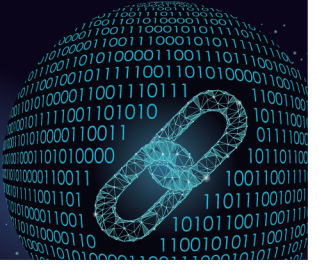




中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法

田瑾然, 刘建昌, 张伟, 刘圆超, 谭树彬

引用本文:

田瑾然, 刘建昌, 张伟, 刘圆超, 谭树彬. 基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(8): 2530–2540.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0356>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于向量角分解的高维多目标进化算法

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for many-objective optimization

控制与决策. 2021, 36(8): 1804–1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

基于R2指标和目标空间分解的高维多目标粒子群优化算法

R2 indicator and objective space partition based many-objective particle swarm optimizer

控制与决策. 2021, 36(9): 2085–2094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0113>

一种求解约束多目标问题的协作进化算法

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems

控制与决策. 2021, 36(11): 2656–2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

基于多种群分解预测的动态多目标引力搜索算法

Dynamic multi-objective gravitational searching algorithm based on multi-population decomposition prediction

控制与决策. 2021, 36(12): 2910–2918 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1002>

基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法

田瑾然, 刘建昌[†], 张伟, 刘圆超, 谭树彬

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

摘要: 尽管许多高维多目标进化算法已被提出,但大多仍无法有效处理具有不规则 Pareto 前沿的高维多目标优化问题. 鉴于此,提出基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法(MaOEA-OTCR),在环境选择过程中利用目标迁移策略和条件替代准则协作逐一选择收敛性和多样性好的个体进入下一代. 前者首先选择位于 Pareto 前沿边界的极值解进入下一代,以确定 Pareto 前沿的范围,同时选择收敛性最好的若干个体进入下一代,以加速种群收敛;然后迁移已选解集且利用迁移解集和未迁移解集的最大距离来选择收敛性和多样性好的个体进入下一代. 后者利用基于角度和收敛性评估的条件取代准则来防止前者过度强调多样性. 此外,提出一个多标准决策的匹配选择策略,旨在增加具有良好收敛性和多样性种群个体结合的概率,进一步提升算法的搜索效率. 为了验证 MaOEA-OTCR 的有效性,在 3 个测试集上与 8 个先进的高维多目标进化算法进行对比实验. 实验结果表明, MaOEA-OTCR 在处理高维多目标优化问题时不仅能够获得较强的竞争性能,而且有能力处理具有不规则 Pareto 前沿的高维多目标优化问题.

关键词: 高维多目标优化; 进化算法; 目标迁移; 条件取代

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0356

引用格式: 田瑾然,刘建昌,张伟,等. 基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(8): 2530-2540.

Many-objective evolutionary algorithm based on objective transferring and condition replacement

TIAN Jin-ran, LIU Jian-chang[†], ZHANG Wei, LIU Yuan-chao, TAN Shu-bin

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: Although lots of many-objective evolutionary algorithms have been proposed, most of them cannot effectively deal with many-objective optimization problems with irregular Pareto fronts. In view of the issue, this paper proposes a many-objective evolutionary algorithm based on objective transferring and conditional replacement(MaOEA-OTCR). In the procedure of environmental selection, this algorithm utilizes the designed objective transferring strategy and the developed conditional replacement criterion to select individuals with good convergence and diversity one by one. Specifically, the former first selects these individual located at the boundary of Pareto fronts for determining the boundary of Pareto fronts, while picking out several individuals with better convergence for accelerating the population convergence. Then, it transfers these individuals entered the next generation, and uses the maximum distance between transferred individuals and not transferred individuals to select individuals for the next generation. The latter utilizes the developed conditional replacement criterion based angle and convergence measure to avoid that the former overemphasizes the population diversity. In addition, we propose a multi-criteria decision based mating selection mechanism, which aims at increasing the probability of individuals with favourable convergence and diversity combination, and further promotes the search efficiency of the MaOEA-OTCR. To verify the effectiveness of the MaOEA-OTCR, the MaOEA-OTCR is compared with eight state-of-the-art MaOEAs on three test suites. Experimental results demonstrate that the MaOEA-OTCR not only obtains the highly competitive performance in dealing with many-objective optimization problems, but also has ability to solve many-objective optimization problems with irregular Pareto fronts.

Keywords: many-objective optimization; evolutionary algorithm; objective transferring; conditional replacement

收稿日期: 2023-03-27; 录用日期: 2023-07-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62273080).

[†]通讯作者. E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn.

*本文附带电子附录文件,可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

0 引言

在现实生活中,很多优化问题同时含有3个以上相互冲突的目标函数,如煤炭生产预测^[1]和云任务调度^[2]等,这些优化问题统称为高维多目标优化问题(many-objective optimization problems, MaOPs)^[3]. 数学描述如下所示:

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})); \\ \text{s.t. } \mathbf{x} &\in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 维的决策变量; $F(\mathbf{x})$ 为包含 m 个相互冲突的目标函数的目标向量, 且 $m > 3$; $f_i(\mathbf{x})$ 为第 i 个目标函数. 由于各目标之间的相互冲突特性, 不存在一个解可以使各目标同时达到最优^[3], 希望得到一组折衷解, 其尽可能使各目标都达到最优^[4]. 这组解在决策空间中称为 Pareto 最优解集(Pareto set, PS), 其所对应的目标函数值称为 Pareto 最优前沿(Pareto front, PF)^[5].

为了求解上述优化问题, 研究者们充分利用基于种群的进化算法在一次运行可以得到一组解的思想来设计高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithm, MaOEA), 相继很多算法被提出, 其大致可以分为以下3类:

1) 基于支配的 MaOEA: 其核心思想是设计支配准则来增加一个个体支配另一个个体的概率, 进而驱使种群个体收敛于真实 PF. 具体地, 一些支配方法利用所设计的不同函数转换原始目标来扩大个体的支配区域, 如 CDAS^[6]、 $C\alpha$ 支配^[7]等. 一些支配方法划分目标空间为系列网格并利用这些网格设计支配关系, 如 ε 支配^[8]、网格支配^[9]. 最近, 一些研究者也提出一些新的支配方法, 如 SDR^[10]、RPS 支配^[11]、DR 支配^[12]等. 尽管这些算法已经呈现出一定的优势, 但是需要额外的参数来控制支配区域.

2) 基于分解的 MaOEA: 其核心思想是通过引入均匀分布的参考向量将一个 MaOP 分解为多个单目标优化问题或较简单的多目标优化问题, 然后以协同进化的方式进行求解. 这类算法的典型代表有 MOEA/D^[13] 和 RVEA^[14]等. 最近的研究表明, 该类算法无法有效地求解具有复杂 PF 的问题, 其原因是均匀分布的参考向量, 其分布与这些问题的真实 PF 分布不一致^[15]. 为了克服这一缺陷, 研究者们提出一些基于参考向量自适应策略的算法, 如 RVEAiGNG^[16] 和 DREA^[12]等.

3) 基于指标的 MaOEA: 其核心思想是设计性能指标且作为环境选择过程的选择标准来区分种群个体, 进而引导进化过程. 现存主要性能指标包括: 超体

积(hypervolume, HV)指标^[17]、R2 指标^[18]、反世代距离(inverted generational distance, IGD)指标^[19]等. 这些算法已展现一定的竞争力, 但计算性能指标需要花费较多资源.

除上述3类算法外, 还出现一些其他算法. 例如, 混合算法充分利用各类算法的优势, 典型代表是 MOEA/DD^[20] 和 Two-Arch2^[21]; 基于多阶段选择策略的 MaOEAs, 如 TSEA^[22]、TS-NSGA-II^[23]等; 基于解相似性环境选择策略的 MaOEAs, 如 VaEA^[24] 和 MaOEA/IS-DED^[25]等, 该类算法在求解具有不规则 PF 问题时展现出一定的优势. 最近, 研究者们充分利用学习的思想设计 MaOEAs, 如 DEA-GNG^[26] 和 VMFE^[27]等.

尽管上述 MaOEAs 在求解 MaOPs 时展现出一定的优越性, 但仍无法有效求解具有不规则 PF 的 MaOPs^[12,28]. 这可能是因为大多数现存算法没有利用种群中的特征信息来扩展种群个体使其覆盖 PF, 进而使得种群个体的分布无法与真实 PF 相匹配. 为了解决上述问题, 本文充分利用种群中的特征信息(位于 PF 边界的极值解和最优收敛个体)设计了目标迁移策略和条件替代准则, 进而提出基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法(MaOEA-OTCR). 该算法主要贡献如下:

1) 提出基于目标迁移的逐一选择策略. 该策略首先选择位于边界的极值解进入下一代来明确 PF 的范围; 然后通过坐标变换迁移已选解集并利用迁移解集与未迁移解集的最大距离逐一选择收敛性和多样性好的解进入下一代.

2) 设计基于角度和收敛性评估的条件取代准则, 旨在防止上述选择策略过度强调多样性而忽略收敛性, 进而保证被选入下一代的解同时具有良好的收敛性和多样性.

3) 提出基于多标准决策的匹配选择策略, 旨在为产生高质量子代而选择收敛性和多样性都良好的父代, 进而提升所提出算法的搜索效率.

本文其他部分的内容安排如下: 第2节介绍与本文相关的背景知识; 第3节详细描述所提算法 MaOEA-OTCR; 第4节设计仿真实验, 测试所提出算法的性能; 最后对全文进行总结.

1 背景知识

在本文: 角度(Angle)表示两个个体在目标空间中的夹角^[24]. 值得提及的是, 在计算两个个体的 Angle 前, 需要采用下式对每个个体的目标值进行归一化处理:

$$f'_i(\mathbf{x}) = \frac{f_i(\mathbf{x}) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

其中: $z_i^{\min} = \min_{\mathbf{x} \in P}(f_i(\mathbf{x}))$, $z_i^{\max} = \max_{\mathbf{x} \in P}(f_i(\mathbf{x}))$. 为避免式(2)出现分母为0的情况, 当 $z_i^{\max} - z_i^{\min} < 1e-6$ 时, $z_i^{\min}$ 设置为0.

经归一化处理后, 个体 $\mathbf{x}$ 的目标值变为 $F'(\mathbf{x}) = (f'_1(\mathbf{x}), f'_2(\mathbf{x}), \dots, f'_m(\mathbf{x}))$. 个体 $\mathbf{x}$ 和个体 $\mathbf{y}$ 的角度值 $\text{Angle}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 通过下式计算:

$$\text{Angle} = \arccos \left| \frac{F'(\mathbf{x}) \cdot F'(\mathbf{y})}{\|F'(\mathbf{x})\| \times \|F'(\mathbf{y})\|} \right|. \quad (3)$$

2 MaOEA/OTCR算法

本节主要阐述算法的具体实现, 包括算法的总体框架、基于多标准决策的匹配选择以及基于目标迁移和条件替代的环境选择.

2.1 MaOEA/OTCR的总体框架

算法1呈现了所提出 MaOEA-OTCR 的总体框架. 具体地, 首先在决策空间中产生规模为 N 的初始种群 P_0 ; 然后进入进化迭代过程, 直到满足终止条件. 在该过程中, 利用基于多标准决策的匹配选择策略挑选精英父代, 以构建匹配池 P_t ; 经模拟二进制交叉^[29] 和多项式变异^[30] 产生高质量子代并将其与父代合并形成规模为 $2N$ 的合并种群 U_t ; 最后利用基于目标迁移和条件替代的环境选择策略从合并种群中选择 N 个收敛性和多样性都良好的精英个体进入下一代.

算法1 MaOEA/OTCR的总体框架.

输入: N (种群规模), $t_{\max}$ (最大进化代数);

输出: P (最终种群).

- 1: $P_0 = \text{InitializePopulation}(N)$;
- 2: $t = 0$;
- 3: while $t < t_{\max}$ do
- 4: $\text{Pool} = \text{MatingSelection}(P_t)$;
- 5: $Q_t = \text{Variation}(\text{Pool})$;
- 6: $U_t = P_t \cup Q_t$;
- 7: $P_{t+1} = \text{EnvironmentalSelection}(U_t, N)$;
- 8: $t = t + 1$;
- 9: end while
- 10: return: P_{t+1} .

2.2 基于多标准决策的匹配选择

本节阐述基于多标准决策的匹配选择过程以及收敛性和多样性评估.

2.2.1 匹配选择过程

匹配选择的核心目标是为进化操作挑选收敛性和多样性都良好的父代, 以产生高质量子代, 进而提

升算法在高维目标空间中的搜索效率. 在 MaOEA-OTCR 中, 利用所设计的多标准决策的匹配选择完成上述目标, 详见算法2.

算法2 多标准决策的匹配选择.

输入: P (父代种群), N (种群规模);

输入: P' (匹配池).

- 1: 通过式(2)标准化 P 中各个体的目标值;
- 2: 计算 P 中各个体的 $D(\mathbf{x})$ 和 $C(\mathbf{x})$;
- 3: for $i = 1 : N$ do
- 4: Randomly select individual $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ from P ;
- 5: if $C(\mathbf{x}) < C(\mathbf{y}) \ \& \ D(\mathbf{x}) > D(\mathbf{y})$ then
- 6: $P' = P' \cup \mathbf{x}$;
- 7: else if $C(\mathbf{y}) < C(\mathbf{x}) \ \& \ D(\mathbf{y}) > D(\mathbf{x})$ then
- 8: $P' = P' \cup \mathbf{y}$;
- 9: else
- 10: if $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ then
- 11: $P' = P' \cup \mathbf{x}$;
- 12: else if $\mathbf{y} \prec \mathbf{x}$ then
- 13: $P' = P' \cup \mathbf{y}$;
- 14: else
- 15: if $\text{rand} < p$ then
- 16: if $C(\mathbf{x}) < C(\mathbf{y})$ then
- 17: $P' = P' \cup \mathbf{x}$;
- 18: else
- 19: $P' = P' \cup \mathbf{y}$;
- 20: end if
- 21: else
- 22: if $D(\mathbf{x}) > D(\mathbf{y})$ then
- 23: $P' = P' \cup \mathbf{x}$;
- 24: else
- 25: $P' = P' \cup \mathbf{y}$;
- 26: end if
- 27: end if
- 28: end if
- 29: end if
- 30: end for
- 31: return: P' .

具体地, 从父代种群 P 中随机选择两个个体 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$, 如果个体 $\mathbf{x}$ 的收敛性和多样性均优于个体 $\mathbf{y}$, 则个体 $\mathbf{x}$ 进入匹配池. 同理, 如果个体 $\mathbf{y}$ 在收敛性和多样性两方面均优于个体 $\mathbf{x}$, 则个体 $\mathbf{y}$ 进入匹配池. 如果个体 $\mathbf{x}$ 在收敛性或多样性某方面优于个体 $\mathbf{y}$, 则使用 Pareto 支配区分这对个体. 此外, 当上述多个标准失效地选择一个个体进入匹配池时, 大多数现存算法随

机选择一个个体进入匹配池. 这就有可能选择了性能较差的个体进入匹配池, 换言之, 这可能使经遗传操作产生的个体位于远离 Pareto 前沿区域或密集区域, 进而恶化算法的性能. 为了避免上述情况, 本文设计一个可接受的概率 p 辅助算法完成挑选精英父代的任务, p 同时考虑目标个数和种群进化代数因素, 有

$$p = \frac{2}{\pi} \arctan(m) \cdot \left(1 - \frac{\text{gen}}{\text{Maxgen}}\right). \quad (4)$$

其中: m 为目标个数, gen 为当前进化代数, Maxgen 为提前设定的最大进化代数. 如此设计的目的是根据目标数和进化代数不断调整搜索的关注点. 直观地, 随着目标数的增加, 具有更好收敛性的个体将有更大概率进入匹配池. 此外, 在进化早期 p 值很大, 即 $\text{rand} < p$ 更容易满足, 因此具有更好收敛性的个体有更大机会进入匹配池, 这样可以辅助算法更快地收敛于 Pareto 前沿. 在进化后期 p 值很小, 所以 $\text{rand} > p$ 更容易满足, 即具有良好多样性的父代具有更大机会进入匹配池.

2.2.2 收敛性评估

在所设计的匹配选择中, 使用种群个体的各目标值和评估种群个体的收敛性, 具体的数学描述为

$$C(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m f'_i(\mathbf{x}). \quad (5)$$

其中: $f'_i(\mathbf{x})$ 为个体 $\mathbf{x}$ 在第 i 个目标上的归一化目标值, 且 m 表示目标个数. 由于 $C(\mathbf{x})$ 有能力评估种群个体的收敛性, 已被广泛地应用于高维多目标进化算法中, 如 VaEA^[24]、lby1EA^[31] 等. 此外, $C(\mathbf{x})$ 值越小表示个体的收敛性能越好.

2.2.3 多样性评估

在所设计的匹配选择中, 设计基于双角协作的多样性评估评估种群个体的拥挤程度, 算法如下:

$$D(\mathbf{x}) = \text{Angle}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_a) + \alpha \text{Angle}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b). \quad (6)$$

其中: Angle 通过式 (3) 计算; $\mathbf{x}_a$ 和 $\mathbf{x}_b$ 依次表示第 1 靠近和第 2 靠近个体 $\mathbf{x}$; α 为一个较小的数, 设置为 10^{-6} . $D(\mathbf{x})$ 越大表示个体 $\mathbf{x}$ 的拥挤度越小.

2.3 基于目标迁移和条件替代的环境选择

本节介绍基于目标迁移和条件替代的环境选择过程和具体操作.

2.3.1 环境选择过程

环境选择的核心任务是从规模为 $2N$ 的合并种群中挑选 N 个收敛性和多样性都良好的精英个体进入下一代. 所提出 MaOEA-OTCR 的环境选择过程如算法 3 所示. 具体地, 首先使用式 (2) 对合并种群个体的目标值进行归一化处理; 然后执行非支配排序

来划分合并种群为不同的非支配前沿 ($F_1, F_2, \dots$), 且选择 $F_1 \sim F_l$ 中的个体构建临时种群池 T , 其中 $l = \arg \min_l \sum_{i=1}^l |F_i| \geq N$; 接着利用式 (5) 计算临时种群中每个个体的收敛性评估值, 从临时种群池选择 m 个边界个体, 其表现为与各相应坐标轴有最小夹角和 m 个收敛性最好的个体直接进入下一代; 最后利用基于目标迁移的选择操作和基于条件替代的取代操作逐一选择剩余个体. 前者逐一选择多样性好的个体, 后者有条件地取代前者选入的个体, 以避免前者过度强调多样性而忽略收敛性, 致使最终的种群具有好的多样性, 而不能收敛于真实 Pareto 前沿.

算法3 环境选择.

输入: U (合并种群), N (种群规模);

输出: P (下一代种群).

1: $(F_1, F_2, \dots) = \text{NondominatedSort}(U, N)$;

2: $T = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_l, l = \arg \min_l \sum_{i=1}^l |F_i| \geq N$;

3: 标准化 T 中各个体的目标值;

4: 计算 T 中各个体的 $C(\mathbf{x})$ 值;

5: 找到 m 个最小 $C(\mathbf{x})$ 值, 分别为 $\{C_1, \dots, C_m\}$;

6: 利用式 (3) 计算 T 中各个体与各坐标轴的夹角

Angle , 记为 A ;

7: 找到 m 个最小 A 值, 分别为 $\{A_1, \dots, A_m\}$;

8: $P_1 = \{C_1, \dots, C_m\} \cup \{A_1, \dots, A_m\}$;

9: $P' = P_1$;

10: $T' = T \setminus P_1$;

11: $k = N - |P_1|$;

12: $S = \text{PerformAlgorithm4}(P', T', k)$;

13: $P_2 = S$;

14: $P = P_1 \cup P_2$;

15: return: P .

2.3.2 基于目标迁移的选择操作

该选择操作是环境选择过程中的第 2 选择标准, 旨在选择多样性好的精英个体, 其核心思想是以已选入的个体作为参考, 选取远离这些参考个体的个体进入下一代. 该过程详见算法 4 中的第 1 行 ~ 第 7 行. 具体地, 首先通过下式^[32]迁移参考个体:

$$f_i^t(\mathbf{x}_l) = \begin{cases} f'_i(\mathbf{x}_j), & f'_i(\mathbf{x}_l) < f'_i(\mathbf{x}_j); \\ f'_i(\mathbf{x}_l), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

其中 $f'_i(\mathbf{x}_l)$ 和 $f'_i(\mathbf{x}_l)$ 分别为迁移前和迁移后个体 $\mathbf{x}_l$ 的第 i 个目标值. 值得一提的是, 进行迁移的目的是为了克服欧氏距离在高维目标空间中的局限性.

上述过程完成后,通过下式计算未选入种群个体与已选入种群的欧氏距离:

$$d(\mathbf{x}, P) = \min_{\mathbf{y} \in P} \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{x}) - f_i^t(\mathbf{y}))^2}, \quad (8)$$

其中 P 为已选入的种群个体. 在未选的种群个体中, 具有最大 d 值的个体被挑选进入下一代; 然后基于条件替代的取代操作被执行; 最后剩余种群个体的 d 值被更新. 上述过程一直循环, 直到进入下一代的种群个体数达到 N 为止.

算法4 基于目标迁移和条件替代的选择过程.

输入: P' (已被选个体), $C(\mathbf{x})$ (个体的收敛程度值), T' (未被选个体), k (个体数目);

输出: P_2 (剩余被选择的个体).

1: transfer these individuals in P' ;

2: for each $\mathbf{x} \in T'$ do

3: 计算 $d(\mathbf{x}, P')$ according to the 式(8);

4: end for

5: while $|P_2| < k$ do

6: $\mathbf{y} \leftarrow \arg \max_{\mathbf{x} \in T'} d(\mathbf{x}, P')$;

7: 添加 $\mathbf{y}$ 到 P' 和 P_2 且从 T' 中移除个体 $\mathbf{y}$;

8: 计算 $\mathbf{y}$ 与在 T' 剩余个体的角度值;

9: 在 T' 中找到与个体 $\mathbf{y}$ 有最小夹角的个体 $\mathbf{z}$;

10: if $\theta_{yz} < \frac{\pi}{2(N+1)}$ & $C(\mathbf{z}) < C(\mathbf{y})$ then

11: 从 P' 和 P_2 中移除个体 $\mathbf{y}$ 且添加个体 $\mathbf{z}$ 到

P' 和 P_2 ;

12: 从 T' 中移除个体 $\mathbf{z}$;

13: for each $\mathbf{x} \in T'$ do

14: 用 $\min\{d(\mathbf{x}, \mathbf{z}), d(\mathbf{x}, P')\}$ 更新 $d(\mathbf{x}, P')$;

15: end for

16: else

17: for each $\mathbf{x} \in T'$ do

18: 用 $\min\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), d(\mathbf{x}, P')\}$ 更新 $d(\mathbf{x}, P')$;

19: end for

20: end if

21: end while

22: return: P_2 .

2.3.3 基于条件替代的取代操作

上述选择操作旨在选取多样性良好的种群个体进入下一代, 而个体的收敛性被忽略. 换言之, 上述选择操作可能使进入下一代的种群个体仅有好的多样性. 为了避免这种情况, 设计基于条件替代的取代操作, 详细过程见算法4中的第8行~第12行. 具体地, 当上述选择操作完成选取最好多样性个体 $\mathbf{y}$ 后, 计算个体 $\mathbf{y}$ 与剩余未选入种群个体的夹角且找到与个体

$\mathbf{y}$ 夹角最小的个体 $\mathbf{z}$. 如果个体 $\mathbf{y}$ 与个体 $\mathbf{z}$ 的夹角余弦大于 $\cos\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)$ 且个体 $\mathbf{y}$ 的收敛性评估值劣于个体 $\mathbf{z}$ ($C(\mathbf{y}) > C(\mathbf{z})$), 则个体 $\mathbf{y}$ 将被个体 $\mathbf{z}$ 取代.

3 仿真实验及结果分析

为了验证 MaOEA-OTCR 在求解高维多目标优化问题的综合性能, 在3个较为广泛使用的测试集 WFG^[33]、MaF^[34]、UF^[35] 对 MaOEA-OTCR 与8个先进的 MaOEAs (ASEA^[36]、NSGA-III^[37]、RPS-NSGA-II^[11]、SdEA^[38]、 θ -DEA^[39]、TS-NSGA-II^[23]、VaEA^[24] 和 RVEAiGNG^[16]) 进行比较.

3.1 实验设置

1) 测试问题: 采用 WFG1~WFG9 和 MaF1~MaF15 进行实验研究, 目标数 (m) 设置为5、10、15和20. 此外, 选择 UF1~UF10 进一步测试所提出算法处理具有不规则 PF 问题的能力.

2) 性能指标: 使用能够同时评价算法收敛性和多样性的 HV 指标^[17] 评价算法的性能.

3) 种群大小: 基于参考点的算法的种群大小依赖于参考点的数量^[37], 具体设置见表1.

表1 种群大小设置

m	Division (H_1, H_2)	N	Maxgen	MaxFE
5	(6, 0)	210	400	84 000
10	(3, 2)	275	500	137 500
15	(2, 1)	135	600	81 000
20	(2, 1)	230	800	184 000

4) 交叉变异参数设置: 所有算法采用二进制交叉和多项式变异产生子代. 交叉概率和变异概率分别设置为1和 $1/D$, 其中 D 表示决策变量的个数. 交叉分布指数和变异分布指数设置为30和20.

5) 算法参数设置: 各算法参数与原文献一致.

6) 统计方法: 在每个测试问题上, 各算法均独立运行20次. 得到的实验结果采用 Wilcoxon 秩和检验进行分析, 并使用 +、-、 $\approx$ 分别表示所提出算法优于对比算法、劣于对比算法、与对比算法无显著性差异.

7) 终止条件: 所有算法运行一次结束的条件是达到最大评估次数 (MaxFE), 其值为种群大小与最大进化迭代次数 (Maxgen) 的积. 具体设置见表1.

3.2 结果分析

3.2.1 算法在WFG测试问题上的对比分析

MaOEA-OTCR 与8个对比算法在 WFG1~WFG9 测试问题上获得的 HV 值统计结果如表2所示, 且在表中以粗体显示了各算法在不同测试问题上获得的最好结果. 由表2可知, 所提出 MaOEA-OTCR 在大多数测试问题上均获得了最优效果.

表2 各算法在WFG测试问题上获得的HV指标值的统计结果

Problem	m	D	ASEA	NSGA-III	RPS-NSGA-II	SdEA	θ -DEA
WFG1	5	28	5.570 4e-1 (1.66e-2) —	5.548 0e-1 (2.13e-2) —	7.185 0e-1 (1.55e-2) —	6.774 8e-1 (3.03e-2) —	6.239 7e-1 (1.59e-2) —
	10	38	4.255 5e-1 (2.26e-2) —	3.038 9e-1 (2.39e-2) —	4.189 5e-1 (1.92e-2) —	4.016 8e-1 (9.67e-2) —	4.840 3e-1 (3.20e-2) —
	15	48	6.602 8e-1 (3.86e-2) —	5.009 0e-1 (7.31e-2) —	5.591 4e-1 (8.48e-2) —	6.216 0e-1 (1.43e-1) —	6.659 7e-1 (4.20e-2) —
	20	58	4.614 7e-1 (3.49e-2) —	2.468 5e-1 (2.12e-2) —	3.469 0e-1 (1.91e-2) —	5.799 0e-1 (1.77e-1) —	4.962 3e-1 (4.34e-2) —
WFG2	5	28	9.441 2e-1 (1.61e-3) —	9.434 8e-1 (2.08e-3) —	9.331 4e-1 (5.74e-3) —	9.372 4e-1 (4.28e-3) —	9.449 6e-1 (1.89e-3) —
	10	39	8.941 0e-1 (4.61e-3) —	9.007 2e-1 (1.17e-2) —	9.013 1e-1 (4.53e-3) —	8.928 4e-1 (7.29e-3) —	8.893 9e-1 (8.75e-3) —
	15	48	7.732 1e-1 (7.26e-2) —	8.607 6e-1 (7.38e-3) —	8.580 5e-1 (9.52e-3) —	8.330 1e-1 (2.17e-2) —	7.155 9e-1 (5.23e-2) —
	20	59	7.256 1e-1 (7.36e-2) —	7.668 7e-1 (2.89e-2) —	8.208 7e-1 (1.12e-2) —	7.820 9e-1 (1.98e-2) —	6.712 8e-1 (1.29e-2) —
WFG3	5	28	1.780 9e-1 (2.74e-2) +	9.805 7e-2 (1.53e-2) —	1.576 3e-1 (3.74e-2) +	7.132 1e-2 (3.56e-2) —	1.554 1e-1 (2.13e-2) +
	10	39	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈
	15	48	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈
	20	59	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈
WFG4	5	28	7.595 8e-1 (2.05e-3) —	7.393 4e-1 (1.90e-3) —	7.257 8e-1 (2.46e-3) —	7.418 8e-1 (4.44e-3) —	7.423 1e-1 (2.26e-3) —
	10	38	8.276 8e-1 (4.67e-3) —	8.023 3e-1 (1.25e-2) —	8.277 8e-1 (4.91e-3) —	8.675 0e-1 (3.28e-3) +	8.092 5e-1 (3.44e-3) —
	15	48	8.186 9e-1 (5.13e-3) —	8.311 2e-1 (8.94e-3) ≈	7.929 2e-1 (6.03e-3) —	8.308 7e-1 (7.05e-3) —	8.344 9e-1 (5.07e-3) ≈
	20	58	7.489 9e-1 (8.18e-3) —	6.624 1e-1 (7.29e-2) —	7.510 4e-1 (6.40e-3) —	8.016 1e-1 (8.69e-3) —	7.661 7e-1 (6.51e-3) —
WFG5	5	28	7.201 1e-1 (1.22e-3) —	7.179 5e-1 (6.92e-4) —	6.974 0e-1 (1.54e-3) —	6.610 6e-1 (8.73e-3) —	7.193 5e-1 (8.80e-4) —
	10	38	8.089 3e-1 (1.84e-3) —	7.958 8e-1 (2.43e-3) —	8.052 9e-1 (2.01e-3) —	7.752 6e-1 (1.33e-2) —	8.025 2e-1 (1.81e-3) —
	15	48	7.946 7e-1 (3.50e-3) —	8.009 2e-1 (2.73e-3) —	7.526 1e-1 (4.25e-3) —	7.688 6e-1 (7.57e-3) —	8.038 0e-1 (1.26e-3) ≈
	20	58	7.199 1e-1 (9.35e-3) —	7.062 8e-1 (1.94e-2) —	7.361 2e-1 (3.18e-3) —	7.398 9e-1 (4.69e-3) —	7.460 0e-1 (4.81e-3) —
WFG6	5	28	7.299 4e-1 (4.23e-3) —	7.102 8e-1 (6.03e-3) —	6.957 5e-1 (5.49e-3) —	7.058 6e-1 (4.47e-3) —	7.147 3e-1 (4.60e-3) —
	10	38	8.197 5e-1 (8.70e-3) —	7.935 3e-1 (8.45e-3) —	8.079 5e-1 (5.57e-3) —	8.221 2e-1 (9.21e-3) —	8.018 3e-1 (6.34e-3) —
	15	48	8.107 0e-1 (8.05e-3) —	8.211 9e-1 (9.86e-3) —	7.642 6e-1 (9.20e-3) —	7.846 1e-1 (9.67e-3) —	8.254 2e-1 (5.07e-3) ≈
	20	58	7.376 5e-1 (8.61e-3) —	6.731 0e-1 (2.75e-2) —	7.505 0e-1 (4.10e-3) —	7.897 2e-1 (8.98e-3) ≈	7.670 2e-1 (5.37e-3) —
WFG7	5	28	7.663 3e-1 (8.82e-4) —	7.529 9e-1 (2.02e-3) —	7.478 4e-1 (1.43e-3) —	7.443 7e-1 (4.16e-3) —	7.590 0e-1 (1.46e-3) —
	10	38	8.709 2e-1 (6.31e-3) —	8.401 0e-1 (5.05e-3) —	8.664 4e-1 (2.45e-3) —	8.609 8e-1 (1.05e-2) —	8.534 1e-1 (3.72e-3) —
	15	48	8.466 9e-1 (5.01e-3) —	8.603 8e-1 (2.78e-3) —	8.174 6e-1 (6.27e-3) —	8.303 9e-1 (1.05e-2) —	8.657 9e-1 (1.48e-3) —
	20	58	7.874 1e-1 (9.98e-3) —	7.324 1e-1 (5.04e-2) —	8.014 0e-1 (3.59e-3) —	8.195 8e-1 (7.83e-3) —	8.076 1e-1 (3.86e-3) —
WFG8	5	28	6.969 4e-1 (2.10e-3) —	6.929 2e-1 (3.28e-3) —	6.648 2e-1 (3.60e-3) —	6.456 2e-1 (4.03e-3) —	6.960 1e-1 (2.70e-3) —
	10	38	7.617 8e-1 (2.02e-2) ≈	7.695 0e-1 (1.10e-2) +	7.700 0e-1 (6.27e-3) +	7.678 1e-1 (8.83e-3) +	7.523 6e-1 (6.46e-3) —
	15	48	7.745 2e-1 (1.35e-2) —	7.987 6e-1 (9.66e-3) +	7.055 7e-1 (1.09e-2) —	7.630 8e-1 (9.66e-3) —	7.928 6e-1 (9.97e-3) ≈
	20	58	7.435 2e-1 (1.59e-2) —	5.023 6e-1 (7.92e-2) —	7.086 4e-1 (9.59e-3) —	7.874 1e-1 (1.02e-2) ≈	7.678 3e-1 (1.15e-2) ≈
WFG9	5	28	7.376 0e-1 (3.98e-3) —	6.793 0e-1 (1.49e-2) —	6.928 6e-1 (6.52e-3) —	6.965 2e-1 (1.45e-2) —	7.047 9e-1 (8.84e-3) —
	10	38	8.173 6e-1 (7.26e-3) +	7.195 1e-1 (1.26e-2) —	7.637 7e-1 (1.35e-2) —	7.918 0e-1 (1.36e-2) ≈	7.415 5e-1 (1.55e-2) —
	15	48	7.637 8e-1 (1.93e-2) +	7.139 4e-1 (5.51e-2) ≈	6.860 6e-1 (2.35e-2) —	6.983 7e-1 (1.98e-2) ≈	7.073 3e-1 (1.98e-2) ≈
	20	58	6.987 0e-1 (1.80e-2) ≈	6.610 6e-1 (8.06e-2) ≈	6.559 9e-1 (1.90e-2) —	6.881 4e-1 (3.14e-2) ≈	6.421 3e-1 (2.11e-2) —
+ / - / ≈			3/28/5	2/28/6	2/31/3	2/26/8	1/26/9
Problem	m	D	TS-NSGA-II	VaEA	RVEAiGNG	MaOEA-OTCR	
WFG1	5	28	6.941 6e-1 (2.47e-2) —	6.758 6e-1 (2.36e-2) —	8.542 8e-1 (1.13e-2) —	9.480 7e-1 (9.94e-3)	
	10	38	2.792 4e-1 (1.44e-2) —	2.951 7e-1 (9.10e-3) —	3.921 3e-1 (2.15e-2) —	7.791 8e-1 (2.56e-2)	
	15	48	4.817 5e-1 (3.00e-2) —	2.978 1e-1 (2.96e-2) —	8.826 2e-1 (1.37e-2) —	9.416 9e-1 (3.27e-2)	
	20	58	3.341 3e-1 (2.39e-2) —	1.700 9e-1 (9.31e-3) —	7.058 0e-1 (3.05e-3) —	7.348 0e-1 (3.13e-2)	
WFG2	5	28	9.462 5e-1 (1.76e-3) —	9.269 9e-1 (3.87e-3) —	9.573 5e-1 (1.98e-3) —	9.930 6e-1 (1.15e-3)	
	10	39	8.908 5e-1 (5.71e-3) —	8.615 5e-1 (5.90e-3) —	9.774 6e-1 (3.73e-3) —	9.936 1e-1 (1.14e-3)	
	15	48	8.463 2e-1 (1.37e-2) —	8.164 9e-1 (8.80e-3) —	7.490 1e-1 (3.19e-3) —	9.895 4e-1 (3.95e-3)	
	20	59	8.200 9e-1 (8.75e-3) —	7.667 7e-1 (1.32e-2) —	7.415 7e-1 (3.81e-3) —	9.850 3e-1 (3.67e-3)	
WFG3	5	28	9.568 5e-2 (2.39e-2) —	4.897 9e-2 (1.17e-2) —	4.857 8e-2 (7.85e-3) —	1.134 8e-1 (1.79e-2)	
	10	39	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	
	15	48	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	
	20	59	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	
WFG4	5	28	7.532 4e-1 (2.56e-3) —	6.928 9e-1 (3.51e-3) —	7.447 0e-1 (2.35e-3) —	7.729 8e-1 (2.44e-3)	
	10	38	8.376 4e-1 (5.13e-3) —	7.503 3e-1 (5.49e-3) —	6.820 7e-1 (2.84e-3) —	8.510 9e-1 (4.82e-3)	
	15	48	8.445 7e-1 (4.34e-3) +	7.413 4e-1 (9.45e-3) —	7.732 6e-1 (3.47e-3) —	8.357 7e-1 (6.67e-3)	
	20	58	7.751 6e-1 (5.21e-3) —	6.748 3e-1 (1.01e-2) —	7.692 9e-1 (5.41e-3) —	8.269 8e-1 (5.94e-3)	
WFG5	5	28	7.207 1e-1 (7.20e-4) —	6.786 3e-1 (3.06e-3) —	7.252 5e-1 (2.91e-3) —	7.396 8e-1 (3.77e-3)	
	10	38	8.142 4e-1 (2.03e-3) —	7.310 0e-1 (6.27e-3) —	7.660 1e-1 (2.73e-3) —	8.263 8e-1 (3.31e-3)	
	15	48	8.039 5e-1 (1.24e-3) ≈	7.195 7e-1 (5.53e-3) —	7.971 1e-1 (2.99e-3) ≈	8.032 7e-1 (5.83e-3)	
	20	58	7.576 5e-1 (2.52e-3) —	6.406 5e-1 (9.01e-3) —	7.418 6e-1 (5.32e-3) —	7.806 2e-1 (8.13e-3)	
WFG6	5	28	7.238 3e-1 (4.70e-3) —	6.678 4e-1 (6.21e-3) —	8.191 8e-1 (4.34e-3) +	7.470 4e-1 (4.10e-3)	
	10	38	8.269 1e-1 (4.53e-3) —	7.211 1e-1 (8.83e-3) —	7.555 7e-1 (6.73e-3) —	8.359 1e-1 (7.06e-3)	
	15	48	8.319 9e-1 (4.00e-3) ≈	7.387 1e-1 (6.87e-3) —	7.562 8e-1 (3.66e-3) —	8.287 4e-1 (8.07e-3)	
	20	58	7.823 5e-1 (4.91e-3) —	6.484 0e-1 (1.03e-2) —	8.367 3e-1 (5.23e-3) +	7.934 6e-1 (1.10e-2)	
WFG7	5	28	7.648 1e-1 (8.92e-4) —	7.167 8e-1 (3.39e-3) —	6.641 4e-1 (1.87e-3) —	7.930 2e-1 (1.24e-3)	
	10	38	8.738 3e-1 (2.58e-3) —	7.986 2e-1 (5.21e-3) —	7.034 4e-1 (2.64e-3) —	8.993 2e-1 (3.31e-3)	
	15	48	8.691 4e-1 (1.34e-3) —	7.973 5e-1 (3.94e-3) —	7.901 0e-1 (4.40e-3) —	8.891 5e-1 (3.00e-3)	
	20	58	8.203 9e-1 (3.89e-3) —	7.268 5e-1 (8.73e-3) —	7.579 7e-1 (4.35e-3) —	8.660 2e-1 (1.31e-2)	
WFG8	5	28	7.018 3e-1 (2.58e-3) —	6.414 8e-1 (4.92e-3) —	6.943 1e-1 (3.37e-3) —	7.250 4e-1 (3.98e-3)	
	10	38	7.956 8e-1 (4.55e-3) +	6.687 6e-1 (9.47e-3) —	7.074 2e-1 (3.95e-3) —	7.613 8e-1 (7.81e-3)	
	15	48	8.178 7e-1 (5.89e-3) +	6.665 5e-1 (1.60e-2) —	7.464 2e-1 (1.40e-2) —	7.896 5e-1 (1.05e-2)	
	20	58	7.797 7e-1 (9.70e-3) ≈	6.405 1e-1 (2.90e-2) —	7.664 0e-1 (1.00e-2) —	7.730 8e-1 (3.31e-2)	
WFG9	5	28	6.927 9e-1 (1.26e-2) —	6.387 3e-1 (1.58e-2) —	7.235 4e-1 (2.45e-3) —	7.429 4e-1 (4.26e-3)	
	10	38	7.541 9e-1 (1.32e-2) —	6.643 1e-1 (2.16e-2) —	7.451 1e-1 (7.08e-3) —	7.987 8e-1 (1.00e-2)	
	15	48	6.975 8e-1 (2.02e-2) ≈	5.995 0e-1 (4.84e-2) —	7.043 3e-1 (1.13e-2) ≈	7.026 7e-1 (2.40e-2)	
	20	58	6.561 2e-1 (1.73e-2) —	5.406 2e-1 (3.69e-2) —	6.130 3e-1 (7.06e-3) —	6.887 3e-1 (2.53e-2)	
+ / - / ≈			3/26/7	0/33/3	2/29/5		

表3 各算法在MaF测试问题上获得的HV指标值的统计结果

Problem	m	D	ASEA	NSGA-III	RPS-NSGA-II	SdEA	θ -DEA
MaF1	5	14	5.125 5e-3 (4.66e-4) —	6.123 0e-3 (4.61e-4) —	6.928 2e-3 (4.54e-4) —	7.867 7e-3 (2.61e-4) —	5.564 1e-3 (1.90e-4) —
	10	19	5.238 9e-8 (3.30e-8) $\approx$	4.536 5e-7 (2.06e-8) $\approx$	5.292 6e-7 (4.89e-8) $\approx$	4.446 2e-7 (4.20e-8) $\approx$	3.366 5e-7 (5.16e-8) $\approx$
	15	24	9.959 9e-13 (4.08e-13) +	3.179 8e-12 (4.59e-13) +	3.643 4e-12 (1.13e-12) +	3.845 9e-12 (7.05e-13) +	3.525 4e-12 (7.15e-13) +
	20	29	1.158 1e-23 (1.43e-23) +	1.087 9e-22 (2.23e-22) +	1.620 8e-21 (1.57e-21) +	2.100 5e-22 (5.14e-22) +	2.378 6e-21 (1.23e-21) +
MaF2	5	14	1.721 6e-1 (3.49e-3) —	1.881 8e-1 (2.44e-3) —	1.861 0e-1 (2.15e-3) —	1.803 1e-1 (3.25e-3) —	1.735 2e-1 (3.58e-3) —
	10	19	1.997 0e-1 (1.00e-2) —	2.159 7e-1 (6.54e-3) —	2.054 8e-1 (3.86e-3) —	2.126 6e-1 (3.92e-3) —	1.938 0e-1 (7.02e-3) —
	15	24	1.668 2e-1 (1.52e-3) —	1.676 8e-1 (6.78e-3) —	1.601 8e-1 (6.55e-3) —	1.709 7e-1 (5.71e-3) $\approx$	1.665 2e-1 (1.75e-3) —
	20	29	4.700 8e-2 (5.06e-4) —	3.149 4e-2 (4.63e-3) —	4.296 9e-2 (1.99e-3) —	4.695 8e-2 (1.02e-3) —	4.776 4e-2 (5.50e-4) $\approx$
MaF3	5	14	9.845 6e-1 (2.36e-2) $\approx$	9.990 2e-1 (3.62e-4) +	9.316 3e-1 (1.24e-1) —	9.900 1e-1 (6.19e-3) —	9.921 6e-1 (2.04e-3) +
	10	19	9.176 9e-1 (2.44e-1) —	5.138 3e-2 (2.23e-1) —	7.955 6e-1 (1.23e-1) —	5.112 5e-1 (4.78e-1) —	8.597 4e-1 (2.95e-1) —
	15	24	9.935 8e-1 (6.78e-3) —	9.585 5e-2 (2.95e-1) —	6.834 5e-1 (4.30e-1) —	7.365 5e-1 (4.37e-1) —	8.197 9e-1 (2.16e-1) —
	20	29	3.411 1e-1 (6.22e-2) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	1.949 7e-1 (1.58e-1) —	1.486 4e-1 (1.74e-1) —	2.548 7e-1 (1.35e-1) —
MaF4	5	14	6.212 5e-2 (9.72e-3) —	6.486 1e-2 (1.91e-2) —	9.990 6e-2 (4.52e-3) —	1.042 8e-1 (2.29e-3) —	7.643 8e-2 (8.79e-3) —
	10	19	3.993 5e-6 (4.38e-6) —	2.150 2e-4 (3.07e-5) $\approx$	9.331 6e-5 (6.48e-5) —	2.603 2e-4 (2.14e-5) +	2.151 9e-4 (2.46e-5) $\approx$
	15	24	1.244 9e-10 (1.83e-10) $\approx$	1.919 3e-7 (3.17e-8) +	8.972 1e-9 (1.75e-8) $\approx$	1.386 1e-7 (2.27e-8) +	9.787 5e-8 (2.17e-8) +
	20	29	6.632 3e-18 (2.43e-17) +	3.153 1e-13 (3.51e-13) +	3.888 3e-14 (1.45e-13) +	1.865 4e-12 (5.36e-13) +	1.452 4e-12 (3.08e-13) +
MaF5	5	14	8.114 6e-1 (6.73e-4) +	8.120 9e-1 (3.58e-4) +	7.928 5e-1 (1.91e-3) —	7.822 1e-1 (7.12e-3) —	8.127 5e-1 (3.96e-4) +
	10	19	9.699 6e-1 (2.92e-4) +	9.691 8e-1 (2.24e-4) +	9.575 3e-1 (3.08e-3) +	9.480 1e-1 (1.83e-2) $\approx$	9.700 0e-1 (2.03e-4) +
	15	24	9.906 5e-1 (1.44e-4) +	9.906 4e-1 (9.50e-5) +	9.602 3e-1 (5.94e-3) +	9.497 9e-1 (2.12e-2) +	9.907 1e-1 (9.04e-5) +
	20	29	3.571 7e-1 (2.67e-5) +	3.520 9e-1 (8.04e-3) +	3.489 8e-1 (1.16e-3) +	3.257 7e-1 (1.74e-2) —	3.571 7e-1 (2.21e-5) +
MaF6	5	14	1.112 0e-1 (4.25e-3) —	1.228 0e-1 (1.44e-3) —	9.935 2e-2 (2.44e-2) —	1.198 5e-1 (3.87e-3) —	1.160 0e-1 (1.42e-3) —
	10	19	9.352 5e-2 (2.29e-3) +	1.202 9e-3 (3.14e-3) $\approx$	5.486 5e-2 (3.25e-2) +	9.387 9e-2 (1.27e-3) +	7.636 6e-2 (3.92e-2) +
	15	24	9.059 9e-2 (1.14e-3) +	5.109 1e-2 (2.78e-2) +	5.490 0e-3 (1.76e-2) —	8.806 2e-2 (3.54e-3) +	5.807 2e-2 (2.07e-2) +
	20	29	1.287 6e-2 (3.02e-3) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	6.499 3e-4 (1.64e-3) +	5.453 2e-3 (5.11e-3) +	1.376 7e-5 (5.06e-5) +
MaF7	5	24	1.935 0e-1 (1.31e-2) —	2.579 7e-1 (3.30e-3) —	2.608 2e-1 (3.66e-3) —	2.472 1e-1 (4.29e-3) —	2.210 3e-1 (1.07e-2) —
	10	29	1.140 3e-1 (2.70e-2) +	1.658 1e-1 (7.56e-3) +	1.866 2e-1 (3.20e-3) +	1.789 2e-1 (6.55e-3) +	1.827 7e-1 (9.57e-3) +
	15	34	1.354 3e-1 (1.04e-2) +	1.481 9e-1 (8.43e-3) +	1.509 7e-1 (6.73e-3) +	1.213 2e-1 (9.38e-3) +	1.551 6e-1 (6.56e-3) +
	20	39	3.039 0e-2 (2.45e-3) +	2.071 5e-2 (2.37e-3) +	2.730 8e-2 (2.16e-3) +	2.213 6e-2 (2.09e-3) +	3.128 5e-2 (2.89e-3) +
MaF8	5	2	8.594 0e-2 (3.95e-3) —	1.083 9e-1 (1.36e-3) —	9.250 8e-2 (4.58e-3) —	1.044 0e-1 (2.67e-3) —	8.313 2e-2 (5.25e-3) —
	10	2	6.811 0e-3 (1.40e-4) —	9.316 2e-3 (3.15e-4) —	4.233 2e-3 (1.12e-3) —	7.482 4e-3 (6.11e-4) —	5.460 5e-3 (9.78e-4) —
	15	2	2.756 3e-4 (1.76e-5) —	3.663 1e-4 (4.13e-5) —	1.728 8e-4 (4.84e-5) —	2.623 3e-4 (3.37e-5) —	1.670 7e-4 (3.82e-5) —
	20	2	2.318 7e-6 (2.19e-7) —	2.618 4e-6 (7.25e-7) —	1.329 4e-6 (3.18e-7) —	2.176 4e-6 (4.05e-7) —	1.401 1e-6 (3.59e-7) —
MaF9	5	2	2.303 2e-1 (7.26e-3) —	2.307 1e-1 (4.91e-2) —	2.427 8e-1 (1.36e-2) —	1.900 8e-1 (3.07e-2) —	1.349 1e-1 (5.57e-2) —
	10	2	1.011 3e-2 (1.63e-3) —	9.943 7e-3 (1.49e-3) —	7.846 2e-3 (1.35e-3) —	4.089 1e-3 (2.23e-3) —	5.791 9e-3 (1.14e-3) —
	15	2	4.538 0e-4 (1.17e-4) —	4.719 5e-4 (2.43e-4) —	2.748 7e-4 (1.32e-4) —	4.752 8e-4 (1.21e-4) —	1.921 5e-4 (1.43e-4) —
	20	2	2.782 4e-6 (1.00e-6) —	6.420 3e-7 (1.27e-6) —	6.442 6e-7 (1.07e-6) —	7.119 5e-7 (1.25e-6) —	1.705 9e-6 (1.78e-6) —
MaF10	5	14	8.057 3e-1 (3.81e-2) —	9.935 4e-1 (1.12e-2) —	9.835 6e-1 (1.46e-2) —	9.525 4e-1 (2.49e-2) —	9.954 1e-1 (6.52e-4) —
	10	19	8.800 4e-1 (6.33e-2) —	9.829 9e-1 (3.28e-2) —	9.861 5e-1 (2.64e-2) —	9.396 6e-1 (5.93e-2) —	9.964 3e-1 (1.01e-3) —
	15	24	9.961 2e-1 (1.70e-3) —	9.995 3e-1 (2.15e-4) +	9.995 7e-1 (3.62e-4) +	9.993 3e-1 (5.12e-4) +	9.961 5e-1 (1.02e-3) —
	20	29	3.561 3e-1 (8.35e-4) —	3.578 0e-1 (4.61e-4) —	3.580 2e-1 (3.92e-4) —	3.576 6e-1 (3.67e-4) —	3.564 0e-1 (4.38e-4) —
MaF11	5	14	9.925 6e-1 (8.87e-4) —	9.937 2e-1 (1.21e-3) —	9.770 7e-1 (6.69e-3) —	9.810 9e-1 (3.94e-3) —	9.929 0e-1 (1.11e-3) —
	10	19	9.885 5e-1 (2.71e-3) —	9.929 5e-1 (3.76e-3) —	9.941 7e-1 (1.11e-3) —	9.930 1e-1 (1.55e-3) —	9.886 6e-1 (3.06e-3) —
	15	24	9.674 1e-1 (5.40e-2) —	9.950 6e-1 (2.10e-3) $\approx$	9.949 1e-1 (2.06e-3) $\approx$	9.927 4e-1 (2.12e-3) —	8.622 0e-1 (7.57e-2) —
	20	29	3.172 2e-1 (3.39e-2) —	3.545 6e-1 (3.29e-3) —	3.566 8e-1 (7.35e-4) —	3.561 3e-1 (9.88e-4) —	2.943 1e-1 (1.79e-2) —
MaF12	5	14	7.766 4e-1 (1.77e-3) +	7.522 4e-1 (6.56e-3) $\approx$	7.481 7e-1 (4.63e-3) —	7.354 3e-1 (6.12e-3) —	7.615 4e-1 (4.03e-3) +
	10	19	8.987 7e-1 (4.00e-3) +	8.534 8e-1 (4.29e-2) +	8.864 5e-1 (2.49e-2) —	8.652 8e-1 (1.26e-2) —	8.759 4e-1 (4.74e-3) +
	15	24	8.980 5e-1 (1.06e-2) +	8.820 0e-1 (5.76e-2) +	8.405 8e-1 (6.39e-2) +	7.945 4e-1 (5.52e-2) +	8.820 8e-1 (1.30e-2) +
	20	29	3.121 3e-1 (5.10e-3) +	2.758 9e-1 (2.54e-2) +	3.084 1e-1 (3.19e-3) +	2.824 5e-1 (1.41e-2) +	3.091 4e-1 (3.68e-3) +
MaF13	5	5	8.195 3e-2 (3.72e-2) —	2.068 0e-1 (1.74e-2) —	1.204 5e-1 (4.44e-2) —	1.454 1e-1 (2.87e-2) —	1.431 2e-1 (3.63e-2) —
	10	5	4.900 4e-2 (3.35e-2) —	9.757 1e-2 (2.05e-2) —	2.392 0e-2 (3.56e-2) —	1.932 1e-2 (2.82e-2) —	1.091 2e-2 (2.53e-2) —
	15	5	6.269 2e-5 (7.25e-5) —	2.458 9e-2 (2.37e-2) —	3.933 8e-3 (8.48e-3) —	3.712 4e-2 (2.79e-2) —	1.112 8e-4 (2.85e-4) —
	20	5	2.156 4e-6 (4.34e-6) —	1.331 8e-2 (3.42e-3) —	8.055 3e-5 (3.42e-4) —	3.958 9e-3 (4.71e-3) —	5.416 8e-7 (8.60e-7) —
MaF14	5	100	8.802 8e-4 (3.94e-3) —	1.815 7e-2 (5.71e-2) —	1.253 3e-4 (5.60e-4) —	1.484 7e-2 (4.97e-2) —	4.741 6e-2 (6.80e-2) —
	10	200	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	2.126 4e-4 (9.51e-4) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —
	15	300	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	1.089 0e-3 (4.87e-3) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$
	20	400	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	8.610 8e-5 (3.85e-4) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$
MaF15	5	100	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	2.559 8e-5 (1.14e-4) —
	10	200	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —
	15	300	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$
	20	400	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$
+ / - / $\approx$			17/36/7	17/33/10	15/38/7	16/37/7	19/34/7
Problem	M	D	TS-NSGA-II	VaEA	RVEAiGNG	MaOEA-OTCR	
MaF1	5	14	8.498 3e-3 (2.00e-4) —	9.395 3e-3 (1.90e-4) —	1.131 7e-2 (5.36e-4) —	1.272 5e-2 (1.49e-4)	
	10	19	2.641 9e-7 (9.10e-8) $\approx$	2.563 1e-7 (4.84e-7) $\approx$	3.358 1e-7 (2.00e-7) $\approx$	4.452 2e-7 (5.05e-7)	
	15	24	1.022 0e-12 (7.28e-13) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	1.498 5e-14 (6.30e-14) $\approx$	0.000 0e+0 (0.00e+0)	
	20	29	6.689 1e-23 (5.99e-23) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) $\approx$	1.175 8e-20 (2.72e-20) +	0.000 0e+0 (0.00e+0)	
MaF2	5	14	1.779 4e-1 (1.29e-3) —	1.753 7e-1 (1.62e-3) —	1.947 9e-1 (4.00e-3) —	2.024 2e-1 (1.60e-3)	
	10	19	2.032 0e-1 (1.90e-3) —	1.887 4e-1 (2.31e-3) —	2.117 8e-1 (6.70e-3) —	2.213 7e-1 (2.52e-3)	
	15	24	1.524 0e-1 (3.97e-3) —	1.517 2e-1 (2.07e-3) —	1.784 4e-1 (8.65e-3) $\approx$	1.738 1e-1 (5.17e-3)	
	20	29	3.938 1e-2 (1.00e-3) —	1.666 4e-2 (1.03e-3) —	3.826 2e-2 (9.88e-3) —	4.853 8e-2 (1.71e-3)	
MaF3	5	14	9.855 0e-1 (1.14e-2) $\approx$	8.851 5e-1 (1.62e-1) —	9.791 3e-1 (9.36e-3) —	9.903 4e-1 (1.41e-2)	
	10	19	8.506 1e-1 (1.01e-1) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	9.567 7e-1 (2.62e-2) —	9.999 8e-1 (3.32e-5)	
	15	24	4.790 3e-1 (4.27e-1) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	9.415 9e-1 (2.79e-2) —	9.999 0e-1 (1.96e-4)	
	20	29	2.368 8e-1 (1.51e-1) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	3.267 6e-1 (6.51e-2) —	3.481 3e-1 (4.63e-2)	

表3(续)

Problem	M	D	TS-NSGA-II	VaEA	RVEAiGNG	MaOEA-OTCR
MaF4	5	14	7.075 5e-2 (7.72e-3) —	9.724 3e-2 (1.00e-2) —	1.151 8e-1 (5.81e-3) —	1.305 1e-1 (2.29e-3)
	10	19	1.451 4e-4 (5.14e-5) —	6.004 4e-5 (2.09e-5) —	2.030 6e-4 (6.66e-5) ≈	2.165 4e-4 (2.91e-5)
	15	24	2.789 8e-8 (4.21e-8) ≈	9.053 4e-9 (2.07e-8) —	5.208 6e-8 (3.61e-8) +	2.757 7e-8 (3.44e-8)
	20	29	4.225 0e-16 (1.50e-15) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	4.923 3e-12 (1.41e-11) +	0.000 0e+0 (0.00e+0)
MaF5	5	14	8.078 5e-1 (8.45e-4) +	7.391 2e-1 (3.47e-3) —	7.801 6e-1 (1.10e-2) —	8.063 1e-1 (7.59e-4)
	10	19	9.698 4e-1 (1.71e-3) +	8.259 3e-1 (5.76e-3) —	9.109 5e-1 (1.96e-2) —	9.526 6e-1 (1.19e-3)
	15	24	9.802 7e-1 (6.99e-3) +	8.197 8e-1 (4.93e-3) —	8.990 4e-1 (2.63e-2) —	9.333 2e-1 (2.29e-3)
	20	29	3.560 8e-1 (4.18e-4) +	8.416 3e-1 (4.99e-2) +	9.084 6e-1 (3.69e-2) +	3.403 8e-1 (5.08e-3)
MaF6	5	14	1.187 2e-1 (3.26e-3) —	1.144 9e-1 (3.20e-4) —	1.237 3e-1 (3.18e-3) —	1.295 8e-1 (3.38e-4)
	10	19	9.646 1e-2 (2.06e-3) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	9.348 2e-2 (3.65e-3) +	5.041 8e-3 (2.25e-2)
	15	24	8.854 8e-2 (1.89e-3) +	1.343 0e-2 (1.79e-2) ≈	7.326 4e-2 (3.18e-2) +	1.170 1e-2 (2.20e-2)
	20	29	9.424 9e-3 (4.00e-3) +	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	3.089 2e-2 (3.91e-2) +	0.000 0e+0 (0.00e+0)
MaF7	5	24	2.537 2e-1 (1.84e-3) —	2.241 2e-1 (3.72e-3) —	2.598 9e-1 (4.60e-3) —	2.747 1e-1 (6.67e-3)
	10	29	1.791 5e-1 (5.64e-3) +	9.718 1e-2 (9.42e-3) +	1.342 3e-1 (1.45e-2) +	9.423 8e-2 (1.19e-2)
	15	34	1.457 8e-1 (6.07e-3) +	7.574 3e-2 (3.07e-3) —	5.549 2e-2 (2.62e-2) —	9.054 9e-2 (3.54e-4)
	20	39	2.281 8e-2 (6.28e-3) +	7.361 8e-2 (7.55e-3) +	2.697 2e-2 (1.40e-2) +	1.076 0e-2 (2.65e-3)
MaF8	5	2	1.098 1e-1 (1.54e-3) —	1.144 6e-1 (3.58e-4) —	1.211 3e-1 (2.30e-3) —	1.262 9e-1 (4.63e-4)
	10	2	8.400 3e-3 (3.30e-4) —	9.206 4e-3 (1.02e-4) —	9.931 8e-3 (3.55e-4) —	1.089 4e-2 (1.00e-4)
	15	2	1.389 3e-4 (9.12e-5) —	4.187 0e-4 (2.22e-5) —	4.474 0e-4 (2.18e-5) —	5.267 5e-4 (1.66e-5)
	20	2	2.151 8e-6 (4.83e-7) —	3.006 0e-5 (3.54e-6) +	2.813 7e-6 (5.16e-6) —	5.147 9e-6 (1.42e-6)
MaF9	5	2	2.687 3e-1 (3.87e-2) —	1.702 3e-1 (4.95e-2) —	3.175 9e-1 (5.16e-3) —	3.234 1e-1 (4.70e-3)
	10	2	1.016 9e-2 (1.59e-3) —	1.282 9e-2 (2.41e-3) —	1.266 6e-2 (3.01e-3) —	1.677 3e-2 (3.33e-4)
	15	2	3.556 0e-4 (1.93e-4) —	5.032 4e-4 (2.04e-4) —	9.864 2e-4 (5.67e-5) —	1.059 5e-3 (9.90e-5)
	20	2	2.446 9e-6 (9.49e-7) —	3.919 3e-5 (1.92e-5) +	4.737 2e-6 (2.29e-6) —	9.356 9e-6 (2.04e-6)
MaF10	5	14	9.748 8e-1 (2.38e-2) —	9.309 6e-1 (2.45e-2) —	8.760 5e-1 (1.89e-2) —	9.985 6e-1 (1.68e-4)
	10	19	9.570 7e-1 (4.69e-2) —	6.801 7e-1 (5.63e-2) —	6.481 1e-1 (4.72e-2) —	9.996 6e-1 (1.67e-4)
	15	24	9.999 9e-1 (6.23e-6) +	8.383 4e-1 (4.51e-2) —	9.436 7e-1 (2.91e-2) —	9.991 4e-1 (2.68e-4)
	20	29	3.584 7e-1 (2.90e-5) +	2.889 1e-1 (4.18e-2) —	8.154 1e-1 (7.95e-2) +	3.582 6e-1 (8.82e-5)
MaF11	5	14	9.937 4e-1 (1.09e-3) —	9.397 3e-1 (1.15e-3) —	9.726 7e-1 (1.10e-2) —	9.971 1e-1 (6.32e-4)
	10	19	9.922 4e-1 (1.72e-3) —	8.932 9e-1 (2.49e-3) —	9.555 1e-1 (2.08e-2) —	9.990 7e-1 (4.37e-4)
	15	24	9.943 7e-1 (2.95e-3) ≈	8.536 6e-1 (1.40e-3) —	9.393 8e-1 (3.04e-2) —	9.954 8e-1 (1.65e-3)
	20	29	3.567 2e-1 (6.56e-4) —	3.192 4e-1 (4.11e-2) —	3.522 0e-1 (4.10e-4) ≈	3.578 0e-1 (2.77e-4)
MaF12	5	14	7.575 4e-1 (4.43e-3) +	6.793 9e-1 (9.67e-3) —	7.337 0e-1 (1.13e-2) —	7.535 6e-1 (3.36e-3)
	10	19	8.759 9e-1 (1.73e-2) +	7.320 9e-1 (3.70e-2) —	8.176 3e-1 (2.02e-2) —	8.441 5e-1 (5.34e-3)
	15	24	8.469 5e-1 (4.89e-2) +	6.353 0e-1 (6.10e-2) —	7.724 4e-1 (4.89e-2) ≈	7.731 2e-1 (8.96e-3)
	20	29	3.102 1e-1 (7.19e-3) +	7.453 1e-1 (3.77e-2) +	7.531 3e-1 (3.56e-2) +	2.549 6e-1 (1.19e-2)
MaF13	5	5	1.505 8e-1 (4.81e-2) —	2.218 4e-1 (1.05e-2) —	2.812 5e-1 (7.37e-3) —	2.953 2e-1 (5.40e-3)
	10	5	7.461 8e-3 (1.20e-2) —	1.053 1e-1 (9.81e-3) —	1.336 4e-1 (4.85e-3) —	1.421 5e-1 (2.63e-3)
	15	5	1.580 6e-3 (6.52e-3) —	5.520 4e-2 (9.09e-3) —	8.022 3e-2 (4.39e-3) —	8.563 5e-2 (3.65e-3)
	20	5	3.768 0e-5 (1.57e-4) —	1.045 3e-2 (6.61e-3) +	1.643 7e-2 (3.11e-3) +	1.716 5e-2 (1.25e-3)
MaF14	5	100	5.986 6e-4 (2.68e-3) —	1.104 0e-2 (1.86e-2) —	2.720 6e-1 (1.91e-1) —	4.465 5e-1 (9.39e-2)
	10	200	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	1.016 6e-3 (4.55e-3) —	3.797 0e-2 (8.72e-2)
	15	300	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
	20	400	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	6.010 1e-4 (2.69e-3) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
MaF15	5	100	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	1.067 2e-5 (2.68e-5) —	1.550 0e-2 (7.77e-3)
	10	200	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	0.000 0e+0 (0.00e+0) —	3.210 2e-7 (6.48e-7)
	15	300	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	2.008 3e-23 (7.80e-23)
	20	400	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0) ≈	0.000 0e+0 (0.00e+0)
+ / - / ≈			19/33/8	7/42/11	12/38/10	

WFG1~WFG3是具有不规则PF的测试问题.在WFG1和WFG2上, MaOEA-OTCR显著优于其他对比算法,其原因是目标迁移策略和条件替代机制相互协作,使得种群能够收敛于真实PF. WFG3更具有挑战性,其具有线性和退化的PF.在该问题上,所有算法均表现不佳,这是因为各算法都尽可能扩展种群以覆盖PF,致使很少种群个体能落于退化的PF上.

WFG4~WFG9的PF都为凹形的,但在决策空间中它们具有不同的特性.对于WFG4而言,它具有欺骗和多模的PF.在此问题上, MaOEA-OTCR在5目标、20目标上优于对比算法,且在10目标、15目标上HV值仅次于SdEA和TS-NSGA-II. WFG5和WFG6都具有多模态特性.在这两问题上, MaOEA-OTCR获得的HV值明显优于其他算法.同时, MaOEA-

OTCR在WFG7上也表现最优.对于具有决策变量不可分离的WFG8和WFG9而言, MaOEA-OTCR在5目标的WFG8~WFG9上显著优于其他算法.相对于其他目标,虽然 MaOEA-OTCR获得的HV值略低于最大HV值,但是整体表现良好.

3.2.2 算法在MaF测试问题上的对比分析

MaOEA-OTCR与其他8个对比算法在更加贴近现实场景的MaF1~MaF15测试问题上取得的HV值如表3所示,且各算法在每个测试问题上获得的最好结果以粗体显示.由表3可知,所提出算法在大多数测试问题上优于其他对比算法.

MaF1和MaF4是具有倒置PF的测试问题.在这两问题上, MaOEA-OTCR在5目标上优于其他对比算法,但在其他目标上劣于对比算法.这可能是

因为所提出的MaOEA-OTCR不适合求解该类问题. MaF2是在DTLZ2问题上改进的,更加难以收敛. MaOEA-OTCR在该测试问题上优于其他算法.除了5目标的MaF3, MaOEA-OTCR在MaF3的其他目标中优于对比算法. MaF5~MaF7分别具有凸的、凹的以及混合不连续的Pareto前沿, MaOEA-OTCR在这3个测试问题中性能较为一般. MaF8和MaF9具有线性退化Pareto前沿, MaF11具有凸的、不连续的PF. 在这3个测试问题上, MaOEA-OTCR显著优于其他对比算法. 在具有混合型PF的MaF10和变量不可分离且带有欺骗特性的MaF12上, MaOEA-OTCR整体表现良好. MaF13是一个PF退化且Pareto最优解很复

杂的问题. 在该问题上, MaOEA-OTCR在所有目标数中均优于对比算法,这也表明了MaOEA-OTCR在处理退化PF和难以收敛问题上的能力. 对于具有大规模特性的MaF14和MaF15, MaOEA-OTCR算法在大部分目标上获得了最佳HV值.

为了直观地呈现各算法的性能,绘制各算法在20目标MaF8上获得的最终种群分布情况如图1所示. 由图1可知,所提出MaOEA-OTCR的收敛性和多样性最好;尽管SdEA能使种群收敛于PF,但其使种群个体主要分布于PF的边界或者中间;其他算法的收敛能力较差,无法使种群收敛于PF的范围[0, 2].

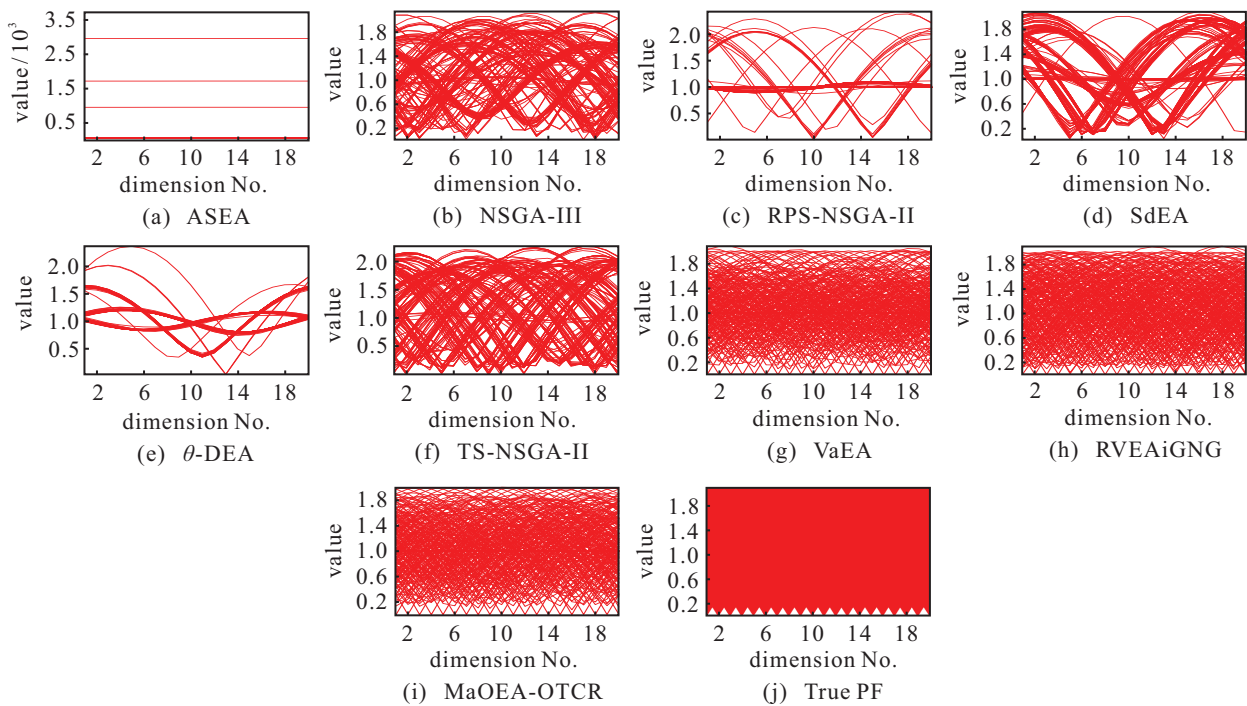


图 1 各算法在20目标MaF8上获得的最终种群分布

表 4 各算法在UF测试问题上获得的HV指标值的统计结果

Problem	<i>m</i>	<i>D</i>	ASEA	NSGA-III	RPS-NSGA-II	SdEA	θ -DEA
UF1	2	30	5.887 9e-1 (2.66e-2) $\approx$	5.813 9e-1 (2.02e-2) $-$	5.721 4e-1 (3.23e-2) $-$	5.976 3e-1 (2.27e-2) $\approx$	5.891 0e-1 (1.66e-2) $\approx$
UF2	2	30	6.620 3e-1 (9.39e-3) $-$	6.679 3e-1 (6.51e-3) $\approx$	6.586 3e-1 (6.62e-3) $-$	6.603 5e-1 (6.59e-3) $-$	6.635 3e-1 (5.10e-3) $-$
UF3	2	30	3.968 1e-1 (3.75e-2) $-$	4.718 7e-1 (3.87e-2) $\approx$	4.165 6e-1 (3.92e-2) $-$	4.396 7e-1 (4.14e-2) $\approx$	4.144 0e-1 (3.05e-2) $-$
UF4	2	30	3.679 1e-1 (2.75e-3) $-$	3.716 6e-1 (1.56e-3) $-$	3.667 5e-1 (2.92e-3) $-$	3.743 3e-1 (2.08e-3) $-$	3.702 7e-1 (3.52e-3) $-$
UF5	2	30	2.032 6e-1 (6.59e-2) $\approx$	2.163 3e-1 (5.31e-2) $-$	2.325 1e-1 (6.25e-2) $\approx$	2.123 4e-1 (6.46e-2) $\approx$	2.360 4e-1 (4.62e-2) $\approx$
UF6	2	30	3.107 8e-1 (5.64e-2) $-$	3.198 9e-1 (5.24e-2) $\approx$	2.958 0e-1 (7.33e-2) $-$	3.214 4e-1 (3.74e-2) $-$	3.246 9e-1 (4.47e-2) $\approx$
UF7	2	30	4.327 5e-1 (1.02e-1) $\approx$	4.972 6e-1 (6.86e-2) $\approx$	4.022 8e-1 (8.08e-2) $-$	4.445 6e-1 (1.07e-1) $\approx$	4.174 3e-1 (1.07e-1) $\approx$
UF8	3	30	2.853 9e-1 (3.56e-2) $-$	3.220 5e-1 (1.79e-3) $-$	3.104 7e-1 (4.57e-3) $-$	3.407 7e-1 (4.06e-2) $\approx$	3.176 4e-1 (2.04e-3) $-$
UF9	3	30	4.165 4e-1 (5.15e-2) $-$	4.935 4e-1 (8.85e-2) $-$	5.215 8e-1 (8.12e-2) $\approx$	4.849 3e-1 (9.30e-2) $\approx$	4.531 9e-1 (4.72e-2) $-$
UF10	3	30	1.504 9e-1 (5.63e-2) $-$	1.711 5e-1 (7.52e-2) $-$	1.629 0e-1 (7.23e-2) $-$	1.670 3e-1 (6.97e-2) $-$	1.947 7e-1 (7.58e-2) $\approx$
+ / - / $\approx$			0/7/3	0/5/5	0/8/2	0/5/5	0/5/5
Problem	<i>M</i>	<i>D</i>	TS-NSGA-II	VaEA	RVEAiGNG	MaOEA-OTCR	
UF1	2	30	5.666 2e-1 (3.70e-2) $-$	5.677 0e-1 (2.46e-2) $-$	5.329 6e-1 (4.43e-2) $-$	5.930 7e-1 (1.85e-2)	
UF2	2	30	6.371 8e-1 (1.71e-2) $-$	6.583 1e-1 (7.47e-3) $-$	6.505 8e-1 (1.08e-2) $-$	6.706 7e-1 (1.31e-2)	
UF3	2	30	4.150 8e-1 (3.95e-2) $-$	4.195 5e-1 (3.69e-2) $-$	3.782 9e-1 (4.26e-2) $-$	4.553 5e-1 (5.45e-2)	
UF4	2	30	2.026 2e-1 (6.58e-2) $-$	3.661 8e-1 (1.04e-3) $-$	3.659 9e-1 (2.44e-3) $-$	3.880 4e-1 (2.06e-3)	
UF5	2	30	2.340 3e-1 (5.52e-2) $\approx$	2.294 1e-1 (4.57e-2) $\approx$	1.921 3e-1 (6.79e-2) $-$	2.395 0e-1 (5.05e-2)	
UF6	2	30	3.062 1e-1 (7.15e-2) $-$	3.300 0e-1 (3.65e-2) $-$	2.361 5e-1 (7.33e-2) $-$	3.432 6e-1 (4.78e-2)	
UF7	2	30	4.170 2e-1 (1.11e-1) $-$	4.301 0e-1 (9.83e-2) $\approx$	2.676 1e-1 (1.38e-1) $-$	4.552 5e-1 (9.43e-2)	
UF8	3	30	3.113 4e-1 (3.66e-3) $-$	3.115 0e-1 (2.32e-2) $-$	3.168 4e-1 (1.72e-2) $-$	3.522 2e-1 (1.04e-2)	
UF9	3	30	4.704 6e-1 (8.08e-2) $-$	4.786 9e-1 (6.17e-2) $-$	5.003 1e-1 (6.49e-2) $-$	5.695 7e-1 (5.79e-2)	
UF10	3	30	1.339 4e-1 (6.02e-2) $-$	1.636 0e-1 (6.19e-2) $-$	1.188 7e-1 (5.23e-2) $-$	2.029 8e-1 (8.95e-2)	
+ / - / $\approx$			0/9/1	0/7/3	0/10/0		

3.2.3 算法在UF测试问题上的对比分析

为了进一步评价MaOEA-OTCR处理具有不规则PF问题的能力,表4给出了MaOEA-OTCR与其他8个高维多目标算法在UF1~UF10测试问题上获得的HV指标值的统计结果。

UF1~UF3具有凸状PF,UF4、UF8和UF10具有凹状PF,UF5、UF6和UF9具有不连续的PF,且UF7具有线性的PF。由表4可知,MaOEA-OTCR在大多数问题上显著优于其他对比算法。这归因于MaOEA-OTCR中的多标准决策匹配选择、目标迁移策略以及条件替代准则的相互合作。同时,NSGA-III在UF3和UF7上表现最优,但没有显著优于MaOEA-OTCR,这可能是因为在低维空间下,Pareto支配能有效加速种群收敛。

4 结 论

针对多数现存MaOEAs仍无法有效处理具有不规则PF的MaOPs的问题,本文提出了基于目标迁移和条件替代的高维多目标进化算法。通过构建基于目标迁移策略和条件替代准则的环境选择过程,选取种群中收敛性和多样性好的个体进入下一代来权衡种群的收敛性和多样性;同时通过设计多标准决策的匹配选择策略,用于辅助算法挑选收敛性和多样性好的精英父代,以产生高质量子代,进而提升算法的搜索效率。

由大量的对比实验结果可知:MaOEA-OTCR在大多数具有规则和不规则PF的问题上,都显著地优于其他对比算法。尽管如此,MaOEA-OTCR没有在具有倒置PF的MaF1和MaF4上呈现较强的竞争力。未来将进一步提升MaOEA-OTCR的性能,此外也计划扩展MaOEA-OTCR求解高维约束多目标优化问题。

参考文献(References)

- [1] Cai X J, Zhang J J, Ning Z H, et al. A many-objective multistage optimization-based fuzzy decision-making model for coal production prediction[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 29(12): 3665-3675.
- [2] Zhang Z X, Zhao M K, Wang H, et al. An efficient interval many-objective evolutionary algorithm for cloud task scheduling problem under uncertainty[J]. Information Sciences, 2022, 583: 56-72.
- [3] 肖人彬, 李贵, 陈峙臻. 进化超多目标优化研究进展及展望[J]. 控制与决策, 2023, 38(7): 1761-1788. (Xiao R B, Li G, Chen S Z. Research progress and prospect of evolutionary many-objective optimization[J]. Control and Decision, 2023, 38(7): 1761-1788.)
- [4] 刘建昌, 李飞, 王洪海, 等. 进化高维多目标优化算法研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 879-887. (Liu J C, Li F, Wang H H, et al. Survey on evolutionary many-objective optimization algorithms[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 879-887.)
- [5] 呼子宇, 李玉林, 魏之慧, 等. 面向复杂超多目标优化问题的自适应增强学习进化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 2849-2859. (Hu Z Y, Li Y L, Wei Z H, et al. Adaptive boosting learning evolutionary algorithm for complex many-objective optimization problems[J]. Control and Decision, 2022, 37(11): 2849-2859.)
- [6] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007, 4403: 5.
- [7] Liu J H, Wang Y P, Cheung Y M. A Ca-dominance-based solution estimation evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 248: 108738.
- [8] Hadka D, Reed P. Borg: An auto-adaptive many-objective evolutionary computing framework[J]. Evolutionary Computation, 2013, 21(2): 231-259.
- [9] Yang S X, Li M Q, Liu X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [10] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 331-345.
- [11] Gu Q H, Chen H Y, Chen L, et al. A many-objective evolutionary algorithm with reference points-based strengthened dominance relation[J]. Information Sciences, 2021, 554: 236-255.
- [12] Zhang W, Liu J C, Tan S B, et al. A decomposition-rotation dominance based evolutionary algorithm with reference point adaption for many-objective optimization[J]. Expert Systems with Applications, 2023, 215: 119424.
- [13] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731.
- [14] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.
- [15] Liang Z P, Luo T T, Hu K F, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4553-4566.
- [16] Liu Q Q, Jin Y C, Heiderich M, et al. An adaptive reference vector-guided evolutionary algorithm using growing neural gas for many-objective optimization of irregular problems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(5): 2698-2711.

- [17] Dhiman G, Soni M, Pandey H M, et al. A novel hybrid hypervolume indicator and reference vector adaptation strategies based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Engineering with Computers*, 2021, 37(4): 3017-3035.
- [18] Li F, Cheng R, Liu J C, et al. A two-stage R2 indicator based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 67: 245-260.
- [19] Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 173-187.
- [20] Li K, Deb K, Zhang Q F, et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(5): 694-716.
- [21] Wang H D, Jiao L C, Yao X. Two_Arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(4): 524-541.
- [22] Chen H K, Cheng R, Pedrycz W, et al. Solving many-objective optimization problems via multistage evolutionary search[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(6): 3552-3564.
- [23] Ming F, Gong W Y, Wang L. A two-stage evolutionary algorithm with balanced convergence and diversity for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(10): 6222-6234.
- [24] Xiang Y, Zhou Y R, Li M Q, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131-152.
- [25] 张伟, 刘建昌, 谭树彬, 等. 基于指标选择和密度评估删除的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(10): 2805-2814.
(Zhang W, Liu J C, Tan S B, et al. An indicator selection and density estimation deletion based many-objective evolutionary algorithm[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(10): 2805-2814.)
- [26] Liu Y P, Ishibuchi H, Masuyama N, et al. Adapting reference vectors and scalarizing functions by growing neural gas to handle irregular Pareto fronts[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(3): 439-453.
- [27] Qiu W B, Zhu J H, Wu G H, et al. Ensemble many-objective optimization algorithm based on voting mechanism[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(3): 1716-1730.
- [28] 覃灏, 李军华. 基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(11): 2808-2817.
(Qin H, Li J H. Many-objective evolutionary algorithm based on population association strategy and enhanced solution set criterion[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(11): 2808-2817.)
- [29] Deb K, Agrawal R B. Simulated binary crossover for continuous search space[J]. *Complex Systems*, 1995, 9(2): 115-148.
- [30] Deb K, Goyal M. A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design[J]. *Computer Science and Informatics*, 1996, 26: 30-45.
- [31] Liu Y P, Gong D W, Sun J, et al. A many-objective evolutionary algorithm using a one-by-one selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2689-2702.
- [32] Li M Q, Yang S X, Liu X H. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(3): 348-365.
- [33] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506.
- [34] Cheng R, Li M Q, Tian Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3(1): 67-81.
- [35] Zhang Q, Zhou A, Zhao S, et al. Multi-objective optimization test instances for the CEC 2009 special session and competition[R]. Singapore: Nanyang Technological University, 2008.
- [36] Liu C, Zhao Q, Yan B, et al. Adaptive sorting-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 247-257.
- [37] Deb K, Jian H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based non-dominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601.
- [38] Pan L Q, Li L H, He C, et al. A subregion division-based evolutionary algorithm with effective mating selection for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(8): 3477-3490.
- [39] Yuan Y, Xu H, Wang B, et al. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 20(1): 16-37.

作者简介

田瑾然(1998—), 男, 硕士生, 从事高维多目标优化的研究, E-mail: 1628954105@qq.com;

刘建昌(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多目标优化、故障诊断等研究, E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn;

张伟(1997—), 男, 博士生, 从事多目标优化的研究, E-mail: 15940202607@163.com;

刘圆超(1996—), 男, 博士生, 从事多目标优化的研究, E-mail: Yuanchaoliu@126.com;

谭树彬(1974—), 男, 副教授, 博士, 从事工业人工智能及应用的研究, E-mail: tanshubin@ise.neu.edu.cn.