



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



基于时间分段提高对称网络能控性

王立夫, 寇晓宇, 孔芝, 郭戈

引用本文:

王立夫, 寇晓宇, 孔芝, 郭戈. 基于时间分段提高对称网络能控性[J]. *控制与决策*, 2024, 39(8): 2671–2678.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0202>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

面向复杂网络的异常检测研究进展

Research progress of anomaly detection for complex networks

控制与决策. 2021, 36(6): 1293–1310 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0055>

基于SAPSO算法的RBF神经网络设计

Design of RBF neural network based on SAPSO algorithm

控制与决策. 2021, 36(9): 2305–2312 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0176>

一种新的基于标签传播的复杂网络重叠社区识别算法

A novel algorithm for overlapping community detection based on label propagation in complex networks

控制与决策. 2020, 35(11): 2733–2742 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0176>

事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 H_∞ 故障检测

Event-triggered H_∞ fault detection for networked control systems with distributed delays

控制与决策. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

基于超级节点的分布式传感器节点定位算法

A distributed sensor nodes localization algorithm based on super nodes

控制与决策. 2020, 35(12): 2898–2906 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0219>

基于时间分段提高对称网络能控性

王立夫[†], 寇晓宇, 孔芝, 郭戈

(东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 网络结构对实现网络完全能控有很大的影响,在不增加驱动节点的前提下,仅基于网络结构来优化复杂网络的能控性具有重要意义.基于此,提出一种将静态对称网络划分成由多个快照(每个快照是一个静态网络)组成的动态时变网络的方法,利用时变网络的优势减少驱动节点提高网络能控性;给出由多个快照组成时变对称网络能控性的判据,快照的最优划分,驱动节点数量与快照数量的关系;通过实际例子说明该划分方法的应用过程,并在模型网络和真实网络进行仿真验证,结果表明通过时间分段的方法可以有效减少对称网络中驱动节点的数量,提高网络能控性.

关键词: 对称网络; 能控性; 时变网络; 最大匹配; 无向仙人掌

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0202

引用格式: 王立夫,寇晓宇,孔芝,等.基于时间分段提高对称网络能控性[J].控制与决策,2024,39(8):2671-2678.

Improving controllability of symmetric network based on time segmentation

WANG Li-fu[†], KOU Xiao-yu, KONG Zhi, GUO Ge

(School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: Network structure has a great impact on the realization of complete network control. Therefore, it is of great significance to optimize the controllability of complex networks only based on network structure without adding drive nodes. This paper proposes a method of dividing a static symmetric network into a dynamic time-varying network composed of multiple snapshots (each snapshot is a static network), which uses the advantages of the time-varying network to reduce the number of driving nodes and improve the network controllability. The controllability criteria of the time-varying symmetric network composed of multiple snapshots, the optimal partition of snapshots, and the relationship between the number of drive nodes and the number of snapshots are given. The application process of the partition method is illustrated by an actual example, and the simulation results are verified in the model network and the real network. The results show that the method of time segmentation can effectively reduce the number of driving nodes in the symmetric network and improve the network controllability.

Keywords: symmetric network; controllability; time-varying network; maximum matching; undirected cactus

0 引言

现实世界中的许多复杂系统可以用复杂网络来描述,复杂系统的各个组成部分可以抽象为节点,它们之间的联系可以抽象为边,如交通网络可以看作各个车站通过车站间的线路相互连接形成的网络^[1-3],类似的还有新陈代谢网络、社交网络、疾病传播网络^[4-5]等.因此,复杂网络为研究复杂系统提供了一种新的描述方式和分析工具^[6].对复杂网络进行研究的最终目的是控制网络的行为,从而使其更好地为人类社会服务,复杂网络的能控性受到越来越多学者的

关注.

在复杂网络能控性问题的研究中,可以通过控制所有节点达到控制整个网络的目的,但在现实中过于耗费资源,因此需要找到最少的驱动节点以确保网络的能控性.许多学者针对此方面进行了研究. Liu等^[7]提出了最大匹配算法来寻找有向复杂网络的最小驱动节点数; Yuan等^[8]引入了精确能控性理论来确定一组最小的驱动节点集,使得具有任意结构和链路权重的网络实现完全能控; Nepusz等^[9]提出复杂网络的边动态理论,分析了其结构能控性和最小驱动

收稿日期: 2023-02-23; 录用日期: 2023-06-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573077, U1808205); 河北省自然科学基金面上项目(F2000501005).

责任编辑: 虞文武.

[†]通讯作者. E-mail: wlfkz@qq.com.

节点选择,发现驱动节点数量由联合度分布决定.

上述工作主要研究了控制整个网络系统的最小驱动节点集的确定方法,现实网络系统的驱动节点集是由网络结构决定的,一般对于一个真实网络系统是很难增加驱动节点的,例如神经系统中作为驱动节点的感觉神经元数量和功能是由人体机制预先决定的.因此,人们需要在不增加驱动节点的情况下,对网络结构做出一些优化策略来提高网络系统的能控性.Wang等^[10]通过向网络中增加连边来减少使网络能控时所需的驱动节点数;Zhang等^[11]研究了添加边、删除边和删除输入3种关于最小成本结构扰动的问题,以使网络系统在结构上能控或不能控;Chanekar等^[12]通过研究发现,增加边或修改边的权重可以改善网络的能控性.但上述方法并不适用于所有类型的网络,有些真实网络的结构很难改变.以蛋白质网络^[13]为例,不同蛋白质之间的相互作用代表网络中的边,这些是由生物机制事先确定的,因此,还需要新的方法来提高网络的能控性.Cui等^[14]提出一种时间分段方案,将静态网络转换为由一组时间片段组成的时变网络,利用时变网络的优势提高原始网络的能控性.

文献[14]给出的通过时间分段的方法提高网络的能控性,考虑的是网络中所有的参数是任意且相互独立的情况.但对于现实网络系统中普遍存在的对称网络,其系统的参数具有对称约束,如从扩散MRI数据重建的一类结构性脑网络^[15]等.然而对于对称网络如何按照某种方案在不增加驱动节点的前提下,进行时间分段提高能控性的问题尚未得到解决.因此,本文在文献[14]的基础上,将有向网络中的相关结论拓展到对称网络,并提出对称网络的时间分段算法来提高对称网络的能控性.同时,本文还研究对称网络在时间分段后形成的对称时变网络的快照数量与驱动节点数量之间的关系,将文献[14]中的算法由一个驱动节点拓展到多个驱动节点,更加适用于真实网络.本文通过时间分段的方法将对称网络划分为由一组快照组成的时变对称网络,这些快照聚合后仍然是原始的对称网络.为防止芝诺现象^[16]的产生,每个快照持续有限的时间.本文的主要内容安排如下:第1节主要介绍系统的网络模型和预备知识;第2节讨论由多个无向仙人掌快照组成的时变对称网络的能控性和最优性,并研究时变对称网络中驱动节点数量与快照数量之间的关系;第3节提出对称网络按无向仙人掌结构进行时间分段的算法;第4节在实际网

络中进行仿真,对提出的结果进行验证;最后,总结全文,分析本文的不足之处,并对未来工作进行展望.

1 预备知识和问题描述

1.1 网络系统模型

将一个时变网络看作是由 M 个静态网络按固定的时间序列切换得到的,这样的时变网络称为时序网络^[16].从 t_0 时刻开始,每个 $t \in [t_{k-1}, t_{k-1} + \Delta t]$ 时间段作为一个静态子网络.其中, Δt 表示每一个静态子网络的持续时间段即时间窗口,将一个时间片段的静态网络称为动态网络的一个快照(snapshot).时序网络动态方程为

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + B_k u_k(t). \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 和 $u(t)$ (与静态网络相同)分别表示节点的状态向量和控制输入; $A_k \in R^{n \times n}$ 和 $B_k = (b_{ij})_{N \times R}$ 分别表示第 k 个静态子网络的邻接矩阵和输入矩阵.将与输入节点连接的状态节点称为受控节点,不具有共同输入节点的受控节点称为驱动节点.

假设时变网络的初始状态 $x(t_0) = 0$,考虑状态节点从初始时间 $t_0 = 0$ 到最终时间 $t_f = t_M$ 的所有可能轨迹,则时变网络的能控空间表示为

$$\Omega = \langle A_M | B \rangle + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{j=M}^{m+1} e^{A_j \Delta t_j} \langle A_m | B \rangle. \quad (2)$$

其中: $\langle A_m | B \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} A_m^i R(B)$ 表示快照 m 的能控空间, $R(B) = \{Bv | v \in R^p\}$ 表示 B 的列空间.时变网络的能控性矩阵 $C(t_0, t_f)$ 如下所示:

$$C(t_0, t_f) = [A(t_f - 1)A(t_f - 2) \dots A(t_0 + 1)B(t_0); \dots; A(t_f - 1)B(t_f - 2); B(t_f - 1)]. \quad (3)$$

若具有 N 个节点的时变网络的能控子空间 $\Omega = R^N$,则时变网络是能控的.这意味着在有限的时间 $[t_0, t_f]$ 内,系统可以到达状态空间 R^N 的任意状态.同样,当网络系统的能控性矩阵 $C(t_0, t_f)$ 满足 $\text{rank}(C(t_0, t_f)) = n$ 时,时变网络是能控的.

图1展示了4个节点的时变网络,按照不同时间间隔得到的快照(静态网络)情况.图1(a)展示了时变网络4个节点之间的连接随时间变化情况,每条直线对应一个节点,假设 t_i 与 t_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, 8$)的时间间隔均为 Δt ,如果两个节点在某个时刻存在连接关系,则将它们用线连接.分别以时间间隔 $2\Delta t$ 、 $4\Delta t$ 、 $8\Delta t$ 对时变网络进行划分,分别得到4、2、1个快照,连

接情况如图1(b)、1(c)、1(d)所示.

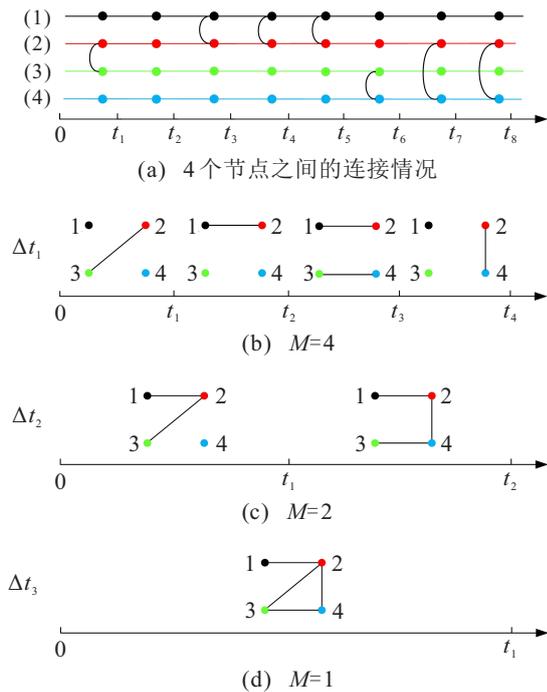


图1 时变网络快照划分示意图

1.2 问题描述

对于如图1所示的时变网络,假设节点1为固定的驱动节点,则 $B = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 当以时间间隔 $2\Delta t$ 对时变网络进行划分时(图1(b)),对应的4个快照 $G(A_i, B) (i = 1, 2, 3, 4)$, 能控子空间为 $\Omega = \langle A_4|B \rangle + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{j=4}^{m+1} e^{A_j \Delta t_j} \langle A_m|B \rangle$, 将邻接矩阵 A_k 和 B 代入, 计算得 $\dim(\Omega_1) = 2$, 因此时变网络是结构不能控的. 当以时间间隔 $4\Delta t$ 对时变网络进行划分时(图1(c)), 对应的2个快照 $G(A_i, B), i = 1, 2$, 它的能控子空间为 $\Omega = \langle A_2|B \rangle + e^{A_2 \Delta t_2} \langle A_1|B \rangle$, 同样代入计算得 $\dim(\Omega_1) = 4$, 因此时变网络是结构能控的. 而当时间间隔足够长时, 他们对应的静态网络是相同的.

从上面的例子可以看出, 对于一个时变网络, 以不同的时间间隔对网络进行划分快照对网络能控性是有影响的. 那么对于同一个时变网络, 如何划分快照才能使时变网络是能控的, 最少可分成几个快照呢? 因此, 本文研究在驱动节点固定不变的情况下, 对于时变对称网络给出快照划分的方法, 以及最优的快照数量.

1.3 预备知识

将对称网络系统表示为无向图 $G = (V, E)$. 其中: V 是网络的节点集, E 是网络的边集. $G = (V, E)$ 中有 m 个不同的状态节点 v_1, v_2, \dots, v_m , 这些节点通过连接构成一组边 $(v_1, v_2)(v_2, v_3) \dots (v_{m-1}, v_m)$, 将这组边称为状态路径, 其中节点 v_1 和 v_m 都是根

节点. 若将一个输入节点与状态路径的根节点相连, 形成新的路径称为输入路径. 将一条状态路径的两个根节点 v_1 和 v_m 相连, 形成的路径为 $(v_1, v_2) \dots (v_{m-1}, v_m)(v_m, v_1), m \geq 3$, 并将其称为环. 若环与环之间没有公共节点, 则将其称为不相交环. 当状态路径中仅包含一个节点时称为退化路径, 包含两个节点时可称为退化环. 基于路径和环的定义, 下面介绍状态仙人掌(又称为无向仙人掌)和输入仙人掌的定义.

定义1^[17] 状态仙人掌是指由一条状态路径和若干个新的不相交环(可能为退化环)组成的网络. 输入仙人掌是指单个输入节点连接到状态仙人掌的状态路径的端点(从而形成一个输入路径)后形成的网络.

输入仙人掌如图2所示, G_1 是一条状态路径, G_2, G_3, G_4 是3个不相交的环. 其中, G_2 由奇数个节点组成, 称为奇环.

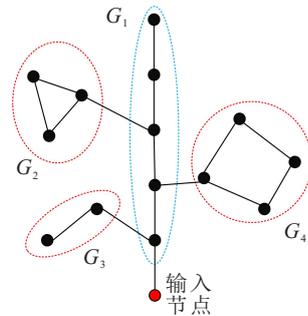


图2 输入仙人掌

下面介绍结构能控性定理及其图论解释. 首先介绍扩张的定义.

定义2^[18] 若有向图 $G = (V, E)$ 中存在一个节点子集 $S \subset V, V$ 中指向集合 S 中节点的数量小于 S 中节点的数量, 则 $G = (V, E)$ 中存在扩张, 记为 $T(S) < S$. 其中, $T(S)$ 表示 V 中指向集合 S 中节点的节点集合.

定义3^[18] 不可达节点是指无法从输入节点通过有向路径到达的节点.

引理1^[18] 考虑一个网络系统, 若它的结构矩阵 $(A, B) \in R^{n \times (n+1)}$ 可以表示为

$$(A, B) = [PAP^{-1} \ PB] = [P_1 \ P_2]^T, \quad (4)$$

则网络系统 (A, B) 中包含扩张. 其中: $P_1 \in R^{k \times (n+1)} (k \geq 1), P_2 \in R^{(n-k) \times (n+1)}, P_1$ 有不超过 $k-1$ 个非零列(即 P_1 的其余列均仅有固定的零项).

引理2^[18] 以下2个陈述是等价的:

- 1) 网络系统 $G(A, B)$ 是结构能控的;
- 2) $G(A, B)$ 不包含不可达节点也不包含扩张.

当网络中存在扩张或不可达节点时, 输入信号无

法通过某个路径影响这些节点,无法实现对这些节点的控制,故此网络是不完全能控的。

2 时变对称网络能控性

从图1的例子可以看出,对于一个时变网络采用不同的时间间隔进行分段,得到的快照数和网络能控性是不同的,而对应的静态网络是相同的.在保证网络能控性的前提下,采用哪种分段方式可以得到最少的快照数?针对这个问题,本节具体研究如何将对称网络划分成多个快照,并从理论上证明划分的最优方法.首先给出时变对称网络的能控性判据。

定理1 若时变对称网络系统 (A, B) 满足以下两个条件,则时变对称网络系统 (A, B) 结构能控:

- 1) 每个快照 $G_m(A_m, B)$ ($m = 1, \dots, M$) 中的可达节点形成的网络可以由一个无向仙人掌所张成;
- 2) 在时变网络系统 (A, B) 中,每个节点都是可达的。

证明 首先由条件2)可知,在时变对称网络系统 (A, B) 中每个节点都是可达的,即每一个节点至少能被一个无向仙人掌覆盖。

假设由快照组成的时变网络系统 (A, B) 中包含扩张,根据引理1有以下式子:

$$[A_1, A_2, \dots, A_n, B] = [P_1 \ P_2]^T, \quad (5)$$

其中 $P_1 \in R^{p \times k}$ 有不超过 $p - 1$ 个非零项.因此,存在第 m 个快照的矩阵对 $[A_m, B]$ 如下所示:

$$[A_m, B] = [P_{m1} \ P_{m2}]^T. \quad (6)$$

在快照 m 中,不可达节点对应的系统矩阵 A_m 中的行和列均为零,将这些为零的行和列去除之后, $[A_m, B]$ 的子矩阵 $[A_m^1, B^1]$ 如下所示:

$$[A_m^1, B^1] = [P_{m1}^1 \ P_{m2}^1]^T. \quad (7)$$

$[A_m^1, B^1]$ 表示在快照 m 中可达节点组成的网络.由条件1)可知,每个快照 $G_m(A_m, B)$ 中的可达节点形成的网络是由一个无向仙人掌所张成,因此 $G_m(A_m, B)$ 是结构能控的,即 $G_m(A_m, B)$ 中不包含扩张,这与之前的假设矛盾,即由快照组成的网络中不包含扩张. \square

注1 判断时变网络的能控性,可以通过计算能控子空间 $\Omega = \langle A_M | B \rangle + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{j=M}^{m+1} e^{A_j \Delta t_j} \langle A_m | B \rangle$ 的维数来判断其能控性,这种方法需要列出每个快照的系统矩阵和输入矩阵.假设节点数和快照数分别为 N 和 M , A, B 均为 $N \times N$ 阶矩阵.对于节点数量多、结构复杂的网络, N 和 M 的取值较大,导致计算比较

繁琐.因此本文从网络的拓扑结构出发,研究时变对称网络系统 (A, B) 结构能控时的条件,无需计算就可以判断网络的结构能控性。

注2 文献[14]针对有向网络给出了快照划分方案,实现由快照组成的时变网络是结构能控的,但这种方法并不适用于本文所研究的对称网络.文献[14]首先利用广度优先搜索算法^[19]进行黑白染色(染色规则:初始节点为白色,与其直接相连的节点染为黑色,再将黑色节点的相邻节点染为白色,以此类推直至所有节点都已染色),将网络转化为二分图,用 Kuhn-Munkres^[20] 算法求解加权最大匹配,从而实现有效划分.文献[14]中的方法不能将存在奇环的对称网络转换为二分图,例如图2是一个包含奇环 G_2 的对称网络,假设其中一个节点为黑色,则另外两个相邻节点都会染成白色,使染色出现矛盾,无法将所有的节点分为两类,进而无法将图2转化为二分图.因此这种方法无法用于对称网络的时间分段中,同样也无法改善对称网络的能控性.综上所述,本文提出了定理1,可将有向网络中的相关结论拓展到对称网络,能避免上述问题。

时间分段方法可以将一个时变网络通过不同的分段方式得到不同的快照数,快照数越少意味着控制网络需要的成本越低,划分的方法越优.基于此,本文提出如下定理。

定理2 对于一个对称网络 (A, B) , 存在某个时间分段方法将其拆分成一组快照 $G_{\bar{m}}(A_{\bar{m}}, B)$ ($\bar{m} = 1, 2, \dots, \bar{M}$), 且由这些快照组成的时变对称网络是结构能控的.若可以找到一组快照 $G_m(A_m, B)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) 均是由无向仙人掌构成,并且这组快照能覆盖对称网络 (A, B) 中的每个节点,则此时的快照数 M 最小(即 $M \leq \bar{M}$).

证明 给定一个对称网络 (A, B) , 按照某个时间分段方法拆分可以得到不同的快照组 $G_{\bar{m}}(A_{\bar{m}}, B)$ ($\bar{m} = 1, 2, \dots, \bar{M}$). 假设当拆分得到的快照 $G_m(A_m, B)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) 均是由无向仙人掌构成时,得到的快照数为 M . 当每个快照都是由无向仙人掌构成且这些无向仙人掌能覆盖网络中所有的节点时,由定理1可知,由这些快照组成的时变对称网络是结构能控的。

假设快照数 M 不是最小的,即 $M > \bar{M}$, 则此时至少需要 $\bar{M} + 1$ 个无向仙人掌才能覆盖网络中所有的节点.假设由前 \bar{M} 个无向仙人掌组成的节点集为 C , 则网络中至少存在一个节点 v 不在前 \bar{M} 个无向仙人掌中,即 $\exists v \notin C$, 否则网络中会存在扩张导致网络

结构不能控. 已知由快照组成的时变对称网络系统是结构能控的, 因此网络中不存在扩张, 节点 v 在前 \bar{M} 个无向仙人掌中, 即 $v \in C$. 这与假设矛盾, 因此快照数 M 是最小的. \square

注3 静态的不能控对称网络划分成多个快照, 并且每个快照都是一个无向仙人掌时, 并不要求对称网络的每条边仅在这些无向仙人掌中出现一次, 因此这种时间分段方法仅能保证分段后快照的数量是唯一确定的, 而这些快照的组合是不唯一的.

上述研究证明了在不同的时间分段方法中, 将对称网络按照无向仙人掌结构进行时间分段得到的快照数是最少的. 在此基础上, 下面的定理3进一步研究了按照无向仙人掌结构进行时间分段后, 时变对称网络中驱动节点数量和快照数量的关系.

定理3 考虑一个静态对称网络, 设实现该网络结构能控所需最少驱动节点的数量为 n , 将该静态对称网络按时间进行分段得到 n_2 个快照, 若每个快照具有无向仙人掌结构, 且实现每个快照结构能控的驱动节点数为 n_1 , 则 $n_1 = n/n_2$ (n, n_1, n_2 均为整数).

证明 假设在进行时间分段后, 每个快照都是由 n_1 个无向仙人掌所张成, 则根据对称网络的结构能控性可知, 每个快照中所需的驱动节点数为 n_1 . 此时, 经过时间分段后划分得到 n_2 个快照, 则整个网络需要 $n_1 \times n_2$ 个驱动节点和 n_2 个快照才能实现结构能控. 在时间分段过程中可以保证每个快照中都具有 n_1 个相同的驱动节点, 此时时变对称网络仅需 n_1 个驱动节点和 n_2 个快照来实现结构能控. 因此, 与原静态对称网络实现结构能控所需最少驱动节点的数量 n 相比, 驱动节点数量满足 $n_1 = n/n_2$. \square

注4 对于某些现实的网络系统, 按照定理3的结论可以根据具体情况选择驱动节点的个数后设计快照数, 实现网络结构能控.

3 时变对称网络快照划分方法

对称网络的时间分段是将一个对称网络划分成由多个快照组成的时变对称网络, 并通过每个快照的控制来实现整个网络的结构能控性. 在上一节中, 提出了当时变对称网络 (A, B) 的每个快照都是由无向仙人掌构成时, (A, B) 是结构能控的. 因此, 可以通过寻找能够覆盖对称网络中所有节点的无向仙人掌的集合来实现对时变对称网络的划分. 本节提出一种基于无向仙人掌结构的对称网络的时间分段算法, 具体步骤如下.

算法1 对称网络的时间分段算法.

step 1: 无向图分类. 给定一个对称网络 $G(A)$, 通过广度优先搜索算法 (BFS)^[19] 进行黑白染色来分类. 首先, 任意取出一个节点将其染成黑色, 并将它的所有邻居节点染成相反的颜色 (白色). 重复染色的步骤, 直至将所有的节点都进行染色 (此时所有的节点都为黑色或白色). 如果 $G(A)$ 中存在某个节点的邻居节点的颜色与它本身的颜色相同 (均为黑色或白色), 则说明 $G(A)$ 中存在奇环, 记为 G_1 , 反之记为 G_2 .

step 2: 寻找最大匹配.

1) G_1 中的最大匹配: 首先将网络的每个奇环分别当成一个节点, 形成新的网络 \bar{G}_1 , 再通过匈牙利算法^[21] 找出 \bar{G}_1 中的最大匹配. 然后分别将奇环展开, 找出奇环中的匹配, 则 \bar{G}_1 中的匹配和奇环中的匹配的并集为 G_1 的最大匹配.

2) G_2 中的最大匹配: 对网络直接利用匈牙利算法^[21] 寻找最大匹配, 确定匹配边和未匹配节点.

step 3: 构造无向仙人掌. 找出网络中的最大匹配后, 根据未匹配节点和匹配边构造无向仙人掌, 分为以下两种情况:

1) $G(A)$ 中存在未匹配节点, 个数记 n , 并标记未匹配节点为 u_1, u_2, \dots, u_n (需要 n 个不相交的无向仙人掌才能覆盖网络中的所有点). 具体操作过程是, 在未匹配节点集 u_1, u_2, \dots, u_n 中任意选择一个节点 u_m 作为 n 个无向仙人掌的状态路径的根节点, 并令剩余的未匹配节点 $u_1, \dots, u_{m-1}, u_{m+1}, \dots, u_n$ 分别作为 $n-1$ 个无向仙人掌的状态路径上的节点, 其余的匹配边作为环, 以此构造 n 个不相交的无向仙人掌.

2) $G(A)$ 中没有未匹配节点, 则仅需一个无向仙人掌即可覆盖网络中的所有节点. 可以通过选择任意匹配边作为状态路径, 其他匹配边作为环来构造一个无向仙人掌.

step 4: 构造快照. 由每一个无向仙人掌构成的网络图构造一个快照, 快照数与无向仙人掌个数相同.

上述算法将对称网络划分成由多个快照组成的时变对称网络. 如果一个对称网络 $G(A)$ 中包含 n 个未匹配节点, 当对称网络按时间分段算法划分得到 n_2 个快照时, 则每个快照中包含 $n_1 = n/n_2$ 个无向仙人掌, 也可以通过对称网络的时间分段算法实现.

对称网络按无向仙人掌进行时间分段算法的整个过程可以分成 n 个阶段, 每个阶段从未匹配节点开始寻找增广路径, 最多把整个图遍历一次, 并且每个节点最多被包含于 n 个奇环中. 综上所述, 算法的总复杂度为 $O(n^3)$, 其中 n 为对称网络中的节点总数.

4 仿真

4.1 具有一个驱动节点的网络

考虑一个对称网络 $G(A)$ 如图3(a)所示,该网络包含27个节点,65条边,对该网络应用上述时间分段算法进行快照划分.首先,根据step 1通过节点染色的方法(选择节点1作为初始染色节点,为黑色)确定网络的奇环如图3(b)所示,共有4个奇环,图中分别用不同的颜色表示,记为 G_{11} 、 G_{12} 、 G_{13} 、 G_{14} .根据step 2,对 G_1 中的奇环进行处理,将 G_{11} 、 G_{12} 视为一个点 (G_{12} 经处理后得到的点包含于 G_{11} 中), G_{13} 、 G_{14} 分别视为一个点,形成新的网络 \bar{G}_1 ,如图3(c)所示,并发现 \bar{G}_1 中的最大匹配为 $(17, 19)(11, 27)(12, 13)(23, 25)$.下一步将 G_{11} 、 G_{12} 、 G_{13} 、 G_{14} 分别展开,并寻找每个奇环中的匹配.其中: G_{11} 的匹配边为 $(2, 9)(5, 6)$, G_{12}

的匹配边为 $(3, 7)(8, 18)$, G_{13} 的匹配边为 $(16, 22)$, G_{14} 的匹配边为 $(20, 21)(4, 15)(10, 14)$.因此, $G(A)$ 中的未匹配节点为节点1、24和26.按照step 3,根据 $G(A)$ 存在的未匹配节点数量,确定需要3个不相交的无向仙人掌才能覆盖网络中的所有节点.选择未匹配节点集 $\{1, 24, 26\}$ 中的节点1作为3个无向仙人掌的状态路径的根节点,并令剩余的未匹配节点24和节点26分别作为两个无向仙人掌的状态路径上的节点,其余的匹配边作为环,以此构造3个不相交的无向仙人掌.根据step 4构造快照,将 $G(A)$ 划分成3个快照,每个快照都由一个无向仙人掌构成,如图4所示.在每个快照中,红色的节点表示可达节点,红色的空心节点表示在该快照之前的其他快照中的可达节点,红色的边表示该快照中的边.

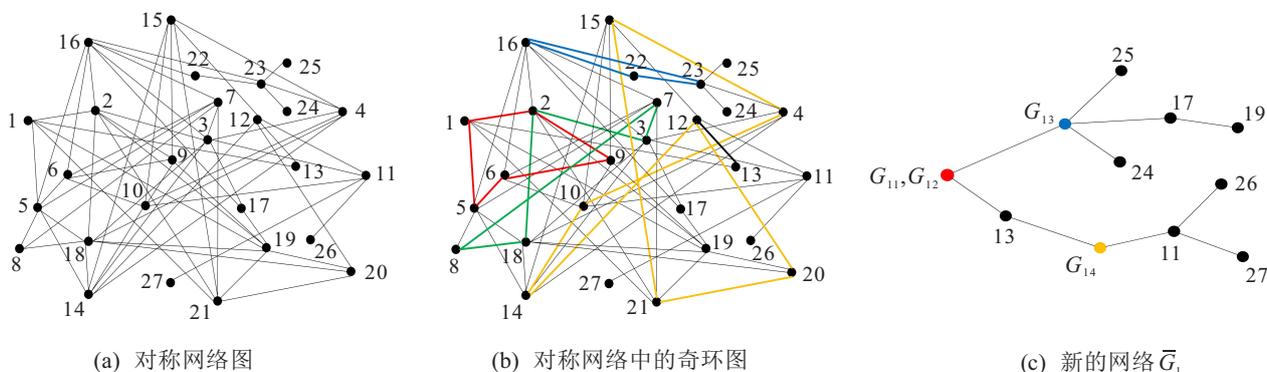


图3 算法分析过程

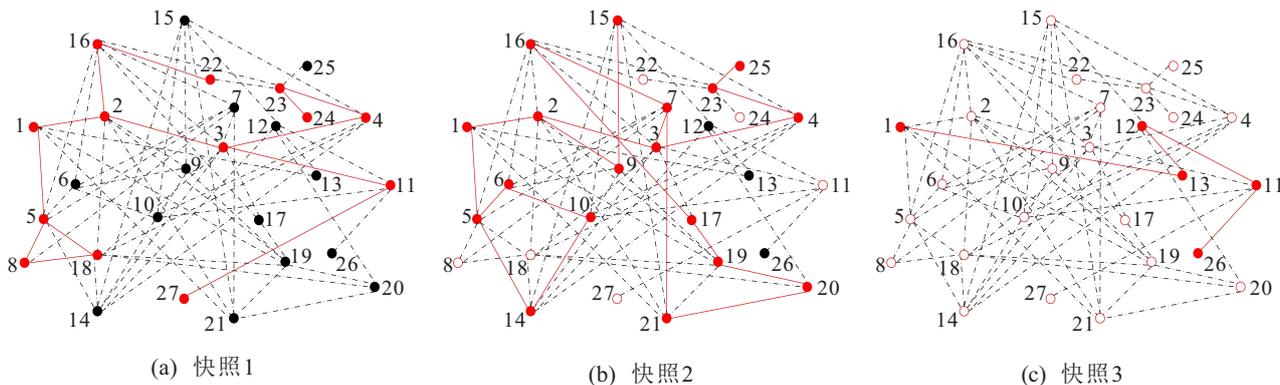


图4 实例分析1

根据对称网络的结构能控性^[15]可知,当仅有节点1作为驱动节点时,上述对称网络是结构不能控的,需要3个驱动节点才能实现结构能控.通过时间分段的方法,该网络仅需要一个驱动节点(选择节点1作为驱动节点)和3个快照就能使原网络实现结构能控,减少了驱动节点的数量.

4.2 具有多个驱动节点的网络

上述实例介绍了具有一个驱动节点的对称网络

进行时间分段的详细步骤.下面实例2介绍具有多个驱动节点的对称网络的时间分段,如图5(a)所示.通过算法可以将其分为4个快照,其中在每个快照中选取一个固定节点作为驱动节点.同样根据定理3可以得到如图5(b)和(c)所示的两个快照,其中在每个快照中选取节点1和节点26作为驱动节点.

根据对称网络的结构能控性^[15]可知,该网络需要4个驱动节点才能实现结构能控(可以选择节点1、

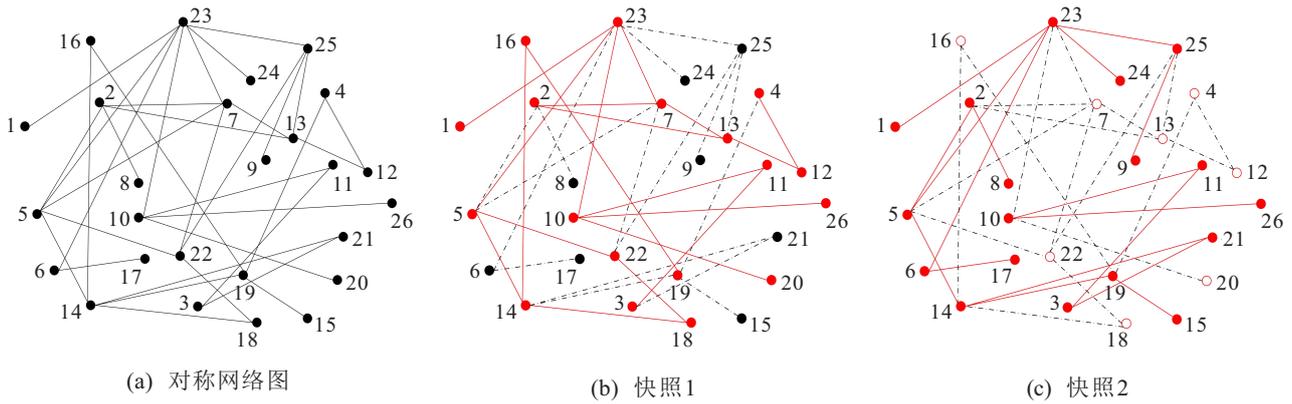


图5 实例分析2

节点16、节点21和节点26作为驱动节点). 仅有节点1作为驱动节点或节点1和节点26同时作为驱动节点时,上述对称网络是结构不能控的. 通过时间分段的方法,该网络仅需要一个驱动节点(选择节点1作为驱动节点)和4个时间快照,或两个驱动节点(选择节点1和节点26作为驱动节点)和两个快照就能使原网络实现结构能控. 因此,时间分段的方法可以减少网络系统驱动节点的数量,降低控制成本,同时提高网络的能控性.

4.3 模型网络和真实网络分析

本节将时间分段方法应用于模型网络和真实网络中进行分析. 首先,生成两种典型的网络模型,即ER随机网络^[22]和BA无标度网络^[23]. 生成ER网络节点个数分别为 $N_1 = 15$ 和 $N_2 = 100$,节点间连接概率为 $P_1 = 0.2$ 和 $P_1 = 0.02$ (节点数100的ER网络在生成过程中有12个孤立节点,本文考虑连通网络88个节点). BA网络的初始点数是10,每次引入1个新节点和2条边,按照度大的节点优先连接的原则,生成节点数分别为50和100的无标度网络. 选择4种真实网络(<http://networkrepository.com/index.php>),包括twitter转推网络、动物社交网络、蛋白质网络和城市局部交通网络,这些网络的规模从几十个到几百个节点不等.

根据每个网络的数据,采用本文提出的时间分段算法,得出每个网络按时间分段后的驱动节点数和快照数如表1所示. 对比表1发现,这些网络的每个快照的驱动节点数和快照数的乘积与原对称网络所需的最少驱动节点数量(用文献[15]的方法求出)相等,验证了本文的定理3. 另外可以看出,划分快照后,需要驱动节点的数量有所减少. 因此,在真实网络中,应用快照划分算法可以根据实际情况选择合适的驱动节点数量.

表1 模型网络和真实网络经时间分段后的快照数和驱动节点数

网络	节点	边	快照数量	驱动节点数量
ER随机网络1	15	18	1	2
			2	1
ER随机网络2	88	98	1	6
			2	3
			3	2
			6	1
BA无标度网络1	100	201	1	12
			2	6
			3	4
			4	3
BA无标度网络2	50	106	6	2
			1	4
			2	2
			4	1
twitter转推网络	96	117	1	32
			2	16
			4	8
			8	4
动物社交网络	18	28	16	2
			32	1
			1	2
			2	1
蛋白质网络	23	54	1	3
			3	1
城市局部交通网络	78	143	1	9
			3	3
			9	1

5 结论

本文研究了时变对称网络能控性问题. 首先,给出了判断时变对称网络能控性的判据,快照的最优划分,驱动节点数量与快照数量的关系等结论;其次,

提出一种时间分段方法,提高了对称网络的结构能控性;最后,通过模型网络和真实网络进行分析,发现时间分段的方法能有效减少驱动节点数量,提高网络的结构能控性.另外,由于网络最大匹配一般不唯一,本文给出的快照划分也是不唯一的,如何根据网络其他指标(如鲁棒性、控制能量等)选择最优的快照值得进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Chen D X, Shao Q, Liu Z Y, et al. Ridesourcing behavior analysis and prediction: A network perspective[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2022, 23(2): 1274-1283.
- [2] 王立夫, 朱枫, 郭戈, 等. 基于负载系数的轨道交通网络控制站点辨识[J]. *控制与决策*, 2020, 35(10): 2319-2328.
(Wang L F, Zhu F, Guo G, et al. Control Station identification of rail transport network based on loading coefficient[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(10): 2319-2328.)
- [3] 王立夫, 钟昊男, 郭戈. 基于拥堵系数的道路交通网络关键路段辨识[J]. *控制与决策*, 2023, 38(3): 843-849.
(Wang L F, Zhong H N, Guo G. Identification of key road sections of road traffic network based on congestion coefficient[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(3): 843-849.)
- [4] Chen G R, Lou Y. Naming game: Models, simulations and analysis[M]. Berlin: Springer International Publishing, 2019.
- [5] Firth J A, Hellewell J, Klepac P, et al. Using a real-world network to model localized COVID-19 control strategies[J]. *Nature Medicine*, 2020, 26(10): 1616-1622.
- [6] Zhang Z K, Liu C, Zhan X X, et al. Dynamics of information diffusion and its applications on complex networks[J]. *Physics Reports*, 2016, 651: 1-34.
- [7] Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L. Controllability of complex networks[J]. *Nature*, 2011, 473(7346): 167-173.
- [8] Yuan Z Z, Zhao C, Di Z R, et al. Exact controllability of complex networks[J]. *Nature Communications*, 2013, 4(1): 2447-2455.
- [9] Nepusz T, Vicsek T. Controlling edge dynamics in complex networks[J]. *Nature Physics*, 2012, 8(7): 568-573.
- [10] Wang W X, Ni X, Lai Y C, et al. Optimizing controllability of complex networks by minimum structural perturbations[J]. *Physical Review E: Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2012, 85(2): 026115.
- [11] Zhang Y, Zhou T. Minimal structural perturbations for controllability of a networked system: Complexities and approximations[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(12): 4191-4208.
- [12] Chanekar P V, Nozari E, Cortés J. Energy-transfer edge centrality and its role in enhancing network controllability[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2021, 8(1): 331-346.
- [13] Pósfai M, Liu Y Y, Slotine J J, et al. Effect of correlations on network controllability[J]. *Scientific Reports*, 2013, 3(1): 1067-1074.
- [14] Cui Y L, He S B, Wu M C, et al. Improving the controllability of complex networks by temporal segmentation[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2020, 7(4): 2765-2774.
- [15] Menara T, Bassett D S, Pasqualetti F. Structural controllability of symmetric networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(9): 3740-3747.
- [16] Li A, Cornelius S P, Liu Y Y, et al. The fundamental advantages of temporal networks[J]. *Science*, 2017, 358(6366): 1042-1046.
- [17] Romero O, Pequeto S. Actuator placement for symmetric structural controllability with heterogeneous costs[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2018, 2(4): 821-826.
- [18] Lin C T. Structural controllability[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, 19(3): 201-208.
- [19] Scarpazza D P, Villa O, Petrini F. Efficient breadth-first search on the cell/BE processor[J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2008, 19(10): 1381-1395.
- [20] Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems[J]. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1957, 5(1): 32-38.
- [21] Wolff C J M, de Wardt J P. Borehole position uncertainty analysis of measuring methods and derivation of systematic error model[J]. *Journal of Petroleum Technology*, 2019, 33(12): 339-350.
- [22] Erdős P, Rényi A. On random graphs.I[J]. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 2022, 6(3/4): 290-297.
- [23] Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.

作者简介

王立夫(1980—),男,副教授,博士,从事复杂网络、同步控制、交通网络等研究, E-mail: wlfkz@qq.com;

寇晓宇(1998—),女,硕士生,从事复杂网络能控性的研究, E-mail: 1269619547@qq.com;

孔芝(1979—),女,副教授,博士,从事知识发现、决策分析、智能优化算法等研究, E-mail: kongz@neuq.edu.cn;

郭戈(1972—),男,教授,博士生导师,从事网联车辆协同控制、智能交通系统、共享出行系统优化与控制等研究, E-mail: geguo@yeah.net.