具有较高的模拟和预测精度. 此外, 与OSGM(1,1)模型和OSDGM(1,1)模型对比, OSGEM(1,1)模型的模拟和预测精度最好, 因此, OSGEM(1,1)模型结构的泛化能力得到显著提高. 未来, 该模型可以进一步研究的内容有: 1) 一般新信息对系统影响更大, 可将灰色欧拉优化模型与信息优先耦合, 构建新信息优先的灰色欧拉优化模型, 以适应系统特征; 2) 在多变量的动态系统中, 将单变量的灰色欧拉模型拓展为多变量灰色欧拉模型, 以供建模选择; 3) 对灰色欧拉优化模型进行分数阶建模优化, 利用智能优化算法对分数阶的阶数和背景值进行优化等.

参考文献(References)

- [1] Ye L, Yang D L, Dang Y G, et al. An enhanced multivariable dynamic time-delay discrete grey forecasting model for predicting China's carbon emissions[J]. Energy, 2022, 249: 123681.
- [2] 许泽东, 党耀国, 杨德岭. 含分数阶多项式的离散灰色预测模型及其应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3578-3584.
(Xu Z D, Dang Y G, Yang D L. Discrete grey forecasting model with fractional order polynomial and its application[J]. Control and Decision, 2023, 38(12): 3578-3584.)
- [3] Qian W Y, Sui A D. A novel structural adaptive discrete grey prediction model and its application in forecasting renewable energy generation[J]. Expert Systems with Applications, 2021, 186: 115761.
- [4] Xiao X P, Duan H M. A new grey model for traffic flow mechanics[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 88: 103350.
- [5] 梅韵杰, 曾祥艳, 闫书丽. 三参数区间灰数序列的矩阵型自回归时滞灰色多变量模型[J]. 中国管理科学, DOI: 10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2021.0610.
(Mei Y J, Zeng X Y, Yan S L. A matrix autoregressive time-delay grey multivariable model for three-parameter interval grey number sequences[J]. Chinese Journal of Management Science, DOI: 10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2021.0610.)
- [6] Yan S L, Su Q, Gong Z W, et al. Fractional order time-delay multivariable discrete grey model for short-term online public opinion prediction[J]. Expert Systems with Applications, 2022, 197: 116691.
- [7] Cui J, Liu S F, Zeng B, et al. A novel grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4399-4406.
- [8] Zeng B, Meng W, Tong M Y. A self-adaptive intelligence grey predictive model with alterable structure and its application[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2016, 50: 236-244.
- [9] Ma X, Liu Z B. Application of a novel time-delayed polynomial grey model to predict the natural gas consumption in China[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 324: 17-24.
- [10] 罗党, 韦保磊. 灰色GMP(1,1,N)模型及其在冰凌灾害风险预测中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(11): 2929-2937.
(Luo D, Wei B L. Grey GMP(1,1,N) model and its application in risk prediction of ice-jam disaster[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2017, 37(11): 2929-2937.)
- [11] Wei B L, Xie N M, Hu A Q. Optimal solution for novel grey polynomial prediction model[J]. Applied

- Mathematical Modelling, 2018, 62: 717-727.
- [12] Wang J J, Dang Y G, Ye J, et al. An improved grey prediction model based on matrix representations of the optimized initial value[J]. Journal of Grey System, 2018, 30(3): 143-156.
- [13] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-99.)
- [14] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 1173-1186.
- [15] 罗党, 韦保磊. 一类离散灰色预测模型的统一处理方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(2): 451-462.
(Luo D, Wei B L. A unified treatment approach for a class of discrete grey forecasting models and its application[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2019, 39(2): 451-462.)
- [16] 吴紫恒, 吴仲城, 李芳, 等. 改进的含时间幂次项灰色模型及建模机理[J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 637-641.
(Wu Z H, Wu Z C, Li F, et al. Improved grey forecasting model with time power and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2019, 34(3): 637-641.)
- [17] Wu W Q, Ma X, Zeng B, et al. A novel Grey Bernoulli model for short-term natural gas consumption forecasting[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 84: 393-404.
- [18] Zheng C L, Wu W Z, Xie W L, et al. Forecasting the hydroelectricity consumption of China by using a novel unbiased nonlinear grey Bernoulli model[J]. Journal of Cleaner Production, 2021, 278: 123903.
- [19] Zheng C L, Wu W Z, Xie W L, et al. An MFO-based conformable fractional nonhomogeneous grey Bernoulli model for natural gas production and consumption forecasting[J]. Applied Soft Computing, 2021, 99: 106891.
- [20] Liu C, Lao T F, Wu W Z, et al. An optimized nonlinear grey Bernoulli prediction model and its application in natural gas production[J]. Expert Systems with Applications, 2022, 194: 116448.
- [21] Ma X, Liu Z B, Wang Y. Application of a novel nonlinear multivariate grey Bernoulli model to predict the tourist income of China[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 347: 84-94.
- [22] Wang Y, He X B, Zhang L, et al. A novel fractional time-delayed grey Bernoulli forecasting model and its application for the energy production and consumption prediction[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2022, 110: 104683.
- [23] Xiao Q Z, Shan M Y, Gao M Y, et al. Parameter optimization for nonlinear grey Bernoulli model on biomass energy consumption prediction[J]. Applied Soft Computing, 2020, 95: 106538.
- [24] 周伟杰, 党耀国. 灰色广义Verhulst模型的构建及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(1): 230-239.
(Zhou W J, Dang Y G. The grey generalized Verhulst model and its application[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2020, 40(1): 230-239.)
- [25] Xiao X P, Duan H M. A new grey model for traffic flow mechanics[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 88: 103350.
- [26] Zeng L. A novel discrete grey Riccati model and its application[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2020, 11(2): 309-326.
- [27] Zhang Y H, Mao S H, Kang Y X, et al. Fractal derivative fractional grey Riccati model and its application[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 145: 110778.
- [28] Luo X L, Duan H M, He L. A novel riccati equation grey model and its application in forecasting clean energy[J]. Energy, 2020, 205: 118085.
- [29] Wu W Q, Ma X, Wang Y, et al. Predicting China's energy consumption using a novel grey Riccati model[J]. Applied Soft Computing Journal, 2020, 95: 106555.
- [30] Gao M Y, Yang H L, Xiao Q Z, et al. A novel fractional grey Riccati model for carbon emission prediction[J]. Journal of Cleaner Production, 2021, 282: 124471.

作者简介

王安(1983—), 男, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论的研究, E-mail: wangan@pdsu.edu.cn;

党耀国(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究, E-mail: iamdangyg@163.com;

王俊杰(1988—), 男, 副教授, 博士, 从事灰色系统理论的研究, E-mail: wangjj@nuaa.edu.cn.