



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

# 控制与决策

CONTROL AND DECISION



未知初始跟踪条件的非线性系统预设性能有限时间有界 $H_\infty$ 控制

李小华, 包海强, 刘辉

引用本文:

李小华,包海强,刘辉. 未知初始跟踪条件的非线性系统预设性能有限时间有界 $H_\infty$ 控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(7): 2215–2223.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2022.1537>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 纵向速度和艏向角受限的水面艇有限时间协同路径跟踪

Finite-time cooperative path following of surface vessels with surge velocity and yaw angle constraints

控制与决策. 2021, 36(2): 363–370 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0977>

#### 航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

控制与决策. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

#### 输出误差约束下四旋翼无人机预定性能反步控制

Prescribed performance backstepping control for quadrotor UAV with output error constraint

控制与决策. 2021, 36(5): 1059–1068 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1249>

#### 基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

#### 一类非线性大系统分散自适应预设性能有限时间跟踪控制

Decentralized adaptive prescribed performance finite-time tracking control for a class of large-scale nonlinear systems

控制与决策. 2020, 35(12): 3045–3052 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0623>

# 未知初始跟踪条件的非线性系统预设性能 有限时间有界 $H_\infty$ 控制

李小华<sup>†</sup>, 包海强, 刘辉

(辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁鞍山 114051)

**摘要:** 研究一类具有外部扰动的非线性系统在初始跟踪条件未知情况下的预设性能有限时间有界  $H_\infty$  控制问题. 针对预设性能控制设计, 提出一个新的误差转换思想, 并据此设计新的预设性能函数, 解决预设性能控制依赖于系统被约束量初始条件的问题. 基于所提出预设性能函数、有限时间控制理论以及有界  $H_\infty$  的设计方法, 获得系统无需初始跟踪条件的预设性能有限时间有界  $H_\infty$  控制器, 同时解决非线性系统在有界稳定情况下难以设计  $H_\infty$  控制器的问题, 保证跟踪误差以预先设定的动态性能在有限时间内收敛至平衡点附近的小邻域内, 并对外部干扰有较强的鲁棒性能.

**关键词:** 非线性系统; 未知初始条件; 预设性能控制; 有限时间控制; 有界  $H_\infty$  控制; 自适应控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1537

**引用格式:** 李小华, 包海强, 刘辉. 未知初始跟踪条件的非线性系统预设性能有限时间有界  $H_\infty$  控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(7): 2215-2223.

## Finite-time bounded- $H_\infty$ control with prescribed performance for nonlinear systems with unknown initial tracking conditions

LI Xiao-hua<sup>†</sup>, BAO Hai-qiang, LIU Hui

(School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China)

**Abstract:** The problem of prescribed performance finite-time bounded- $H_\infty$  tracking control is investigated for a class of nonlinear systems with unknown initial tracking conditions and external disturbances. A new error transformation idea is proposed aiming at the design of prescribed performance control. On this basis, the new prescribed performance functions are designed to solve the problem that the prescribed performance control depends on the initial condition of the constrained variable. By means of the prescribed performance functions, finite-time control theory and bounded- $H_\infty$  design method, a prescribed performance finite-time bounded- $H_\infty$  tracking controller is obtained, which is independent of the initial tracking condition. Meanwhile, the problem that it is difficult to design the  $H_\infty$  controller for a nonlinear system with bounded stability is solved. The designed controller ensures that the tracking error converges to a small neighbourhood near the equilibrium point with prespecified dynamic performance within a finite time, and has stronger robustness to external disturbances.

**Keywords:** nonlinear systems; unknown initial condition; prescribed performance control; finite-time control; bounded- $H_\infty$  control; adaptive control

## 0 引言

由于预设性能控制可同时保证系统的动态性能和稳态性能, 目前已在非线性系统控制领域得到了广泛研究, 并取得了大量研究成果<sup>[1-3]</sup>. 这种控制设计一般是先对被控制量作一个误差转换, 再用一个预设

性能函数对转换后的变量进行设计. 设计时常采用障碍 Lyapunov 函数, 根据使用的障碍 Lyapunov 函数不同可分为对数型函数<sup>[4]</sup>、分数型函数<sup>[5]</sup>、正切型函数<sup>[6]</sup>、积分型函数<sup>[7]</sup>等. 这些设计方法虽然十分有效, 但是存在一个缺陷, 即其要求被控制量的初始值必须

收稿日期: 2022-08-29; 录用日期: 2023-04-03.

基金项目: 国家自然科学基金联合基金项目(U21A20483); 吉林大学汽车仿真与控制国家重点实验室开放基金项目(20210219).

责任编辑: 周彬.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: lixiaohua6412@163.com.

是已知的,且必须在预设性能函数初始值的范围内.这个条件并不是所有的系统均能够满足的,对于一些未知初始条件的系统,这个控制方法的应用会受到限制.因此,文献[8]通过使用一种转换函数将被约束量未知的初始条件转变为0,从而去掉了对其初始条件的限制.但是,这种方法的设计过程由于引入了其他函数而变得较为复杂.

$H_\infty$  控制对外部扰动具有良好的抑制作用,近年来已取得了很多研究成果<sup>[9-16]</sup>.但是,这些研究均是在保证系统为渐近稳定的前提下才能设计  $H_\infty$  控制器,对于只能达到有界稳定的情况则难以达到  $H_\infty$  控制设计的基本条件.而对于非线性系统而言,能够达到渐近稳定的系统是不多的,使得非线性系统的抗外部干扰能力设计受到限制.为了解决这个问题,文献[17]提出了非线性系统的有界  $H_\infty$  控制设计方法,文献[18]利用该方法解决了一类机械臂系统在输出受限情况下的有限时间有界  $H_\infty$  跟踪控制问题.但是,这些方法没有考虑有界  $H_\infty$  控制与系统初始条件无关的预设性能控制方法相结合的控制设计.

本文在已有文献的基础上,结合与初始条件无关的预设性能设计方法和有界  $H_\infty$  控制方法,以及有限时间控制理论,研究在初始跟踪条件未知情况下的预设性能有限时间有界  $H_\infty$  控制问题,解决预设性能设计依赖于系统初始条件的问题,所提出误差转换函数简化了有界  $H_\infty$  控制设计.所设计控制器能够保证跟踪误差在有限时间内收敛至平衡点附近的邻域内,同时可有效地抑制外部扰动.

## 1 系统描述与预备知识

### 1.1 系统描述

考虑如下不确定高阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + d_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = g_n(\bar{x}_n)u + f_n(\bar{x}_n) + d_n(t); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为系统状态,  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$ ,  $u \in R$  和  $y \in R$  分别为系统的输入和输出,  $g_i(\bar{x}_i)$ 、 $f_i(\bar{x}_i)$  均为未知的非线性函数,  $d_i(t) \in L_2[0, \infty)$  为外部扰动.考虑系统的跟踪控制问题,但是跟踪初始条件  $x_1(0)$  未知.为了便于书写,下文设计中将函数  $g_i(\bar{x}_i)$ 、 $f_i(\bar{x}_i)$  和  $d_i(t)$  分别简写为  $g_i$ 、 $f_i$  和  $d_i$ .

**假设1** 被跟踪的参考输入  $y_r$  及其各阶导数已知,且连续有界.

**假设2**<sup>[18]</sup> 函数  $g_i(\bar{x}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 有界且函数符号已知,并存在未知正常数  $a_m$  使得  $0 < a_m \leq$

$|g_i(\bar{x}_i)| < \infty$ .不失一般性,假设  $g_i(\bar{x}_i) > 0$ .

本文的控制目标:针对非线性系统(1)设计一个不依赖于系统初始跟踪条件的自适应神经预设性能有限时间有界  $H_\infty$  跟踪控制器,使得:1)系统输出能够准确地跟踪参考输入;2)当  $t \geq T$  时,系统跟踪误差  $e_1(t) = y - y_r$  被约束于预设性能范围内,且在有限时间内收敛至平衡点附近的小邻域内,其中  $T$  为跟踪误差进入预设性能区域的时间;3)闭环系统是实际有限时间稳定的,所有信号均有界;4)系统满足有限时间有界  $H_\infty$  性能指标.

### 1.2 预备知识

为了得到本文的结果,下面给出一些引理和定义.

**引理1**<sup>[19]</sup> 对于  $\psi, \varphi \in R$ ,如下不等式恒成立:

$$\psi\varphi \leq \frac{a}{a+b}|\psi|^a + \frac{1}{b}|\varphi|^b.$$

**引理2**<sup>[20]</sup> 对于非线性系统(1),假设存在一个定义在原点邻域  $\Omega \rightarrow R^n$  内的  $C^1$  函数  $V(x) : \Omega \rightarrow R$  和实数  $\vartheta_0 > 0, 0 < \ell < 1$  和  $0 < \eta_0 < \infty$ ,若  $V(x)$  在  $\Omega$  上是正定的且  $V(0) = 0$ ,如下不等式成立:

$$\dot{V}(x) \leq -\vartheta_0 V^\ell(x) + \eta_0,$$

则系统(1)是实际有限时间稳定的.

**定义1**<sup>[18]</sup> 对于系统(1),若对于任意的初始状态,存在一个连续可导函数  $V(x(t))$ ,有  $V(x(0)) > 0$ ,且满足  $\dot{V}(x) \leq -\vartheta_0 V^\ell(x) + \eta_0$ ,并有

$$\int_0^t \|e_1(s)\|^2 ds \leq V(x(0)) + \bar{\gamma}^2 \int_0^t \|d(s)\|^2 ds, \quad (2)$$

则系统(1)具有有限时间有界  $H_\infty$  性能,其中  $\bar{\gamma}$  为干扰抑制系数,式(2)为有界  $H_\infty$  性能指标.

## 2 主要结果

### 2.1 一个不依赖于系统被约束量初始条件的预设性能控制新方法

按照本文的控制目标,跟踪误差  $e_1(t)$  需满足

$$-p_1(t) < e_1(t) < p_1(t). \quad (3)$$

其中:预设性能函数为  $p_1(t) = (p_0 - p_\infty)e^{-\lambda(t-T)} + p_\infty$ ,  $p_0 > p_\infty > 0, \lambda > 0, T > 0$  为设计参数.

**注1** 式(3)的预设性能函数与经典预设性能函数  $p(t) = (p_0 - p_\infty)e^{-\lambda t} + p_\infty$  是不同的,加入了一个  $T > 0$  的设计参数,表示跟踪误差进入预设性能区域的时间,它是可以预先设定的.

由于一般的预设性能控制  $e_1(t)$  必须满足  $-p_1(0) < e_1(0) < p_1(0)$  的初始条件,而本文考虑  $e_1(0)$  是未知的,这个条件是无法满足的.为了获得本文的控制目标,设计新的误差转换函数,即首先使用双曲正切函数对  $e_1(t)$  进行饱和非线性变换,得到映射函

数

$$w(e_1(t)) = \tanh(e_1(t)). \quad (4)$$

这里将对 \$e\_1(t)\$ 的约束转换为对函数 \$w(e\_1(t))\$ 的约束, 考虑这个预设性能约束函数为 \$p\_2(t)\$, 即

$$-p_2(t) < w(e_1(t)) < p_2(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

设计 \$p\_2(t)\$ 为

$$p_2(t) = M e^{-\tau t} \left( \frac{v_1(t) - v_2}{v_0} \right) + \tanh(p_1(t)). \quad (6)$$

$$v_1(t) = \begin{cases} \left( v_0 - \frac{t}{T} \right) e^{(1-\frac{\tau}{T}t)} + v_2, & 0 \leq t < T; \\ v_2, & t \geq T. \end{cases} \quad (7)$$

其中: \$M \geq 1, \tau > 0, v\_0 \geq 1\$ 以及 \$v\_2 > 0\$ 为设计参数.

**注2** 由 \$M \geq 1\$, 有 \$p\_2(0) > 1\$, 而 \$w(e\_1(t))\$ 函数的界为 \$(-1, 1)\$, 因此无论 \$e\_1(0)\$ 为何值, 其初始条件一定满足 \$|w(e\_1(0))| < p\_2(0)\$, 所提出方法可做到与初始跟踪误差 \$e\_1(0)\$ 无关. 所提出的预设性能新方法可通过式(5)来获得(3)的控制目标.

**定理1** 若式(5)成立, 则当 \$t \geq T\$ 时, \$-p\_1(t) < e\_1(t) < p\_1(t)\$ 成立.

证明略.

### 2.2 控制器设计

基于反步法, 首先定义如下误差变换:

$$e_1 = x_1 - y_r; \quad (8)$$

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (9)$$

其中 \$\alpha\_{i-1}\$ 为系统的虚拟控制律.

在推导过程中使用了神经网络逼近未知函数 \$\bar{f}\_i(Z\_i)\$, 即

$$\bar{f}_i(Z_i) = W_i^{*T} S_i(Z_i) + \varepsilon_i(Z_i), \quad \forall Z_i \in \Omega \subset R^q. \quad (10)$$

其中: \$Z\_i\$ 为输入向量; \$q\$ 为输入向量的维数; \$W\_i^{\*T}\$ 为理想权向量; \$S\_i(Z\_i)\$ 为高斯基函数向量; \$\varepsilon\_i(Z\_i)\$ 为逼近误差且满足 \$|\varepsilon\_i(Z\_i)| \leq \bar{\varepsilon}\_i, \bar{\varepsilon}\_i\$ 为有界正常数. 因此, 定义未知参数

$$\theta_i = \|W_i^{*T}\|^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

式中: \$\hat{\theta}\_i\$ 为 \$\theta\_i\$ 的估计值, \$\tilde{\theta}\_i = \theta\_i - \hat{\theta}\_i\$ 为估计误差.

为了利用障碍型 Lyapunov 函数确保式(5)成立, 定义变量

$$h = \frac{p_2 w}{p_2^2 - w^2}. \quad (11)$$

同时, 为了便于设计有限时间控制和有界 \$H\_\infty\$ 控制, 另取一个新的误差转换, 即

$$\sigma = e_1 + c_0 h, \quad (12)$$

其中 \$c\_0 > 0\$ 为设计常数. 由式(12), 有

$$\dot{\sigma} = F \dot{e}_1 - \dot{Q}. \quad (13)$$

式中

$$F = 1 + \frac{c_0(p_2 w^2 + p_2^3)}{\cosh^2(e_1)(p_2^2 - w^2)^2} > 0, \\ Q = \frac{c_0(\dot{p}_2 p_2^2 w + \dot{p}_2 w^3)}{(p_2^2 - w^2)^2}.$$

step 1: 由式(13), 得到

$$\dot{\sigma} = F \left( g_1 z_2 + g_1 \alpha_1 + f_1 + d_1 - \dot{y}_r - \frac{Q}{F} \right). \quad (14)$$

选择 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{a_m}{2r_1} \tilde{\theta}_1^2, \quad (15)$$

其中 \$r\_1 > 0\$ 为设计常数. 由式(14)和(15), 得到

$$\dot{V}_1 = \sigma F \left( g_1 z_2 + g_1 \alpha_1 + f_1 + d_1 - \dot{y}_r - \frac{Q}{F} \right) - \frac{a_m}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1. \quad (16)$$

由引理1, 有

$$g_1 F \sigma z_2 \leq \frac{1}{2} g_1 F^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} g_1 z_2^2, \quad (17)$$

$$F \sigma d_1 \leq \frac{1}{2\gamma^2} F^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 d_1^2, \quad (18)$$

其中 \$\gamma > 0\$ 为设计参数. 将式(17)和(18)代入(16), 并通过加减项 \$k\_1 \sigma^{2\ell}, e\_1 \sigma\$, 得到

$$\dot{V}_1 \leq \sigma F (g_1 \alpha_1 + \bar{f}_1(X_1)) + \frac{1}{2} g_1 z_2^2 - k_1 \sigma^{2\ell} + \frac{1}{2} \gamma^2 d_1^2 - e_1^2 - c_0 e_1 h - \frac{a_m}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1. \quad (19)$$

其中: \$X\_1 = [x\_1, y\_r, \dot{y}\_r, p\_1, \dot{p}\_1, p\_2, \dot{p}\_2]^T, \frac{1}{2} < \ell < 1, k\_1\$ 为设计中引入的辅助参数,

$$\bar{f}_1(X_1) = f_1 - \dot{y}_r - \frac{Q}{F} + \frac{1}{2} g_1 \sigma F + \frac{1}{2\gamma^2} F \sigma + \frac{e_1 + k_1 \sigma^{2\ell-1}}{F}.$$

采用 RBF 神经网络逼近未知函数 \$\bar{f}\_1(X\_1)\$, 得到 \$\bar{f}\_1(X\_1) = W\_1^{\*T} S\_1(X\_1) + \varepsilon\_1(X\_1) (|\varepsilon\_1(X\_1)| \leq \bar{\varepsilon}\_1)\$. 由引理1可知

$$\sigma F \bar{f}_1 \leq \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \theta_1 S_1^T S_1 \sigma^2 + \frac{1}{2a_m} \rho^2 + \frac{a_m}{2\gamma^2} F^2 \sigma^2 + \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_1^2, \quad (20)$$

其中 \$\rho > 0\$ 为设计参数. 选择虚拟控制律为

$$\alpha_1 = - \left( \frac{c_1 \sigma}{F} + \frac{1}{2\rho^2} F \hat{\theta}_1 S_1^T S_1 \sigma + \frac{1}{2\gamma^2} F \sigma \right), \quad (21)$$

式中 \$c\_1 > 0\$ 为设计参数. 由假设2和式(21), 得到

$$g_1 \sigma F \alpha_1 \leq - a_m c_1 \sigma^2 - \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \hat{\theta}_1 S_1^T S_1 \sigma^2 - \frac{a_m}{2\gamma^2} F^2 \sigma^2. \quad (22)$$

将式(20)~(22)代入(19), 且由式(4)和(11)可知, \$e\_1\$ 与 \$h\$ 二者同号, 所以 \$c\_0 e\_1 h > 0\$, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} + \frac{1}{2} g_1 z_2^2 + \\ & \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 \sigma^2 + \frac{1}{2a_m} \rho^2 + \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_1^2 + \\ & \frac{1}{2} \gamma^2 d_1^2 - e_1^2 - \frac{a_m}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\theta}_1. \end{aligned} \quad (23)$$

step 2: 根据  $z_2 = x_2 - \alpha_1$ , 对  $z_2$  求导, 得到

$$\dot{z}_2 = g_2 z_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 + d_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} d_1 - \xi_1, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{j=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)} + \\ & \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_k^{(j)}} p_k^{(j+1)}. \end{aligned}$$

选择 Lyapunov 函数为

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{a_m}{2r_2} \tilde{\theta}_2^2, \quad (25)$$

其中  $r_2 > 0$  为设计常数. 对  $V_2$  求导, 并结合式(23)和(24), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} + \frac{1}{2} g_1 z_2^2 + \\ & \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 \sigma^2 + \frac{1}{2a_m} \rho^2 + \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}^2 + \\ & \frac{1}{2} \gamma^2 d_1^2 - e_1^2 - \sum_{j=1}^2 \frac{a_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + z_2 (g_2 z_3 + \\ & g_2 \alpha_2 + f_2 + d_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} d_1 - \xi_1). \end{aligned} \quad (26)$$

由引理1, 有

$$g_2 z_2 z_3 \leq \frac{1}{2} g_2 z_2^2 + \frac{1}{2} g_2 z_3^2, \quad (27)$$

$$z_2 d_2 \leq \frac{1}{2\gamma^2} z_2^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 d_2^2, \quad (28)$$

$$-z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} d_1 \leq \frac{1}{2\gamma^2} z_2^2 \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 d_1^2. \quad (29)$$

将式(27)~(29)代入(26), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -c_1 a_m \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} + \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 \sigma^2 - e_1^2 + \\ & \frac{1}{2a_m} \rho^2 + \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_1^2 + \gamma^2 d_1^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 d_2^2 - \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{a_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j - k_2 z_2^{2\ell} + \frac{1}{2} g_2 z_3^2 + z_2 (g_2 \alpha_2 + \\ & \bar{f}_2(X_2)). \end{aligned} \quad (30)$$

其中:  $X_2 = [\bar{x}_2, \hat{\theta}_1, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r, p_1, \dot{p}_1, \ddot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_2]^T$ ;  $k_2$  为设计中引入的辅助参数, 包括后面的  $k_i$  ( $i = 3, 4, \dots, n$ ) 均相同;

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(X_2) = & f_2 + \frac{1}{2} g_1 z_2 + \frac{1}{2} g_2 z_2 + \frac{1}{2\gamma^2} z_2 \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right)^2 + \\ & \frac{1}{2\gamma^2} z_2 + k_2 z_2^{2\ell-1} - \xi_1. \end{aligned}$$

利用神经网络RBF对  $\bar{f}_2(X_2)$  进行逼近, 有

$$\begin{aligned} z_2 \bar{f}_2(X_2) \leq & \frac{a_m}{2\rho^2} z_2^2 \theta_2 S_2^T S_2 + \frac{\rho^2}{2a_m} + \frac{a_m}{2\gamma^2} z_2^2 + \\ & \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_2^2. \end{aligned} \quad (31)$$

设计虚拟控制律为

$$\alpha_2 = - \left( c_2 z_2 + \frac{1}{2\rho^2} \hat{\theta}_2 S_2^T S_2 z_2 + \frac{1}{2\gamma^2} z_2 \right), \quad (32)$$

其中  $c_2 > 0$  为设计参数. 由假设2和式(32), 得到

$$g_2 z_2 \alpha_2 \leq -a_m c_2 z_2^2 - \frac{a_m}{2\rho^2} \hat{\theta}_2 S_2^T S_2 z_2^2 - \frac{a_m}{2\gamma^2} z_2^2. \quad (33)$$

将式(31)~(33)代入(30), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - a_m c_2 z_2^2 - k_1 \sigma^{2\ell} - k_2 z_2^{2\ell} + \frac{1}{2} g_2 z_3^2 + \\ & \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 \sigma^2 - e_1^2 + \frac{a_m}{2\rho^2} z_2^2 \tilde{\theta}_2 S_2^T S_2 + \\ & \frac{1}{a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \gamma^2 d_1^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 d_2^2 - \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{a_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j. \end{aligned} \quad (34)$$

step  $i$  ( $i = 3, 4, \dots, n-1$ ): 根据  $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$ , 对  $z_i$  求导, 得到

$$\dot{z}_i = g_i z_{i+1} + g_i \alpha_i + f_i + d_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} d_j - \xi_{i-1}, \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_{i-1} = & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1} + f_j) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)} + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_j} \dot{\theta}_j + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial p_k^{(j)}} p_k^{(j+1)}. \end{aligned}$$

选择 Lyapunov 函数为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{a_m}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2, \quad (36)$$

其中  $r_i > 0$  为设计常数. 对  $V_i$  求导并结合引理1, 通过加减项, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} - a_m \sum_{j=2}^{i-1} c_j z_j^2 - \sum_{j=2}^i k_j z_j^{2\ell} + \\ & \frac{1}{2} g_i z_{i+1}^2 + \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^T S_1 \sigma^2 + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{a_m}{2\rho^2} z_j^2 \tilde{\theta}_j S_j^T S_j - \\ & e_1^2 + \frac{i-1}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \\ & \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^i (i-j+1) d_j^2 - \sum_{j=1}^i \frac{a_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + \\ & z_i (g_i \alpha_i + \bar{f}_i(X_i)). \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$X_i = [\bar{x}_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{i-1}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i)}, p_1, \dot{p}_1, \dots, p_1^{(i)}, p_2, \dot{p}_2, \dots, p_2^{(i)}]^\top,$$

$$\bar{f}_i(X_i) = f_i - \xi_{i-1} + \frac{1}{2}g_{i-1}z_i + \frac{1}{2}g_i z_i + \frac{1}{2\gamma^2}z_i + \frac{1}{2\gamma^2}z_i \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j}\right)^2 + k_i z_i^{2\ell-1}.$$

利用神经网络RBF对 \$\bar{f}\_i(X\_i)\$ 进行估计,有

$$z_i \bar{f}_i(X_i) \leq \frac{a_m}{2\rho^2} z_i^2 \theta_i S_i^\top S_i + \frac{\rho^2}{2a_m} + \frac{a_m}{2\gamma^2} z_i^2 + \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_i^2. \quad (38)$$

取虚拟控制律为

$$\alpha_i = -\left(c_i z_i + \frac{1}{2\rho^2} \hat{\theta}_i S_i^\top S_i z_i + \frac{1}{2\gamma^2} z_i\right), \quad (39)$$

其中 \$c\_i > 0\$ 为设计参数. 由假设2和式(39),得到

$$g_i z_i \alpha_i \leq -a_m c_i z_i^2 - \frac{a_m}{2\rho^2} \hat{\theta}_i S_i^\top S_i z_i^2 - \frac{a_m}{2\gamma^2} z_i^2. \quad (40)$$

将式(38)~(40)代入(37),得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} - a_m \sum_{j=2}^i c_j z_j^2 - \sum_{j=2}^i k_j z_j^{2\ell} + \\ & \frac{g_i z_{i+1}^2}{2} + \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^\top S_1 \sigma^2 + \sum_{j=2}^i \frac{a_m}{2\rho^2} z_j^2 \tilde{\theta}_j S_j^\top S_j - \\ & e_1^2 + \frac{i}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^i \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \\ & \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^i (i-j+1) d_j^2 - \sum_{j=1}^i \frac{a_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\hat{\theta}}_j. \end{aligned} \quad (41)$$

step \$n\$: 选择Lyapunov函数为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{a_m}{2r_n} \tilde{\theta}_n^2, \quad (42)$$

其中 \$r\_n > 0\$ 为设计常数. 类似第 \$i\$ 步,得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} - a_m \sum_{j=2}^{n-1} c_j z_j^2 - \sum_{j=2}^n k_j z_j^{2\ell} + \\ & \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^\top S_1 \sigma^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{a_m}{2\rho^2} z_j^2 \tilde{\theta}_j S_j^\top S_j - e_1^2 + \\ & \frac{n-1}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^n (n-j+1) d_j^2 - \\ & \sum_{j=1}^n \frac{a_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\hat{\theta}}_j + z_n (g_n u + \bar{f}_n(X_n)). \end{aligned} \quad (43)$$

其中

$$X_n = [\bar{x}_n, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(n)}, p_1, \dot{p}_1, \dots,$$

$$p_1^{(n)}, p_2, \dot{p}_2, \dots, p_2^{(n)}]^\top,$$

$$\bar{f}_n(X_n) = f_n - \xi_{n-1} + \frac{g_{n-1} z_n}{2} + \frac{1}{2\gamma^2} z_n + \frac{1}{2\gamma^2} z_n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j}\right)^2 + k_n z_n^{2\ell-1},$$

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} = & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1} + f_j) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}_j} \dot{\hat{\theta}}_j + \\ & \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial p_k^{(j)}} p_k^{(j+1)}. \end{aligned}$$

利用神经网络RBF对 \$\bar{f}\_n(X\_n)\$ 进行估计,有

$$z_n \bar{f}_n(X_n) \leq \frac{a_m}{2\rho^2} z_n^2 \theta_n S_n^\top S_n + \frac{\rho^2}{2a_m} + \frac{a_m}{2\gamma^2} z_n^2 + \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_n^2. \quad (44)$$

设计实际控制律为

$$u = -\left(c_n z_n + \frac{1}{2\rho^2} \hat{\theta}_n S_n^\top S_n z_n + \frac{1}{2\gamma^2} z_n\right), \quad (45)$$

其中 \$c\_n > 0\$ 为设计参数. 由假设2和式(45),得到

$$g_n z_n u \leq -a_m c_n z_n^2 - \frac{a_m}{2\rho^2} \hat{\theta}_n S_n^\top S_n z_n^2 - \frac{a_m}{2\gamma^2} z_n^2. \quad (46)$$

将式(44)~(46)代入(43),得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} - a_m \sum_{j=2}^n c_j z_j^2 - \sum_{j=2}^n k_j z_j^{2\ell} + \\ & \frac{a_m}{2\rho^2} F^2 \tilde{\theta}_1 S_1^\top S_1 \sigma^2 + \sum_{j=2}^n \frac{a_m}{2\rho^2} z_j^2 \tilde{\theta}_j S_j^\top S_j - \\ & e_1^2 + \frac{n}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \\ & \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^n (n-j+1) d_j^2 - \sum_{j=1}^n \frac{a_m}{r_j} \tilde{\theta}_j \dot{\hat{\theta}}_j. \end{aligned} \quad (47)$$

取自适应律

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{r_1}{2\rho^2} F^2 S_1^\top S_1 \sigma^2 - q_1 \hat{\theta}_1; \quad (48)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \frac{r_i}{2\rho^2} S_i^\top S_i z_i^2 - q_i \hat{\theta}_i, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (49)$$

其中 \$q\_1, q\_2, \dots, q\_n\$ 均为正的设计参数. 将式(48)和(49)代入(47),有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} - a_m \sum_{j=2}^n c_j z_j^2 - \sum_{j=2}^n k_j z_j^{2\ell} - \\ & e_1^2 + \frac{n}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \\ & \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^n (n-j+1) d_j^2 + \sum_{j=1}^n \frac{a_m q_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j. \end{aligned} \quad (50)$$

由上述推导,可将主要结果总结为如下定理.

**定理2** 对于满足假设1和假设2的非线性系统(1),若按照式(21)、(32)、(39)、(45)、(48)和(49)选取

系统的虚拟控制律、实际控制律和自适应律,则:1) 闭环系统是实际有限时间稳定的,所有信号均有界;2) 当 $t \geq T$ 时,系统跟踪误差 $e_1(t)$ 被约束在 $-p_1(t) < e_1(t) < p_1(t)$ 范围内,且在有限时间内收敛至平衡点附近的小邻域内;3) 系统满足有限时间有界 $H_\infty$ 性能指标.

**证明** 1) 实际有限时间收敛性证明.

由式(50),得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -a_m c_1 \sigma^2 - k_1 \sigma^{2\ell} - a_m \sum_{j=2}^n c_j z_j^2 - \sum_{j=2}^n k_j z_j^{2\ell} - \\ & e_1^2 + \frac{n}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^n \frac{a_m q_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \\ & \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^n (n-j+1) d_j^2 - \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\ell + \\ & \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\ell. \end{aligned} \quad (51)$$

由引理1,可知

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i \leq - \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \theta_i^2. \quad (52)$$

为了处理式(51)的最后一项,可根据引理1,选取 $a = 1/(1-\ell)$ ,  $b = 1/\ell$ ,  $\varsigma = \ell^\ell$ ,  $\psi = 1$ ,  $\varphi = \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\ell$ ,得到

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\ell \leq (1-\ell) \ell^{\frac{\ell}{1-\ell}} + \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2. \quad (53)$$

令 $q_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \{q_i\}$ ,将式(52)和(53)代入(51),得到

$$\dot{V}_n \leq -\vartheta_1 V_n^\ell + \eta_1. \quad (54)$$

其中

$$\vartheta_1 = \min_{1 \leq j \leq n} \{2^\ell k_j, q_{\min}^\ell\},$$

$$\eta_1 =$$

$$\frac{n}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \varepsilon_j^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^n (n-j+1) d_j^2 +$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \theta_i^2 + (1-\ell) \ell^{\frac{\ell}{1-\ell}}.$$

外部扰动 $d_i(t) \in L_2[0, \infty)$ 是有界的,故由引理2可知,系统(1)是实际有限时间稳定的.由式(4)和(11)可知, $e_1$ 与 $h$ 同号,由于 $\sigma$ 有界,由式(12)可知, $e_1$ 和 $h$ 是有界的.因此, $\sigma$ 和所有的偏差信号 $e_1, z_2, \dots, z_n, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$ 在有限时间内均有界.由于 $e_1(t)$ 和 $y_r(t)$ 有界,由式(8)可知, $x_1(t)$ 有界,从而 $\dot{x}_1(t)$ 有界.由式(1)可知, $f_1(x_1), d_1(t), g_1(x_1)$ 有界,因此 $x_2(t)$ 和 $\alpha_1$ 有界.

同理可知, $x_3, x_4, \dots, x_n$ 有界, $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, u$ 有界;由于 $\tilde{\theta}_i$ 和 $\theta_i$ 有界,由 $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ 可知, $\hat{\theta}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )有界.

2) 满足预设性能的性能证明.

由式(11)和 $h$ 的有界性以及 $|w(e_1(0))| < p_2(0)$ 可知,当 $t \geq 0$ 时,有 $-p_2(t) < w(e_1(t)) < p_2(t)$ .由定理1可知,当 $t \geq T$ 时, $-p_1(t) < e_1(t) < p_1(t)$ ,即 $e_1(t)$ 被约束在预设性能范围内.因为 $e_1(t)$ 在闭区间 $t \in [0, T]$ 上连续,所以在此区间上 $e_1(t)$ 一定是有界的,所以它会随着时间 $t$ 变化满足预设性能的要求.

3) 有限时间有界 $H_\infty$ 性能的性能证明.

选择Lyapunov辅助函数

$$V(Z) = V_n(Z) + k_0.$$

其中: $Z = [\sigma, z_2, \dots, z_n, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n]^T$ ,  $k_0 > 0$ .这里加入辅助常数 $k_0$ 是为了保证 $V(Z) > 0$ ,但是它不影响上面设计的结果.为了验证定义1的有界 $H_\infty$ 性能指标,需要保证在 $V(Z)$ 下满足有限时间的判据.由式(54)并加减项 $k_0^\ell$ ,有

$$\dot{V} \leq \vartheta_2 V^\ell + \eta_2.$$

其中

$$\vartheta_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \{2^\ell k_i, q_{\min}^\ell, 1\},$$

$$\eta_2 =$$

$$\frac{n}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \varepsilon_j^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{j=1}^n (n-j+1) d_j^2 +$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \theta_i^2 + (1-\ell) \ell^{\frac{\ell}{1-\ell}} + k_0^\ell.$$

因此,定义1的判据条件满足.结合式(50)和(52),得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z) \leq & -e_1^2 + \frac{n}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \varepsilon_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \theta_i^2 + \\ & \frac{1}{2} n \gamma^2 \|d\|^2, \end{aligned} \quad (55)$$

其中 $d = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$ .定义辅助函数

$$G = \dot{V}(Z) + e_1^2 - \frac{1}{2} n \gamma^2 \|d\|^2. \quad (56)$$

将式(55)代入(56),得到

$$G \leq \delta, \quad (57)$$

式中

$$\delta = \frac{n}{2a_m} \rho^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_m} \gamma^2 \varepsilon_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{a_m q_i}{2r_i} \theta_i^2. \quad (58)$$

$V(Z) > 0$ ,且 $\delta$ 为有界正常数,因此,一定存在常数 $\mu > 0$ 使得 $\delta \leq \mu V(Z)$ 成立,进而得到

$$G \leq \mu V(Z), \tag{59}$$

将式(56)代入(59),两边积分,得到

$$V(Z(t)) + \int_0^t \left( \|e_1(s)\|^2 - \frac{1}{2}n\gamma^2\|d(s)\|^2 \right) ds - V(Z(0)) \leq \int_0^t \mu V(Z(s)) ds,$$

即

$$0 < V(Z(t)) < \phi(t) + \int_0^t \Upsilon(s)V(Z(s)) ds. \tag{60}$$

其中

$$\Upsilon(s) = \mu,$$

$$\phi(t) = \int_0^t \left( \frac{1}{2}n\gamma^2\|d(s)\|^2 - \|e_1(s)\|^2 \right) ds + V(Z(0)).$$

由文献[21]中的Gronwall不等式和式(60),有

$$V(Z(t)) < \phi(t) + \int_0^t \mu\phi(s)e^{\mu(t-s)} ds.$$

下面用反证法验证 $\phi(t) > 0$ . 假设 $\phi(t) \leq 0$ ,有

$$\int_0^t \mu\phi(s)e^{\mu(t-s)} ds \leq 0,$$

则 $V(Z(t)) \leq 0$ ,这与 $V(Z(t)) > 0$ 相矛盾,假设不成立,

因此, $\phi(t) > 0$ ,即

$$\int_0^t \|e_1(s)\|^2 ds < \frac{1}{2}n\gamma^2 \int_0^t \|d(s)\|^2 ds + V(Z(0)),$$

进而得到

$$\int_0^t \|e_1(s)\|^2 ds < \bar{\gamma}^2 \int_0^t \|d(s)\|^2 ds + V(Z(0)),$$

其中 $\bar{\gamma} = \sqrt{\frac{n}{2}}\gamma$ . 因此,系统满足定义1中的有限时间有界 $H_\infty$ 性能指标.  $\square$

### 2.3 仿真研究

为了验证所提出方法的有效性,将所设计的控制器应用于文献[22]中的刚性机械臂系统,且在系统中加入外部干扰,其动态模型如下式所示:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = g_2 u + f_2 + d_2, \\ y = x_1. \end{cases}$$

其中: $J_0 = 4m_r l_r^2/3$ 为惯性系数, $g_2 = 1/J_0$ , $f_2 = -m_r g_v l_r \cos(x_1)/J_0$ , $x_1$ 、 $x_2$ 、 $m_r$ 、 $g_v$ 、 $l_r$ 和 $u$ 分别为机械臂的角位置、角速度、负载质量、重力加速度、长度和输入力矩, $m_r = 5 \text{ kg}$ , $g_v = 9.8 \text{ m/s}^2$ , $l_r = 0.25 \text{ m}$ .

仿真的初始条件和设计参数如下: $[x_1(0), x_2(0)]^T = [-0.8, 2]^T$ , $[\hat{\theta}_1(0), \hat{\theta}_2(0)]^T = [0, 0]^T$ ;  $c_0 = 2, c_1 = 5, c_2 = 2; \rho = 5, \gamma = 0.25, q_1 = q_2 = 1, r_1 = r_2 = 1; p_0 = 0.3, p_\infty = 0.001, \lambda = 0.3, \tau = 0.1, v_0 = 10, v_2 = 3, M = 30, T = 3$ . 考虑外部干扰为 $d_2(t) = 2 \sin(\pi t)$ . 参考信号 $y_r = 0.5 \sin(t)$ . 神经网络 $W_1^T S_1(Z_1)$ 有 $7^7$ 个节点,宽度为2,中心平均分配在区间 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 上;神经网络

$W_2^T S_2(Z_2)$ 有 $7^{12}$ 个节点,宽度为2,中心平均分配在区间 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 上. 根据这些设计参数按照定理2设计系统的控制器,其仿真结果如图1~图4所示. 为了表明所提出方法对外部扰动具有良好的抑制能性,图1~图4同时给出了系统受到和未受到外部干扰的控制效果.

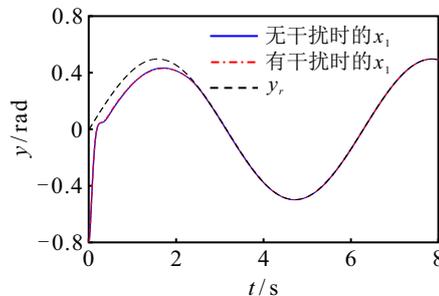


图1 机械臂角位置 $x_1$ 和期望轨迹 $y_r$

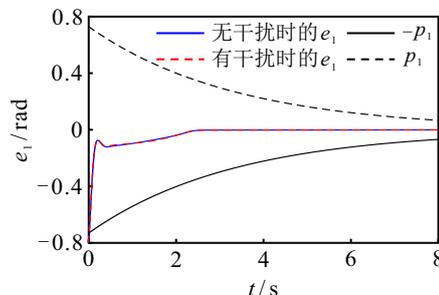


图2 跟踪误差 $e_1$

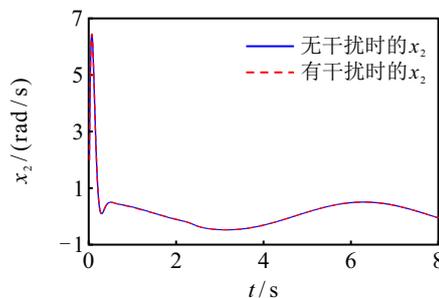


图3 机械臂角位置 $x_2$

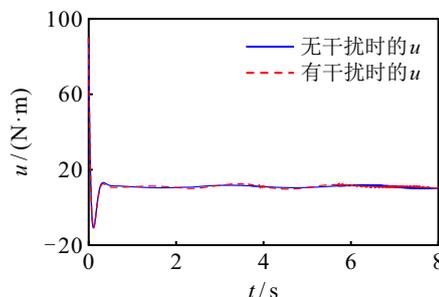


图4 控制输入 $u$

图1和图2分别为机械臂系统输出跟踪曲线和跟踪误差曲线. 由图1和图2可见,即使 $e_1(0) \notin (-p_1(0), p_1(0))$ ,系统的输出角位置也能在有限时间内很好地跟踪参考信号,当系统受到外部扰动时,跟

踪效果几乎不受影响,表明所提出方法具有较高的干扰抑制能力.图3为机械臂角速度 $x_2$ 的曲线.由图3可见,无论系统是否受到外部扰动,状态 $x_2$ 均是有界的.图4为控制输入 $u$ 的曲线.由图4可见,系统的控制信号是符合实际要求的,当系统受到干扰时,控制输入仅有少许调整,整体保持基本稳定.由图1~图4可见:所提出方法设计的控制器能够保证系统的输出在有限时间内很好地跟踪期望输出.当系统受到外部扰动影响时,系统控制效果基本没有影响,充分验证了所提出控制方法对外部扰动具有良好的抑制性能.

为了验证所提出方法的优越性,与文献[23]中的方法进行比较.文献[23]中的控制器为

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - \frac{z_1 \hat{\theta}_1 S_1^T(Z_1) S_1(Z_1)}{4\tau_1};$$

$$u = -k_2 z_2 - \frac{z_2 \hat{\theta}_2 S_2^T(Z_2) S_2(Z_2)}{4\tau_2};$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \frac{\mu_i z_i^2 S_i^T(Z_i) S_i(Z_i)}{4\tau_i} - \zeta_i \hat{\theta}_i, \quad i = 1, 2.$$

在此仿真研究中,按照文献[23]中的设计参数选取为 $k_1 = k_2 = 10$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\varsigma_1 = \varsigma_2 = 0.05$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 1$ ,  $v_0 = 1$ ,  $v_{T_f} = 0.01$ ,  $T_f = 1$ ; 本文的设计参数选取为 $c_0 = 0.001$ ,  $c_1 = c_2 = 10 = k_1 = k_2$ ,  $\rho = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $q_1 = q_2 = 1$ ,  $r_1 = r_2 = 1$ ; 为了得到与文献[23]相同范围的预设性能函数,选取 $p_0 = 0.09$ ,  $p_\infty = 0.01$ ,  $\lambda = 5$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $v_0 = 1$ ,  $v_2 = 0.001$ ,  $M = 15$ ,  $T = 0.5$ ; 取同样的外部干扰为 $d_2(t) = 2 \text{rand} n(1, 1)$ , 并取同样的初始条件

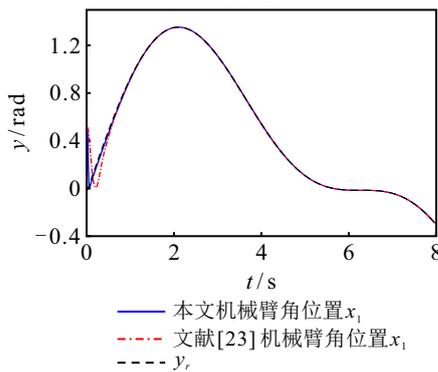


图5 跟踪效果对比

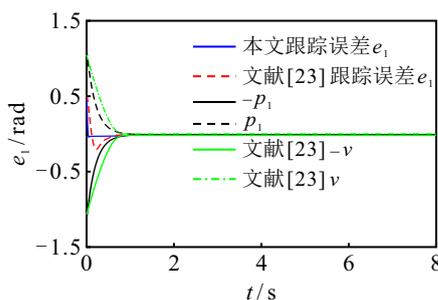


图6 跟踪误差对比

$[x_1(0), x_2(0)]^T = [0.5, 0]^T$ ,  $[\hat{\theta}_1(0), \hat{\theta}_2(0)]^T = [0, 0]^T$ . 在上述条件下分别计算所提出控制器和文献[23]的控制器,得到的仿真结果如图5和图6所示.图5和图6分别给出了两种控制方法的输出跟踪效果和跟踪误差的响应曲线.

由图5和图6可知,当存在随机外部扰动时,所提出控制方法仍然能够使得被控系统具有较好的动态性能,收敛速度更快,而文献[23]方法的控制效果则相对较差,表明了所提出方法的优越性.

### 3 结论

本文研究了非线性系统的预设有限时间有界 $H_\infty$ 控制问题,结合预设性能控制、有限时间控制和 $H_\infty$ 控制,设计了系统的与初始跟踪条件无关的预设性能有限时间有界 $H_\infty$ 跟踪控制器.为了达到控制设计目标,设计了新的跟踪误差转换函数,简化了同时设计有限时间控制和有界 $H_\infty$ 控制的设计过程.所提出控制设计方法能够保证系统跟踪误差在有限时间内收敛至预设定的平衡点附件的邻域内,且其他信号是实际有限时间稳定的,同时,对外部扰动具有良好的扰动抑制能力.所提出方法对于一些未知初始条件的非线性系统的预设性能控制设计具有极大的方便性,便于实际应用.

### 参考文献(References)

- [1] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2090-2099.
- [2] Li Y M, Tong S C. Adaptive neural networks prescribed performance control design for switched interconnected uncertain nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(7): 3059-3068.
- [3] 那靖, 张超, 王嫻, 等. 基于未知系统动态估计的机器人预设性能控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(5): 1040-1048.  
(Na J, Zhang C, Wang X, et al. Unknown system dynamics estimator for prescribed performance control of robotic systems[J]. Control and Decision, 2021, 36(5): 1040-1048.)
- [4] 朱新峰, 丁文武, 张天平. 具有输入量化和全状态约束的非严格反馈随机非线性系统的有限时间动态面控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2575-2584.  
(Zhu X F, Ding W W, Zhang T P. Finite-time dynamic surface control for nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with input quantization and full-state constraints[J]. Control and Decision, 2022, 37(10): 2575-2584.)
- [5] 马壮, 方一鸣, 许淼, 等. 考虑控制饱和的连铸结晶器振动位移系统预设性能控制[J]. 控制与决策, 2023,

- 38(2): 413-420.  
(Ma Z, Fang Y M, Xu M, et al. Prescribed performance control for vibration displacement of continuous casting mold with control saturation[J]. Control and Decision, 2023, 38(2): 413-420.)
- [6] 陈强, 丁科新, 南余荣. 带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 387-394.  
(Chen Q, Ding K X, Nan Y R. Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints[J]. Control and Decision, 2021, 36(2): 387-394.)
- [7] Liu B J, Hou M S, Ni J K, et al. Asymmetric integral barrier Lyapunov function-based adaptive tracking control considering full-state with input magnitude and rate constraint[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(14): 9709-9732.
- [8] Song Y D, Zhou S Y. Tracking control of uncertain nonlinear systems with deferred asymmetric time-varying full state constraints[J]. Automatica, 2018, 98: 314-322.
- [9] 李圣涛, 刘小梅, 周玉成, 等. 一类Lurie时滞广义系统的时滞相关 $H_\infty$ 控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 35-40.  
(Li S T, Liu X M, Zhou Y C, et al. Delay-dependent  $H_\infty$  control for Lurie singular systems with time-delay[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 35-40.)
- [10] Zhang X M, Han Q L. Event-triggered  $H_\infty$  control for a class of nonlinear networked control systems using novel integral inequalities[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(4): 679-700.
- [11] Li X H, Liu X P. Backstepping-based decentralized adaptive neural  $H_\infty$  tracking control for a class of large-scale nonlinear interconnected systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(11): 4533-4552.
- [12] Houda K, Saifia D, Chadli M, et al.  $H_\infty$  fuzzy proportional integral state feedback controller of photovoltaic systems under asymmetric actuator constraints[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2021, 43(1): 34-46.
- [13] Chang X H, Yang C, Xiong J. Quantized fuzzy output feedback  $H_\infty$  control for nonlinear systems with adjustment of dynamic parameters[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(10): 2005-2015.
- [14] Shen Y J, Li F J, Zhang D Y, et al. Event-triggered output feedback  $H_\infty$  control for networked control systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(1): 166-179.
- [15] Liu H T, Tian X H, Wang G, et al. Finite-time  $H_\infty$  control for high-precision tracking in robotic manipulators using backstepping control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(9): 5501-5513.
- [16] Liu H T, Tian X H, Wang G, et al. Robust  $H_\infty$  finite-time stability control of a class of nonlinear systems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(7/8): 5111-5122.
- [17] Liu H, Li X H, Liu X P, et al. Adaptive neural network prescribed performance bounded- $H_\infty$  tracking control for a class of stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(6): 2140-2152.
- [18] 李小华, 杨瑞芳, 刘辉, 等. 一类机械臂系统自适应有限时间有界 $H_\infty$ 跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2021, 38(1): 147-156.  
(Li X H, Yang R F, Liu H, et al. Adaptive finite-time bounded- $H_\infty$  tracking control for a class of manipulator system[J]. Control Theory & Applications, 2021, 38(1): 147-156.)
- [19] Jin X. Adaptive fixed-time control for MIMO nonlinear systems with asymmetric output constraints using universal barrier functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(7): 3046-3053.
- [20] Wang H H, Chen B, Lin C, et al. Adaptive finite-time control for a class of uncertain high-order non-linear systems based on fuzzy approximation[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(5): 677-684.
- [21] Dragomir S. Some Gronwall type inequalities and applications[M]. New York: Nova Science Publisher, 2003: 1-2.
- [22] Liu X P, Wang H Q, Gao C, et al. Adaptive fuzzy funnel control for a class of strict feedback nonlinear systems[J]. Neurocomputing, 2017, 241: 71-80.
- [23] Liu Y, Liu X P, Jing Y W. Adaptive neural networks finite-time tracking control for non-strict feedback systems via prescribed performance[J]. Information Sciences, 2018, 468: 29-46.

## 作者简介

李小华(1964—),女,教授,博士生导师,从事复杂系统结构与控制、非线性系统控制理论以及工业过程建模与控制等研究, E-mail: lixiaohua6412@163.com;

包海强(1995—),男,硕士生,从事非线性系统控制、智能控制等研究, E-mail: 2805991681@qq.com;

刘辉(1988—),男,博士生,从事非线性系统控制、智能控制等研究, E-mail: 18741273790@163.com.