



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

# 控制与决策

CONTROL AND DECISION



## 时变输出约束非线性系统的量化反馈 自适应终端滑模控制

杨启尧, 彭冬亮, 蔡建平

引用本文:

杨启尧, 彭冬亮, 蔡建平. 时变输出约束非线性系统的量化反馈 自适应终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(7): 2186–2194.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.2107>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### [磁悬浮开关磁阻电机的自适应终端滑模控制](#)

Adaptive terminal sliding mode control of bearingless switched reluctance motor

控制与决策. 2021, 36(6): 1449–1456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1064>

#### [带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制](#)

Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints

控制与决策. 2021, 36(2): 387–394 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0974>

#### [基于数据驱动的非线性网络系统自适应迭代学习控制](#)

Data driven adaptive learning control of nonlinear network system

控制与决策. 2021, 36(6): 1523–1528 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1182>

#### [航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制](#)

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

控制与决策. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

#### [具有未建模动态和输出约束的耦合系统的分散自适应控制](#)

Decentralized adaptive control for interconnected systems with unmodeled dynamics and output constraints

控制与决策. 2018, 33(12): 2113–2121 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0933>

# 时变输出约束非线性系统的量化反馈 自适应终端滑模控制

杨启尧<sup>1,2</sup>, 彭冬亮<sup>1†</sup>, 蔡建平<sup>2</sup>

(1. 杭州电子科技大学 自动化学院, 杭州 310018; 2. 浙江水利水电学院 电气工程学院, 杭州 310018)

**摘要:** 针对一类复杂非线性系统, 提出一种新型自适应快速非奇异终端滑模控制 (IAFNSTSMC) 方法, 用以解决其在输出时变约束及量化输入情形下的轨迹跟踪问题; 利用鲁棒自适应方法处理扰动不确定性, 并结合反演策略和终端滑模策略设计控制器; 构造一种新型的时变约束障碍 Lyapunov 函数, 用于实现对系统的输出误差进行随时间变化的幅值约束; 为提高闭环系统的误差收敛速度, 提出一种新型的滑模面构造方案. 所提控制方法能够保证闭环系统的输出跟踪误差快速收敛到约束边界内, 并确保闭环系统所有信号有界. 数值仿真验证了所提方法的有效性.

**关键词:** 自适应控制; 终端滑模控制; 输出约束; 量化输入; 非线性系统; 反演控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.2107

**引用格式:** 杨启尧, 彭冬亮, 蔡建平. 时变输出约束非线性系统的量化反馈自适应终端滑模控制 [J]. 控制与决策, 2024, 39(7): 2186-2194.

## Adaptive terminal sliding mode control for nonlinear systems with quantized input and time-varying output constraints

YANG Qi-yao<sup>1,2</sup>, PENG Dong-liang<sup>1†</sup>, CAI Jian-ping<sup>2</sup>

(1. School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China; 2. College of Electrical Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** This paper addresses an improved adaptive fast nonsingular terminal sliding mode control (IAFNSTSMC) method for a class of nonlinear systems with complicated disturbances and uncertainties under the conditions of time-varying output constraints and quantized input signal. The robust adaptive method is jointly used to deal with the disturbances and uncertainties, and the controller is designed by combining the backstepping control strategy with the terminal sliding mode strategy. A novel time-varying barrier Lyapunov function is constructed to time-varyingly constrain the output error of the system during operation. Also, a novel sliding mode surface construction scheme is proposed to improve the error convergence rate of the closed-loop system. The proposed method guarantees that all signals in the closed-loop systems are bounded, and the output tracking error can converge to the given boundary constraints. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Keywords:** adaptive control; terminal sliding mode control; output constraint; quantized input; nonlinear systems; backstepping control

## 0 引言

为了提高控制系统的鲁棒性, 人们早就知道采用饱和函数或投影算法对控制输入进行限幅处理. 但是, 在有些控制场合, 出于提高设备安全性及工艺方面的考虑, 还需要对控制系统的状态、输出和误差等予以限制. 此时, 仅仅对控制输入进行限幅处理是不够的. 过去的 30 年里, 一些学者围绕这一问题开

展研究, 提出了一些受限系统控制方法, 包括最大输出容许集策略<sup>[1]</sup>、约束模型预测控制 (constrained model predictive control)<sup>[2]</sup>、设定值调节器 (reference governor)<sup>[3]</sup>、凸优化方法 (convex optimization)<sup>[4]</sup> 和障碍 Lyapunov 函数方法 (barrier Lyapunov function)<sup>[5]</sup> 等. 近年来, 障碍 Lyapunov 函数方法受到人们的关注, 构造出多种类型的障碍 Lyapunov 函数<sup>[6-8]</sup>. 通过选择

收稿日期: 2022-12-05; 录用日期: 2023-04-24.

基金项目: 浙江省自然科学基金重点项目 (LZ23F030002); 浙江省自然科学基金项目 (LY22F030011).

责任编委: 关新平.

†通讯作者. E-mail: dlpeng@hdu.edu.cn.

合适的参数,可以利用上述函数设计出合适的约束算法,对系统信号进行定常幅值约束或时变幅值约束.上述工作推动了受限系统控制器设计技术的发展.

滑模控制是一种常用的非线性系统控制技术.滑模系统运行时,控制器可使系统状态沿着预设的滑模面运动,以保证系统的动态性能.这种控制技术具有对外界干扰不灵敏、鲁棒性强和物理实现简单等优点<sup>[9]</sup>.利用传统滑模控制方法设计的控制系统,系统状态到达线性滑模面后,渐近收敛于系统的平衡点.终端滑模控制方法<sup>[10]</sup>在滑模面设计中引入非线性函数,实现了系统状态的有限时间收敛,具有较快的误差收敛速度.利用终端滑模控制方法设计控制器时,复平面上可能存在奇异区域,在这块区域,算法的控制量取值为无穷大,阻碍了该类算法在现实中的应用.为此,学者们致力于提出非奇异终端控制方法,克服终端滑模的奇异性问题<sup>[11-16]</sup>.鉴于使用非奇异终端滑模控制方法的优点,这种控制技术逐渐受到人们的关注,被应用于解决机械臂<sup>[12]</sup>、四旋翼无人机<sup>[13]</sup>、智能车辆<sup>[14]</sup>和 underwater 航行器<sup>[15-16]</sup>等设备或系统的轨迹跟踪问题.目前,已有一些文献讨论状态/输出受限情形下的非线性系统传统滑模控制算法<sup>[17-18]</sup>,但涉及系统约束情形下的终端滑模控制设计方法的结果还较少.同时,文献<sup>[15-16]</sup>针对积分终端滑模收敛速度不够快的问题提出了含有分数阶幂次的自适应非奇异积分终端滑模控制器,以确保跟踪误差在有限时间内全局收敛到零,但该非奇异积分终端滑模控制器如何取得更短的收敛时间仍有改进的空间.

随着控制系统规模的扩大,网络控制系统日趋广泛.在网络控制系统中,控制信号通过通信网络传送给被控对象.对于现实的网络控制系统而言,其通信信道的带宽和数据传输率必然是有限和稀缺的.在控制信号被传输前,对其进行适当的数值量化有利于降低传输网络的负担.近年来,非线性系统的量化控制问题受到人们的关注<sup>[19-20]</sup>.文献<sup>[21]</sup>针对非严格反馈随机非线性系统,采用迟滞量化器对控制输入进行量化,提出了全状态约束的有限时间自适应跟踪控制方案;文献<sup>[22]</sup>研究了含故障系统的量化反馈自适应控制算法;文献<sup>[23]</sup>考虑具有定常输出约束需求的一类量化输入非线性互联系统,开展了自适应分散跟踪控制设计;文献<sup>[24]</sup>针对具有量化输入的一类严格反馈非线性系统,给出了有限时间收敛的模糊自适应控制算法.总体来看,涉及终端滑模控制的量化反馈算法还比较少.

上述文献给出的成果推动了非线性系统控制技术的发展.本文在已有成果的基础上,开展输出受限及量化反馈情形下非线性系统自适应终端滑模控制器设计方法研究.针对一类含多种扰动的复杂非线性系统,利用障碍 Lyapunov 函数实现系统输出误差约束,利用不等式和鲁棒自适应方法处理扰动,结合反演方法和终端滑模策略设计控制器.在反演设计过程中,采用动态面技术来避免高阶系统反演设计中可能出现的“微分爆炸”问题.本文的贡献主要如下:

1) 考虑输出约束和量化输入情形下的非线性系统自适应非奇异终端滑模控制问题,将量化反馈策略引入鲁棒自适应终端滑模控制系统,降低网络场景下控制信号传输所需的通信负荷.与目前已有的工作相比,文献<sup>[12-14]</sup>考虑的是非量化反馈情形下的非奇异滑模控制器设计;文献<sup>[19]</sup>研究的是量化反馈情形下的非输出约束自适应控制算法设计问题;本文开展量化反馈情形下的输出约束滑模控制器设计,有助于拓宽滑模控制技术的应用范围.

2) 给出了一种新型的时变约束障碍 Lyapunov 函数构造方案,用于实现对系统的输出误差进行随时间变化的幅值约束.

3) 改进终端滑模面设计方案,提出一种新型的滑模面构造方案,以期提高闭环系统的误差收敛速度.为解决文献<sup>[15]</sup>所提算法在远离平衡点处的收敛速度较慢这一问题,文献<sup>[16]</sup>提出了一种快速非奇异终端滑模控制方法.本文拟针对这一问题开展进一步的研究,在文献<sup>[16]</sup>的基础上进一步改进滑模面的设计,所设计的滑模面与文献<sup>[16]</sup>相比,有着更快的收敛速度.

## 1 问题描述

考虑如下非线性不确定系统<sup>[25]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1) + \theta_1^T \varphi_1(x_1) + d_1(t), \\ \dot{x}_2 = x_3 + f_2(\bar{x}_2) + \theta_2^T \varphi_2(\bar{x}_2) + d_2(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + \theta_{n-1}^T \varphi_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + d_{n-1}(t), \\ \dot{x}_n = \nu Q(u) + f_n(x) + \theta_n^T \varphi_n(x) + d_n(t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in \mathbb{R}^i, i = 2, 3, \dots, n;$   $\theta_i \in \mathbb{R}^p$  是未知的常数向量,  $\varphi_i(\bar{x}_i) \in \mathbb{R}^p$  和  $f_i(\bar{x}_i) \in \mathbb{R}$  是已知的非线性光滑函数;  $\nu \in \mathbb{R}$  是正的未知参数;  $d_i(t)$  是外界扰动;  $Q(u) \in \mathbb{R}$  和  $y \in \mathbb{R}$  分别是系统的实

际输入和输出信号.  $Q(u)$  为  $u$  的量化值, 所选取的迟滞量化函数<sup>[26]</sup> 如下:

$$Q(u) = \begin{cases} u_\iota, \frac{u_\iota}{1+\delta} < u \leq u_\iota, Q^- \geq u_\iota \text{ or} \\ u_\iota < u < \frac{u_\iota}{1-\delta}, Q^- \leq u_\iota; \\ u_\iota(1+\delta), \\ u_\iota < u \leq \frac{u_\iota}{1-\delta}, Q^- \geq u_\iota(1+\delta) \text{ or} \\ \frac{u_\iota}{1-\delta} \leq u < \frac{u_\iota(1+\delta)}{1-\delta}, Q^- \leq u_\iota(1+\delta); \\ 0, 0 \leq u \leq \frac{a}{1+\delta}, Q^- \geq u_\iota(1+\delta) \text{ or} \\ \frac{a}{1+\delta} < |u| < a, Q^- = 0; \\ -Q(-u), u < 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $u_\iota = \epsilon^{(1-\iota)}a, a > 0, 0 < \epsilon < 1, \iota = 1, 2, \dots; \delta = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$ . 参数  $a$  的值决定死区  $Q(u)$  的大小,  $\epsilon$  决定量化密度.  $Q(u)$  的取值范围为  $U = \{0, \pm u_\iota, \pm u_\iota(1+\delta)\}$ .

根据文献[26], 量化输入  $Q(u)$  可以描述为

$$Q(u) = q_1(t)u + q_2(t), \quad (3)$$

且满足条件

$$q_1 \geq \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} > 0 \quad (4)$$

和

$$q_2 \leq \bar{a}. \quad (5)$$

此处,  $\underline{\epsilon}$  和  $\bar{a}$  分别表示  $\epsilon$  和  $a$  的下确界和上确界.

**假设1**  $|d_i(t)| \leq D_i, i = 1, 2, \dots, n, D_i$  是一未知的正常数.

**假设2** 参考信号  $y_r(t)$  的  $n$  阶导数存在且连续.

本文的控制目标是设计自适应非奇异终端滑模控制器, 实现系统输出  $y$  对参考轨迹  $y_r$  的快速跟踪, 并将输出误差约束在预设的界内. 为了表达方便, 下文中记  $\varphi_i(\bar{x}_i)$  为  $\varphi_i$ , 记  $f_i(\bar{x}_i)$  为  $f_i$ .

## 2 非奇异积分终端滑模面设计

借鉴已有成果<sup>[15-16]</sup>, 提出一种改进型自适应非奇异快速终端滑模面 (improved adaptive fast nonsingular terminal sliding mode control, IAFNTSMC) 设计方案

$$s(t) = \gamma e_I(t) + \beta_1 e^{\frac{p_1}{p_2}}(t) + \beta_2 \gamma (e_I(t))^{\frac{g_1}{g_2}}. \quad (6)$$

其中:  $e_I(t) = \int_0^t e(\varpi) d\varpi; \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \gamma > 1; p_1, p_2, g_1$  和  $g_2$  是正奇数, 且满足  $1 < \frac{p_1}{p_2} < 2$  和  $\frac{p_1}{p_2} < \frac{g_1}{g_2}$ .

当  $s(t) = 0$  时, 对式(6)求导, 可得

$$\frac{d}{dt} e_I(t) = - \left( \frac{\gamma e_I(t) + \beta_2 \gamma e^{\frac{g_1}{g_2}}(t)}{\beta_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}}. \quad (7)$$

假设  $t_s$  是状态轨迹达到滑模面的时间, 而状态沿着滑模面到达平衡点的收敛时间为  $t_f$ , 即从  $e_I(t_s)$  到达  $e_I(t_s + t_f)$  的时间.

由式(7)可得

$$dt_f = - \left( \frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \frac{\beta_1^{\frac{p_2}{p_1}}}{(e_I(t) + \beta_2 e^{\frac{g_1}{g_2}}(t))^{\frac{p_2}{p_1}}} de_I. \quad (8)$$

对上式两边积分, 有

$$t_f = \left( \frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \int_0^{e_I(t_s)} \frac{\beta_1^{\frac{p_2}{p_1}}}{(e_I(t) + \beta_2 e^{\frac{g_1}{g_2}}(t))^{\frac{p_2}{p_1}}} de_I(t). \quad (9)$$

**注1** 文献[16]中所设计的滑模面为

$$s(t) = \int_0^t e(\varpi) d\varpi + \beta_1 e^{\frac{p_1}{p_2}}(t) + \beta_2 \left( \int_0^t e(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{g_1}{g_2}}. \quad (10)$$

状态沿着滑模面到达平衡点的收敛时间  $t_{f_0}$  为

$$t_{f_0} = \int_0^{e_I(t_s)} \frac{\beta_1^{\frac{p_2}{p_1}}}{(e_I(t) + \beta_2 e^{\frac{g_1}{g_2}}(t))^{\frac{p_2}{p_1}}} de_I(t). \quad (11)$$

对比式(9)和(11), 可知

$$t_f = \left( \frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} t_{f_0}. \quad (12)$$

当设定  $\gamma > 1$ , 且由于  $\frac{p_2}{p_1} < 1$ , 有  $\left( \frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} < 1$ , 因此本文所设计的  $t_f$  小于文献[16]中所设计的  $t_{f_0}$ , 能够取得更快的收敛速度.

## 3 控制器设计

定义

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_r, \\ z_i &= x_i - w_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $w_{i-1}$  为第  $i-1$  个子系统的虚拟控制律.

采用动态面技术, 设计一阶滤波器

$$\tau_i \dot{w}_i + w_i = \alpha_i, w_i(0) = \alpha_i(0). \quad (14)$$

定义

$$z_{f_i} = w_i - \alpha_i. \quad (15)$$

其中:  $z_{f_i}$  是滤波误差,  $\alpha_i$  是第  $i$  个子系统实际需设计的虚拟控制律,  $\tau_i > 0$  是滤波时间常数,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . 滤波误差在后文的稳定性分析中设计 Lyapunov 函数进行处理.

step 1: 对  $z_1$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r = \\ & z_2 + z_{f_1} + \alpha_1 + f_1 + \theta_1^T \varphi_1 + d_1 - \dot{y}_r. \end{aligned} \quad (16)$$

本文拟采用如下障碍 Lyapunov 函数设计控制器, 以期实现对系统输出误差的约束:

$$V_{z_1} = \frac{k_b^2(t)}{\pi} \cot \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{z_1^2}{k_b^2} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_1. \quad (17)$$

其中:  $k_b(t) = (k_{b0} - k_{b\infty}) \text{arc cot}(\vartheta t) + \frac{\pi}{2} k_{b\infty}, \vartheta > 0;$

$\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1$ ,  $\hat{\theta}_1$  是  $\theta_1$  的估计. 为了实现  $|z_1| < k_b$  这一约束输出误差的目的, 所选取的设计参数应满足  $k_{b\infty} > 0$  及

$$k_{b0} > |z_1(0)|. \quad (18)$$

对式(17)求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_1} = & \frac{2k_b \dot{k}_b}{\pi} \cot \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) + \phi z_1 \left(z_2 + z_{f_1} + \alpha_1 + \right. \\ & \left. f_1 + \theta_1^T \varphi_1 + d_1 - \dot{y}_r - z_1 \frac{\dot{k}_b}{k_b}\right) + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1, \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\phi = \csc^2 \left[ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) \right]$ .

利用杨氏不等式, 可知存在正数  $\sigma_1$ , 满足

$$|\phi z_1 d_1| \leq \frac{1}{4\sigma_1^2} \phi^2 z_1^2 + (\sigma_1 d_1)^2. \quad (20)$$

结合式(19)与(20), 可以推出

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_1} \leq & \frac{2k_b \dot{k}_b}{\pi} \cot \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) + \frac{(\phi z_1)^2}{2} + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \\ & \frac{1}{4\sigma_1^2} \phi^2 z_1^2 + (\sigma_1 d_1)^2 + \phi z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + f_1 + \right. \\ & \left. \theta_1^T \varphi_1 - \dot{y}_r - z_1 \frac{\dot{k}_b}{k_b}\right) + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1. \end{aligned} \quad (21)$$

据此, 设计如下虚拟控制律:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & -\bar{c}_1 z_1 + z_1 \frac{\dot{k}_b}{k_b} - \hat{\theta}_1^T \varphi_1 - f_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sigma_1^2}\right) \phi z_1 + \\ & \dot{y}_r - \frac{2k_b \dot{k}_b}{\pi z_1} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) \right] \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\bar{c}_1 > 0$ . 将式(22)代入(21), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_1} \leq & -\bar{c}_1 \phi z_1^2 + \phi z_1 z_2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \\ & (6d_1)^2 + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_1 - \Gamma_1 \phi z_1 \varphi_1). \end{aligned} \quad (23)$$

设计参数自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma_1 (\phi z_1 \varphi_1 - \mu_1 \hat{\theta}_1). \quad (24)$$

其中:  $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$  为自适应增益矩阵,  $\mu_1 > 0$ . 将式(24)代入(23), 可得

$$\dot{V}_{z_1} \leq -c_1 \bar{V}_{z_1} + \phi z_1 z_2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + (\sigma_1 d_1)^2 - \mu_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1. \quad (25)$$

其中:  $c_1 = 2\bar{c}_1$ ,  $\bar{V}_{z_1} = \frac{k_b^2(t)}{\pi} \cot \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right)$ . 采用杨氏不等式, 不难推出

$$-\mu_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 \leq \frac{\mu_1}{2} (-\|\tilde{\theta}_1\|^2 + \|\theta_1\|^2). \quad (26)$$

综合式(25)和(26), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_1} \leq & -c_1 \bar{V}_{z_1} + \phi z_1 z_2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + (\sigma_1 d_1)^2 + \\ & \frac{\mu_1}{2} (-\|\tilde{\theta}_1\|^2 + \|\theta_1\|^2). \end{aligned} \quad (27)$$

注2 当  $z_1 \rightarrow 0$  时, 有

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) \right] \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) \right]}{z_1} \rightarrow 0. \quad (28)$$

可以看出, 虚拟控制律中不包含任何负幂次项, 因此  $\alpha_1$  是非奇异的.

注3 在实际应用时,  $k_{b\infty}$  的取值不宜过小.

step 2: 对  $z_2$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = \\ & z_3 + z_{f_2} + \alpha_2 + f_2 + \theta_2^T \varphi_2 + d_2 - \dot{w}_1, \end{aligned} \quad (29)$$

其中  $z_{f_2}$  为滤波误差. 选取 Lyapunov 函数

$$V_{z_2} = V_{z_1} + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_2^{-1} \tilde{\theta}_2, \quad (30)$$

对式(30)求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_2} = & \dot{V}_{z_1} + z_2 \dot{z}_2 + \tilde{\theta}_2^T \Gamma_2^{-1} \dot{\hat{\theta}}_2 \leq \\ & -c_1 \bar{V}_{z_1} + \phi z_1 z_2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + (\sigma_1 d_1)^2 + \\ & \frac{\mu_1}{2} (-\|\tilde{\theta}_1\|^2 + \|\theta_1\|^2) + z_2 (z_3 + z_{f_2} + \alpha_2 + \\ & f_2 + \varphi_2^T \theta_2 + d_2 - \dot{w}_1) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma_2^{-1} \dot{\hat{\theta}}_2. \end{aligned} \quad (31)$$

利用杨氏不等式, 可知存在正数  $\sigma_2$ , 满足

$$|z_2 d_2| \leq \frac{1}{4\sigma_2^2} z_2^2 + (\sigma_2 d_2)^2. \quad (32)$$

设计虚拟控制器

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - \phi z_1 - \tilde{\theta}_2^T \varphi_2 - f_2 - \frac{1}{4\sigma_2^2} z_2^2 + \dot{w}_1, \quad (33)$$

其中  $c_2 > 0$ . 结合式(31)~(33), 可以推出

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_2} \leq & -c_1 \bar{V}_{z_1} - c_2 z_2^2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + (\sigma_1 d_1)^2 + \\ & (\sigma_2 d_2)^2 + z_2 z_3 + z_2 z_{f_2} + \frac{\mu_1}{2} (-\|\tilde{\theta}_1\|^2 + \\ & \|\theta_1\|^2) + \tilde{\theta}_2^T \Gamma_2^{-1} (\dot{\hat{\theta}}_2 - \Gamma_2 z_2 \varphi_2). \end{aligned} \quad (34)$$

自适应律设计为

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \Gamma_2 (z_2 \varphi_2 - \mu_2 \hat{\theta}_2). \quad (35)$$

其中:  $\Gamma_2 = \Gamma_2^T > 0$  为自适应增益矩阵,  $\mu_2 > 0$ . 综合自适应律(35)以及不等式  $-\mu_2 \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 \leq \frac{\mu_2}{2} (-\|\tilde{\theta}_2\|^2 + \|\theta_2\|^2)$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_2} \leq & -c_1 \bar{V}_{z_1} + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \sum_{i=1}^2 (\sigma_i d_i)^2 + \\ & \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{2} (-\|\tilde{\theta}_i\|^2 + \|\theta_i\|^2). \end{aligned} \quad (36)$$

step  $i$  ( $i = 3, 4, \dots, n-1$ ): 对  $z_i$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ z_{i+1} + z_{f_i} + \alpha_i + f_i + \theta_i^T \varphi_i + d_i - \dot{w}_{i-1}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中  $z_{f_i}$  为滤波误差. 设计 Lyapunov 函数为

$$V_{z_i} = V_{z_{i-1}} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i. \quad (38)$$

对式(38)求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_i} &= \dot{V}_{z_{i-1}} + z_i \dot{z}_i + \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i \leq \\ &- c_1 \bar{V}_{z_1} + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} (\sigma_j d_j)^2 + \\ &\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{2} (-\|\tilde{\theta}_j\|^2 + \|\theta_j\|^2) - \sum_{j=2}^{i-1} c_j z_j^2 + \\ &\sum_{j=2}^{i-1} z_j z_{f_j} + z_i (z_{i+1} + z_{f_i} + \alpha_i + \\ &f_i + \theta_i^T \varphi_i + d_i - \dot{w}_{i-1}) + \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i. \end{aligned} \quad (39)$$

利用杨氏不等式, 可知存在正数  $\sigma_i$ , 满足

$$|z_i d_i| \leq \frac{1}{4\sigma_i^2} z_i^2 + (\sigma_i d_i)^2. \quad (40)$$

设计虚拟控制律

$$\alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - \hat{\theta}_i^T \varphi_i - f_i - \frac{1}{4\sigma_i^2} z_i + \dot{w}_{i-1}, \quad (41)$$

其中  $c_i > 0$ . 综合式(39)~(41)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_i} &\leq -c_1 \bar{V}_{z_1} - \sum_{j=2}^i c_j z_j^2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \sum_{j=1}^i (\sigma_j d_j)^2 + \\ &\sum_{j=1}^i \frac{\mu_j}{2} (-\|\tilde{\theta}_j\|^2 + \|\theta_j\|^2) + \\ &\tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} (\dot{\tilde{\theta}}_i - \Gamma_i z_i \varphi_i) + \sum_{j=2}^i z_j z_{f_j}. \end{aligned} \quad (42)$$

据此, 设计参数自适应律为

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = \Gamma_i (z_i \varphi_i - \mu_i \tilde{\theta}_i). \quad (43)$$

其中:  $\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$  为自适应增益矩阵,  $\mu_i > 0$ . 综合自适应律(43)以及不等式  $-\mu_i \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \leq \frac{\mu_i}{2} (-\|\tilde{\theta}_i\|^2 + \|\theta_i\|^2)$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_i} &\leq -c_1 \bar{V}_{z_1} - \sum_{j=2}^i c_j z_j^2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \sum_{j=1}^i (\sigma_j d_j)^2 + \\ &\sum_{j=1}^i \frac{\mu_j}{2} (-\|\tilde{\theta}_j\|^2 + \|\theta_j\|^2) + \sum_{j=2}^i z_j z_{f_j}. \end{aligned} \quad (44)$$

当  $i = n-1$  时, 可得

$$\dot{V}_{z_{n-1}} \leq \lambda_1. \quad (45)$$

其中

$$\lambda_1 = -c_1 \bar{V}_{z_1} - \sum_{j=2}^{n-1} c_j z_j^2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (\sigma_j d_j)^2 +$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu_j}{2} (-\|\tilde{\theta}_j\|^2 + \|\theta_j\|^2) + \\ &\sum_{j=2}^{n-1} z_j z_{f_j} + \frac{z_{n-1}^2}{2} + \frac{z_n^2}{2}. \end{aligned} \quad (46)$$

step  $n$ : 设计如下滑模面:

$$\begin{aligned} s_n &= \\ \gamma \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi + \beta_1 z_n^{\frac{p_1}{p_2}}(t) + \beta_2 \gamma \left( \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{q_1}{q_2}}. \end{aligned} \quad (47)$$

对  $z_n$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \dot{x}_n - \dot{w}_{n-1} = \\ \nu Q(u) + f_n + \theta_n^T \varphi_n + d_n - \dot{w}_{n-1}. \end{aligned} \quad (48)$$

由式(5)可知  $q_2 \leq \bar{a}$ , 为了表达方便, 定义  $\bar{q}_2 = \bar{a}$ ,  $\nu$  为正的有界未知参数, 因此有如下定义:

$$\rho = \sup_{t \geq 0} (\nu \bar{q}_2), \quad (49)$$

显然  $\rho > 0$ . 同时, 由式(4)可知  $q_1$  存在下确界, 因此定义

$$\varsigma = \inf_{t \geq 0} (\nu q_1), \quad \xi = \frac{1}{\varsigma}. \quad (50)$$

其中:  $\varsigma > 0$ ,  $\xi > 0$ . 式(50)中未知参数  $\xi$  需要设计自适应律进行估计.

设计如下控制律:

$$u = - \frac{\beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \hat{\xi}^2 v^2}{\left| \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \hat{\xi} v \right| + \chi}. \quad (51)$$

其中

$$v = f_n - \dot{w}_{n-1} + \hat{\theta}_n^T \varphi_n + \beta_1^{-1} \frac{p_2}{p_1} (\kappa_1 + \kappa_2 z_n^2) s_n, \quad (52)$$

$$\dot{\hat{\xi}} = b \left( \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n v - \varrho \hat{\xi} \right), \quad (53)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \Gamma_n \left( s_n \varphi_n \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} - \mu_n \hat{\theta}_n \right). \quad (54)$$

其中:  $\beta_1, p_1, p_2$  的含义见式(6);  $\chi > 0, \kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$ ;  $\xi$  见式(50)说明;  $\mu_n > 0, b > 0, \varrho > 0$ ;  $\Gamma_n$  为正定对称矩阵. 因为  $1 < \frac{p_1}{p_2} < 2$ , 可以得出控制律中不包含任何负幂次项, 不会产生非奇异现象.

### 4 稳定性分析

**定理1** 对于由式(1)、(2), 控制律(51)、(52), 虚拟控制律(22)、(33)、(41), 以及自适应律(24)、(43)、(53)、(54)所组成的闭环系统, 如果系统满足式(18)、假设1和假设2, 则闭环系统中所有信号全局一致有界, 输出误差在系统运行过程中被约束在  $(-k_b, k_b)$  这一区间内.

证明 选取 Lyapunov 函数

$$V_{s_n} = \frac{1}{2}s_n^2 + V_{z_{n-1}} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \tilde{\theta}_n + \frac{\varsigma}{2b} \tilde{\xi}^2. \quad (55)$$

其中:  $\tilde{\theta}_n = \hat{\theta}_n - \theta_n, \tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$ . 对式(55)求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_n} &= \dot{V}_{z_{n-1}} + s_n \dot{s}_n + \tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_n \leq \\ &\lambda_1 + s_n \left[ \gamma z_n + \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} (\nu q_1 u + \nu \bar{q}_2 + \right. \\ &\left. f_n + \theta_n^T \varphi_n + d_n - \dot{w}_{n-1}) + \right. \\ &\left. \beta_2 \gamma \frac{g_1}{g_2} \left( \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{g_1}{g_2}-1} z_n \right] + \\ &\tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_n + \frac{\varsigma}{b} \tilde{\xi} \dot{\xi}. \end{aligned} \quad (56)$$

由于

$$\begin{aligned} |z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n d_n| &\leq \frac{1}{4} (z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n)^2 + (d_n)^2, \\ |z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \nu \bar{q}_2| &\leq \frac{1}{4} (z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n)^2 + (\nu \bar{q}_2)^2, \\ |\gamma s_n z_n| &\leq \frac{s_n^2}{2} + \frac{(\gamma z_n)^2}{2}, \\ \left| s_n \beta_2 \gamma \frac{g_1}{g_2} \left( \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{g_1}{g_2}-1} z_n \right| &\leq \\ \frac{s_n^2}{2} + \frac{1}{2} \left[ \beta_2 \gamma \frac{g_1}{g_2} \left( \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{g_1}{g_2}-1} \right]^2 z_n^2, \end{aligned} \quad (57)$$

结合式(56)和(57)可以得出

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_n} &\leq \\ &\lambda_1 + s_n^2 + \frac{1}{2} \left( \beta_2 \gamma \frac{g_1}{g_2} \left( \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{g_1}{g_2}-1} \right)^2 z_n^2 + \\ &\frac{(\gamma z_n)^2}{2} + \beta_1 \frac{p_1}{p_2} \left[ \frac{1}{2} (z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n)^2 + (\nu \bar{q}_2)^2 + (d_n)^2 \right] + \\ &s_n \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} (\nu q_1 u + f_n + \theta_n^T \varphi_n - \\ &\dot{w}_{n-1} + v - v) + \tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_n + \frac{\varsigma}{b} \tilde{\xi} \dot{\xi}, \end{aligned} \quad (58)$$

其中  $v$  见式(52)说明. 将控制律(52)和(51)代入式(58)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_n} &\leq \\ &\lambda_1 - \nu q_1 \frac{\left( \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \hat{\xi} v \right)^2}{\left| \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \hat{\xi} v \right| + \chi} + \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n v + \\ &\tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \left( \dot{\tilde{\theta}}_n - \Gamma s_n \varphi_n \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} \right) + \lambda_2 + \frac{\varsigma}{b} \tilde{\xi} \dot{\xi}. \end{aligned} \quad (59)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= - \left( \kappa_1 z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} - \frac{1}{2} \beta_1 \frac{p_1}{p_2} (z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1})^2 - 1 \right) s_n^2 - \\ &\left[ \kappa_2 z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n^2 - \frac{\gamma^2}{2} - \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \left( \beta_2 \gamma \frac{g_1}{g_2} \left( \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{g_1}{g_2}-1} \right)^2 \right] z_n^2 + \\ &\beta_1 \frac{p_1}{p_2} [(\nu \bar{q}_2)^2 + d_n^2]. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} &\frac{\left( \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \hat{\xi} v \right)^2}{\left| \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \hat{\xi} v \right| + \chi} \leq \\ &\varsigma \left( \chi - \beta_1 \frac{p_1}{p_2} z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n \hat{\xi} v \right), \end{aligned} \quad (60)$$

所以将式(60)代入(59),应用自适应律(53)和(54)可得

$$\dot{V}_{s_n} \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \varsigma \chi - \varsigma \rho \tilde{\xi} \dot{\xi} - \mu_n \tilde{\theta}_n^T \dot{\tilde{\theta}}_n. \quad (61)$$

应用杨氏不等式,可以得到

$$\dot{V}_{s_n} \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (62)$$

其中

$$\lambda_3 = \varsigma \chi - \varsigma \frac{\rho}{2} \tilde{\xi}^2 - \frac{\mu_n}{2} \|\tilde{\theta}_n\|^2 + \frac{\rho}{2} \xi + \frac{\mu_n}{2} \|\theta_n\|^2.$$

由于

$$|z_i z_{f_i}| \leq \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} z_{f_i}^2, \quad (63)$$

将式(46)中的  $\lambda_1$  代入(62),结合(63)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_n} &\leq \lambda_2 + \lambda_3 - c_1 \phi z_1^2 - \sum_{j=2}^{n-1} c_j z_j^2 + \frac{z_{f_1}^2}{2} + \\ &\sum_{j=1}^{n-1} (\sigma_j d_j)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu_j}{2} (-\|\tilde{\theta}_j\|^2 + \|\theta_j\|^2) + \\ &\sum_{j=2}^{n-1} \frac{z_j^2}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{z_{f_j}^2}{2} + \frac{z_{n-1}^2}{2} + \frac{z_n^2}{2}. \end{aligned} \quad (64)$$

选取 Lyapunov 函数

$$L = V_{s_n} + \sum_{k=1}^{n-1} V_{z_{f_k}}, \quad (65)$$

其中  $V_{z_{f_k}} = \frac{1}{2} z_{f_k}^2$ . 对滤波误差的函数  $V_{z_{f_k}}$  求导可得

$$\dot{V}_{z_{f_k}} = z_{f_k} \dot{z}_{f_k} \leq -\frac{z_{f_k}^2}{\tau_k}. \quad (66)$$

将  $\lambda_2, \lambda_3$  代入式(64),并结合(65)和(66),可以推出

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \\ &\dot{V}_{s_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \dot{V}_{z_{f_k}} \leq \\ &- c_1 \bar{V}_{z_1} - \sum_{j=2}^{n-2} \left( c_j - \frac{1}{2} \right) z_j^2 - (c_{n-1} - 1) z_{n-1}^2 - \\ &\sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\tau_k} - \frac{1}{2} \right) z_{f_k}^2 - \left[ \kappa_2 z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} s_n^2 - \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \left( \beta_2 \gamma \frac{g_1}{g_2} \left( \int_0^t z_n(\varpi) d\varpi \right)^{\frac{g_1}{g_2}-1} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{2} \right] z_n^2 - \\ &\left( \kappa_1 z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1} - \frac{1}{2} \beta_1 \frac{p_1}{p_2} (z_n^{\frac{p_1}{p_2}-1})^2 - 1 \right) s_n^2 - \\ &\varsigma \frac{\rho}{2} \tilde{\xi}^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{2} \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\sigma_k d_k)^2 + \varsigma \chi + \end{aligned}$$

$$\frac{\varrho}{2}\xi + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{2} \|\theta_i\|^2 + \beta_1 \frac{p_1}{p_2} [(\nu\bar{q}_2)^2 + d_n^2] \leq -2\eta L + K^* \tag{67}$$

其中

$$\eta =$$

$$\min\left\{c_1, \left(c_j - \frac{1}{2}\right), (c_{n-1} - 1), \left(\frac{1}{\tau_k} - \frac{1}{2}\right), \left[\kappa_2 z_n^{\frac{p_1-1}{p_2}} s_n^2 - \frac{1}{2} \left(\beta_2 \gamma \frac{g_1}{g_2} \left(\int_0^t z_n(\varpi) d\varpi\right)^{\frac{g_1}{g_2}-1}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{2}\right], \left[\kappa_1 z_n^{\frac{p_1-1}{p_2}} - \frac{1}{2} \beta_1 \frac{p_1}{p_2} (z_n^{\frac{p_1-1}{p_2}})^2 - 1\right], \varsigma \frac{\varrho}{2}, \frac{\mu_i}{2}\right\},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 2, 3, \dots, n - 2,$$

$$k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

由假设1可知,  $|d_k| \leq D_k$ , 又从式(49)中可知  $|\nu\bar{q}_2| \leq \rho$ , 式(67)中

$$K^* = \sum_{k=1}^{n-1} (\sigma_k D_k)^2 + \varsigma \chi + \frac{\varrho}{2} \xi + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{2} \|\theta_j\|^2 + \beta_1 \frac{p_1}{p_2} (\rho^2 + D_n^2). \tag{68}$$

因此

$$\dot{L}(t) \leq -2\eta L + K^*. \tag{69}$$

由式(69)可得

$$0 \leq L(t) \leq \frac{K^*}{2\eta} + \left[L(0) - \frac{K^*}{2\eta}\right] e^{-2\eta t}. \tag{70}$$

从式(70)可以看出,  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 及参数  $\xi$ 、 $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 是有界的. 进一步地, 可以看出  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )、 $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) 以及控制输入  $u$  等信号也是有界的.

同时, 由式(70)可以推出  $V_{z_1}$  是有界的, 这意味着

$$\left| \frac{k_b^2(t)}{\pi} \cot \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) \right| < +\infty, \forall t \geq 0. \tag{71}$$

由式(18)可知

$$0 < 1 - \frac{z_1^2(0)}{k_b^2(0)} \leq 1. \tag{72}$$

结合(71)和(72), 可知下式成立:

$$0 < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z_1^2}{k_b^2}\right) \leq \frac{\pi}{2}, \forall t \geq 0. \tag{73}$$

即  $|z_1| < k_b$  在闭环系统运行中成立.  $\square$

**注4** 由于  $p_1$ 、 $p_2$  均为大于0的奇数, 且  $\frac{p_1}{p_2} > 1$ ,

有  $z_n^{\frac{p_1-1}{p_2}} > 0$ .

### 5 仿真验证与分析

为了验证本文所提 IAFNTSMC 算法的有效性, 将本文所提算法与同类文献的研究成果进行对比. 仿真中所采用的系统模型<sup>[25]</sup>为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1 + \theta_1^T \varphi_1 + d_1, \\ \dot{x}_2 = \nu Q(u) + \cos(x_1 + x_2) + \theta_2^T \varphi_2 + d_2, \\ y = x_1. \end{cases} \tag{74}$$

其中:  $\nu = 19$ ;  $\varphi_1 = [x_1, x_1^2]^T$ ,  $\varphi_2 = [x_1 \sin x_1, x_2^2]^T$ ;  $\theta_1 = [1, 1]^T$  和  $\theta_2 = [1, 1.2]^T$  为未知常数向量, 它们的真实值分别为  $\theta_1 = [1, 1]^T$  和  $\theta_2 = [1, 1.2]^T$ . 仿真中的未知扰动真实值取  $d_1 = 0.1(x_1 - 0.5 \sin t) \cos x_1^2$  及  $d_2 = 0.1 \sin^2(x_1 + x_2)$ . 系统初态为  $x_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = 0$ . 参考信号为  $y_r = 0.5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ .

#### 5.1 对比1

本节开展滑模面性能对比.

方案1: 利用算法(51)~(54)进行仿真, 滑模面选用本文设计的改进型积分滑模面(6).

方案2: 利用算法(51)~(54)进行仿真, 滑模面选用文献[16]设计的积分滑模面.

方案1中参数取为  $c_1 = 45$ ,  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 1$ ,  $\sigma_1 = 0.5$ ,  $k_{b0} = 0.8$ ,  $k_{b\infty} = 0.02$ ,  $\vartheta = 5$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.001$ ,  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 3$ ,  $g_1 = 13$ ,  $g_2 = 3$ ,  $\beta_1 = 1.2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\gamma = 55$ ,  $\tau_1 = 0.01$ ,  $\chi = 3$ ,  $b = 0.000\ 006$ ,  $\varrho = 0.1$ ,  $\Gamma_1 = \text{diag}(0.001, 0.001)$ ,  $\Gamma_2 = \text{diag}(0.001, 0.001)$ ; 量化器参数均取为  $a = 0.02$ ,  $\delta = 0.2$ . 方案2选用与本文算法仿真中相同的增益或设计参数(文献[16]所提算法不含参数  $\gamma$ ). 仿真结果见图1~图4. 从图1和图2可以看出, 方案1和方案2均可实现系统输出对期望轨迹的快速收敛, 并将输出误差约束在  $(-k_b, k_b)$ , 但方案1的跟踪精度更好, 收敛速度更快一些. 图3为系统的控制输入  $u$ , 图4为控制输入在量化后的取值  $Q(u)$ .

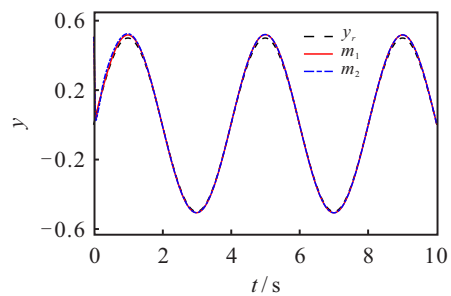


图1 系统输出信号(对比1)

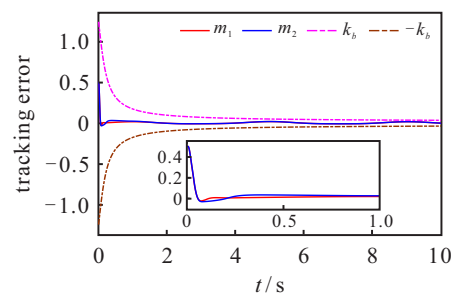


图2 输出误差(对比1)

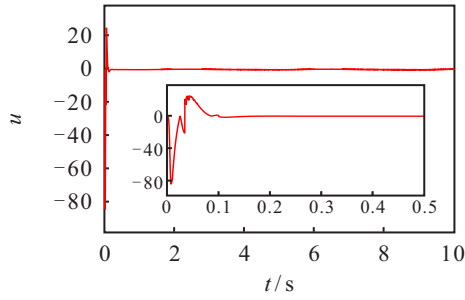


图3 控制输入 $u$ (方案1)

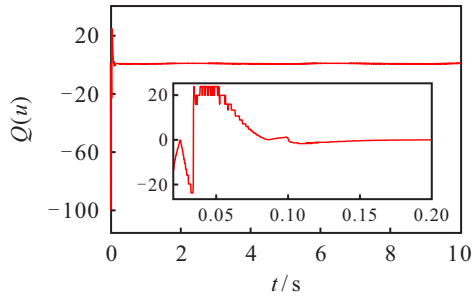


图4 量化输入 $Q(u)$ (方案1)

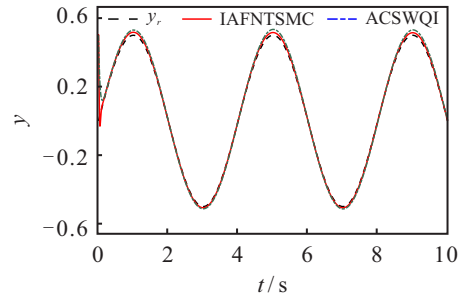


图5 系统输出信号(对比2)

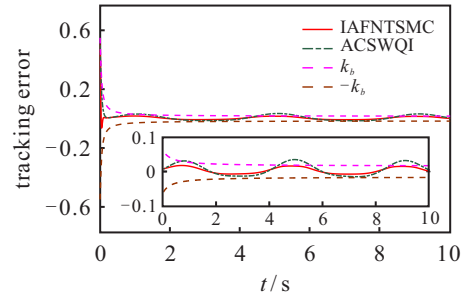


图6 输出误差(对比2)

5.2 对比2

将本文所提 IAFNTSMC 算法与如下文献 [19] 所提的无输出约束自适应反演量化输入控制算法 (adaptive control scheme with quantized input, ACSWQI) 进行闭环系统误差约束性能对比:

$$u = \left[ - \left( c_2 + \frac{1}{2} \right) z_2 - \cos(x_1 + x_2) - \hat{\theta}_2^T \varphi_2 + \dot{\alpha}_1 - (1 - \delta)a \tanh \left( \frac{z_2}{\varepsilon} \right) \right] / \left[ 1 + \delta \tanh \left( \frac{z_2}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{1}{4\sigma_2^2} z_2. \tag{75}$$

其中

$$\alpha_1 = - \left( c_1 + \frac{1}{2} \right) z_1 - \sin x_1 + \dot{y}_r - \hat{\theta}_1^T \varphi_1 - \frac{1}{4\sigma_1^2} z_1, \tag{76}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_i (\varphi_i z_i - \zeta_i \hat{\theta}_i), \quad i = 1, 2. \tag{77}$$

仿真中, IAFNTSMC 算法的参数取为  $k_{b0} = 0.35$ ,  $k_{b\infty} = 0.01$ ,  $\vartheta = 25$ ,  $b = 0.000\ 004$ . ACSWQI 算法的参数取为  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}(1, 1)$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1$ . IAFNTSMC 算法其他参数以及量化器参数取值与对比1中相同. 从图5可以看出, 两种控制方法都可以取得较好的输出轨迹跟踪性能. 由图6可见, IAFNTSMC 算法可以确保输出误差被约束在  $(-k_b, k_b)$  内, ACSWQI 算法无法实现将输出误差约束在预设的界内.

由以上两个对比可以看出, 本文所设计的滑模面有助于加快闭环系统收敛速度, 本文所设计的控制算法可以将输出误差约束于预设的界内.

6 结论

本文研究非线性系统在量化输入和输出受限情形下的轨迹跟踪问题, 提出了一套自适应非奇异终端滑模控制方法. 本文构造了一种新型的时变约束障碍 Lyapunov 函数, 用于实现对系统运行期间的输出误差进行随时间变化的幅值约束. 为提高闭环系统的误差收敛速度, 文中给出了一种新型的滑模面构造方案. 仿真对比结果验证了本文所提方法的有效性.

参考文献 (References)

- [1] Gilbert E G, Tan K T. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36(9): 1008-1020.
- [2] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.
- [3] Kogiso K, Hirata K. Reference governor for constrained systems with time-varying references[C]. 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems. Heidelberg, 2006: 359-364.
- [4] Jin X, Wang Z W, Kwong R H S. Convex optimization based iterative learning control for iteration-varying systems under output constraints[C]. 2014 11th IEEE International Conference on Control & Automation. Taichung, 2014: 1444-1448.
- [5] Ngo K B, Mahony R, Jiang Z P. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints[C]. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Seville, 2006: 8306-8312.
- [6] Jin X, Xu J X. Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric

- and nonparametric uncertainties[J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2508-2516.
- [7] Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 918-927.
- [8] 陈强, 丁科新, 南余荣. 带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(2): 387-394.  
(Chen Q, Ding K X, Nan Y R. Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(2): 387-394.)
- [9] Wang F, Wang J M, Wang K, et al. Adaptive backstepping sliding mode control of uncertain semi-strict nonlinear systems and application to permanent magnet synchronous motor[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2021, 34(2): 552-571.
- [10] Yu X H, Zhihong M. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(2): 261-264.
- [11] 崔凯凯, 韩维, 张勇, 等. 基于低通非奇异终端滑模引导的舰载机抗侧风着舰控制技术[J]. *控制与决策*, 2022, 37(9): 2255-2264.  
(Cui K K, Han W, Zhang Y, et al. Anti crosswind carrier landing control technology based on low pass nonsingular terminal sliding mode guidance[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(9): 2255-2264.)
- [12] 陈正升, 王雪松, 程玉虎. 考虑扰动与输入饱和的机械臂连续非奇异快速终端滑模控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(4): 903-912.  
(Chen Z S, Wang X S, Cheng Y H. Continuous non-singular fast terminal sliding mode control of robotic manipulators considering disturbance and input saturation[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(4): 903-912.)
- [13] 赵振华, 肖亮, 姜斌, 等. 基于扩张状态观测器的四旋翼无人机快速非奇异终端滑模轨迹跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(9): 2201-2210.  
(Zhao Z H, Xiao L, Jiang B, et al. Fast nonsingular terminal sliding mode trajectory tracking control of a quadrotor UAV based on extended state observers[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(9): 2201-2210.)
- [14] 余伶俐, 况宗旭, 王正久, 等. 智能车辆队列横纵向有限时间滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2021, 38(8): 1299-1312.  
(Yu L L, Kuang Z X, Wang Z J, et al. Intelligent vehicle platoon lateral and longitudinal control based on finite-time sliding mode control[J]. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(8): 1299-1312.)
- [15] Qiao L, Zhang W D. Adaptive non-singular integral terminal sliding mode tracking control for autonomous underwater vehicles[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(8): 1293-1306.
- [16] Qiao L, Zhang W D. Trajectory tracking control of AUVs via adaptive fast nonsingular integral terminal sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, 16(2): 1248-1258.
- [17] Liu L, Ding S H, Yu X H. Second-order sliding mode control design subject to an asymmetric output constraint[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(4): 1278-1282.
- [18] Yang S B, Wang X, Wang H N, et al. Sliding mode control with system constraints for aircraft engines[J]. *ISA Transactions*, 2020, 98: 1-10.
- [19] Xing L T, Wen C Y, Su H Y, et al. A new adaptive control scheme for uncertain nonlinear systems with quantized input signal[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(12): 5599-5610.
- [20] Zhou J, Wen C Y, Wang W. Adaptive control of uncertain nonlinear systems with quantized input signal[J]. *Automatica*, 2018, 95: 152-162.
- [21] 朱新峰, 丁文武, 张天平. 具有输入量化和全状态约束的非严格反馈随机非线性系统的有限时间动态面控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(10): 2575-2584.  
(Zhu X F, Ding W W, Zhang T P. Finite-time dynamic surface control for nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with input quantization and full-state constraints[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(10): 2575-2584.)
- [22] Li Y X, Yang G H. Adaptive asymptotic tracking control of uncertain nonlinear systems with input quantization and actuator faults[J]. *Automatica*, 2016, 72: 177-185.
- [23] 秦贞华, 何熊熊, 李刚, 等. 考虑量化输入和输出约束的互联系统自适应分散跟踪控制[J]. *自动化学报*, 2021, 47(5): 1111-1124.  
(Qin Z H, He X X, Li G, et al. Adaptive decentralized tracking control for nonlinear interconnected systems with input quantization and output constraints[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(5): 1111-1124.)
- [24] 王焕清, 陈明, 刘晓平. 一类非线性系统模糊自适应固定时间量化反馈控制[J]. *自动化学报*, 2021, 47(12): 2823-2830.  
(Wang H Q, Chen M, Liu X P. Fuzzy adaptive fixed-time quantized feedback control for a class of nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(12): 2823-2830.)
- [25] Cai J P, Mei C L, Yan Q Z. Semi-global adaptive backstepping control for parametric strict-feedback systems with non-triangular structural uncertainties[J]. *ISA Transactions*, 2022, 126: 180-189.
- [26] Wang C L, Wen C Y, Lin Y, et al. Decentralized adaptive tracking control for a class of interconnected nonlinear systems with input quantization[J]. *Automatica*, 2017, 81: 359-368.

## 作者简介

杨启尧(1980—), 男, 副教授, 博士, 从事自适应控制、迭代学习控制等研究, E-mail: yangqy@hdu.edu.cn;

彭冬亮(1977—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多源信息融合、自适应控制等研究, E-mail: dlpeng@hdu.edu.cn;

蔡建平(1975—), 男, 教授, 博士, 从事非线性系统、自适应控制等研究, E-mail: caijianping2001@163.com.