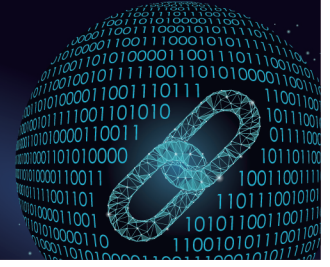




中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



非高斯环境下基于信息熵准则的定点平滑估计算法

马海平, 刘婷, 张雅静, 费敏锐

引用本文:

马海平, 刘婷, 张雅静, 费敏锐. 非高斯环境下基于信息熵准则的定点平滑估计算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(8): 2711–2718.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0185>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering

控制与决策. 2021, 36(12): 2946–2954 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计

Design of Kalman filter for fractional-order systems with correlated fractional-order colored noises

控制与决策. 2021, 36(7): 1672–1678 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1418>

基于核典型相关性-熵成分分析的工业过程质量监测方法

A quality monitoring method for industrial process based on kernel canonical correlation-entropy component analysis

控制与决策. 2021, 36(12): 2999–3006 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0548>

高超声速飞行器间歇故障改进自适应容错控制

Improved adaptive fault-tolerant control of intermittent faults in hypersonic flight vehicle

控制与决策. 2021, 36(11): 2627–2636 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0483>

基于稀疏度阶数优化的杂波密度估计算法

A clutter density estimation algorithm by optimized sparsity order

控制与决策. 2020, 35(12): 2923–2930 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0429>

非高斯环境下基于信息熵准则的定点平滑估计算法

马海平^{1†}, 刘婷¹, 张雅静¹, 费敏锐²

(1. 绍兴文理学院 电子工程系, 浙江 绍兴 312000; 2. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 210053)

摘要: 针对一类非高斯噪声环境下固定点平滑估计问题, 设计一种使用最大相关熵准则作为最优估计标准的平滑估计算法, 称之为固定点最大相关熵平滑估计 (fixed-point maximum correntropy smoother, FP-MCS). 首先基于矩阵变换给出最大相关熵 Kalman 滤波的新表达形式; 然后以此为基础, 引入新的状态来扩展系统, 并推导出固定点最大相关熵平滑估计的在线迭代方程; 进一步比较平滑前后状态估计误差协方差, 从理论上分析算法的性能改进, 同时比较其计算复杂度; 最后通过算例验证所设计的算法在非高斯混合噪声干扰下的有效性和优越性.

关键词: 状态估计; 固定点平滑; Kalman 滤波; 最大相关熵准则; 非高斯噪声

中图分类号: TP301.6

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0185

引用格式: 马海平, 刘婷, 张雅静, 等. 非高斯环境下基于信息熵准则的定点平滑估计算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(8): 2711-2718.

Fixed-point smoothing estimation algorithm based on information entropy criterion in non-Gaussian environment

MA Hai-ping^{1†}, LIU Ting¹, ZHANG Ya-jing¹, FEI Min-rui²

(1. Department of Electrical Engineering, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China; 2. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 210053, China)

Abstract: For fixed-point smoothing estimation problems in the non-Gaussian environment, this paper proposes a smoothing estimation algorithm based on maximum correntropy as the optimal criterion, which is called fixed-point maximum correntropy smoother (FP-MCS). First, an alternate form of maximum correntropy Kalman filter (MCKF) is given based on matrix transformation. Then, new states are introduced to augment the system, and online iterative equations of the proposed FP-MCS are derived through the new MCKF form. Furthermore, state estimation error covariances are compared before and after smoothing, and performance improvement of the proposed FP-MCS is analyzed theoretically. Meanwhile, its computational complexity is also compared with other algorithms. Finally, an illustrative example is presented to verify the effectiveness and superiority of the proposed FP-MCS in the non-Gaussian mixture noise environment.

Keywords: state estimation; fixed-point smoothing; Kalman filter; maximum correntropy criterion; non-Gaussian noise

0 引言

系统状态估计一直以来都是控制和信号处理领域研究的热门话题^[1-4], 状态估计的目的是从量测数据中提取有用的信息. 随着科技的进步, 系统运行环境越来越复杂, 噪声不可测性大大增加, 因此必须减少噪声对状态估计的影响. 根据对量测数据利用的用途不同, 状态估计方法可分为滤波、预测和平滑 3 大类^[5]. 其中滤波算法最受关注, 包括卡尔曼滤波 (Kalman filter, KF)^[6]、无迹卡尔曼滤波 (unscented

Kalman filter, UKF)^[7]等, 这些滤波算法总是将量测噪声理想化为模型准确已知的高斯白噪声. 然而在许多实际应用中, 由于脉冲噪声或其他混合噪声的存在, 这些经典滤波算法的性能会严重恶化. 为此很多其他滤波算法被提出, 包括粒子滤波 (particle filter, PF)^[8]、 H_∞ 滤波^[9]等来处理非高斯噪声, 取得了较好的效果. 近年来, 有关学者提出一种最大相关熵卡尔曼滤波 (maximum correntropy Kalman filter, MCKF) 算法^[10], 其核心思想是充分利用量测值的高阶信

收稿日期: 2023-02-20; 录用日期: 2023-06-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61640316); 浙江省自然科学基金项目 (LY19F030011).

责任编辑: 柴利.

[†]通讯作者. E-mail: mahp@usx.edu.cn.

息,对脉冲和异常值有较好抑制作用,在KF迭代过程中构造核函数,作为最优估计的目标函数,通过重新求解其增益矩阵来获取最优性能.与传统的KF相比,MCKF基于最大相关熵准则(maximum correntropy criterion, MCC)^[11-13],能在脉冲或混合噪声等非高斯环境下得到更好的收敛性和更高的精度.

虽然状态估计方法的研究成果颇丰,如上所述,主要集中在滤波算法的设计和应用,但在平滑估计方面则相对较少.平滑估计作为估计理论中的一类问题,包括固定区间、固定点和固定滞后平滑估计,均比滤波用到更多的量测信息,因而估计值会更精确.事实上其在航空航天、自动驾驶等领域也有着重要的地位,同样是一个值得深入研究的课题.文献[14]提出了一种集成卡尔曼的平滑多分布估计算法,其使用多个卡尔曼平滑器来计算各种状态的概率密度函数,然后通过条件概率准则来估计平滑后的状态.文献[15]提出了一种用于多源信息融合的时间固定滞后平滑估计算法,其在图优化框架内利用关键帧滑动窗口来平滑连续时间下的状态轨迹.与大多数滤波算法一样,为简化模型参数的估计,上述平滑估计算法设计主要以高斯噪声为背景,对于脉冲噪声等非高斯噪声情况很少涉及.对于存在测量异常值,文献[16]提出了一种自适应鲁棒最小二乘平滑估计算法,通过构造正交空间变换矩阵来实现最小二乘平滑噪声协方差矩阵的行和列变换,并将其转化为求解特定矩阵结构下的方差协方差分量问题,然后选择标准化残差最大的观测值来避免算法出现误判,从而提高平滑精度.文献[17]提出了一种鲁棒递归固定区间平滑估计算法,以最大相关熵准则为目标函数,通过前向和后向两端来推导具有权重平衡估计增益的鲁棒平滑递归方程,仿真结果证实了其在平滑非高斯过程和测量噪声的有效性,缺点在于只适合固定区间的平滑问题.

上述部分文献提供了针对非高斯平滑估计的不同方法和类型,但均未涉及非高斯下固定点平滑估计问题.同时,随着MCKF在非高斯噪声环境中的广泛应用,包括扩展MCKF^[18]、分布式MCKF^[19]、序贯MCKF^[20]、约束MCKF^[21]等,对平滑估计算法在更现实场景的应用提供了参考^[22-23].本文以MCKF为基础,针对固定点平滑估计问题,提出一种适应于脉冲混合高斯噪声的固定点最大相关熵平滑估计(fixed-point maximum correntropy smoother, FP-MCS)算法,并从理论上分析其性能改进效果和计算复杂度,最后通过算例验证所提出FP-MCS的有效性和优越性.该

算法的优点在于计算简单,易于理解和实现,并容易扩展到其他平滑估计场景.

1 问题描述

1.1 固定点平滑估计

本文所研究的固定点平滑估计是指状态估计时刻 j 是固定的,提高状态估计精度的量测值数量是不断变化的,其目的是在时刻 $k \in [j+1, N]$ 下获得状态 x_j 的估计 $\hat{x}_{j,k}$.特别地,如果 x_j 的估计是利用时刻 j 之前的所有量测值,则称之为先验状态估计;如果还包括时刻 j 的量测值,则称之为后验状态估计.图1为固定点平滑估计示意图,图中当 $k=j$ 时, x_j 的估计 $\hat{x}_{j,j}$ 是基于该时刻及之前的所有量测值;当 $k=N$ 时,其估计 $\hat{x}_{j,N}$ 是基于时刻 N 及之前所有量测值,此时比时刻 j 多了 $N-j$ 个量测值用于平滑估计.

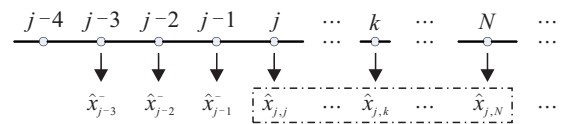


图1 固定点平滑估计示意图

1.2 最大相关熵准则

在设计FP-MCS算法之前,有必要先了解MCC^[11-12].考虑随机变量 X 和 Y ,联合分布函数为 $F_{XY}(x, y)$,其相关熵定义为

$$V(X, Y) = E[\kappa(x, y)] = \int \kappa(x, y) dF_{XY}(x, y). \quad (1)$$

其中: $E[\cdot]$ 表示数学期望运算; $\kappa(\cdot, \cdot)$ 表示核函数,此处选择高斯核函数,即

$$\kappa(x, y) = G_{\sigma}(e) = \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

$e = x - y$,且 $\sigma > 0$ 为核函数带宽.

对式(2)的高斯核函数Taylor展开,并代入式(1)得到

$$V(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} n!} E[(X - Y)^{2n}]. \quad (3)$$

由式(3)可知,相关熵 V 是 $X - Y$ 的所有偶阶矩的加权和,其包含高阶矩信息.因此,在非高斯噪声环境下,与仅统计二阶特性的最小均方误差准则相比,最大相关熵准则可以有效地改善系统性能.

1.3 标准MCKF

考虑如下线性离散时间系统:

$$\begin{aligned} x_k &= F_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1}, \\ y_k &= H_k x_k + v_k. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $x_k \in R^n$ 和 $y_k \in R^m$ 分别为系统在时刻 k 的 n 维状态向量和 m 维量测向量, F_{k-1} 和 H_k 分别为已知的系统状态转移矩阵和量测矩阵, w_{k-1} 和 v_k 分别

为相互独立且均值为零的过程噪声和量测噪声,其协方差矩阵分别为 $Q_{k-1} = E[w_{k-1}w_{k-1}^T]$ 和 $R_k = E[v_kv_k^T]$. 由文献 [10, 20] 可知, 标准 MCKF 的递推表达式如下:

先验估计

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+, \\ P_k^- &= F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^T + Q_{k-1}.\end{aligned}\quad (5)$$

后验估计

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-), \\ K_k &= ((P_k^-)^{-1} + H_k^T C_k R_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T C_k R_k^{-1}, \\ C_k &= \text{diag}[G_\sigma(\|y_{k1} - H_{k1}\hat{x}_k^-\|_{R_{k11}^{-1}}), \dots, \\ &G_\sigma(\|y_{km} - H_{km}\hat{x}_k^-\|_{R_{kmm}^{-1}})], \\ P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k (K_k)^T.\end{aligned}\quad (6)$$

其中: $\hat{x}_k^- \in R^n$ 和 $\hat{x}_k^+ \in R^n$ 分别为状态向量在时刻 k 的先验和后验估计, P_k^- 和 P_k^+ 分别为对应的先验和后验估计误差协方差矩阵, $K_k \in R^{n \times m}$ 为 MCKF 增益矩阵, $C_k \in R^{m \times m}$ 为相关熵增益矩阵. 矩阵中的每个元素可以通过式 (2) 计算得到, 即令 $e = \|\cdot\|_A$ 表示 A 加权二范数, σ 为用户定义的核函数带宽, H_{kj} 为矩阵 H_k 的第 j 行, R_{kjj} 为对角矩阵 R_k 的第 j 个元素. MCKF 的优点在于当量测值被脉冲噪声或较大异常值干扰时, 并不影响其估计和收敛性能.

2 固定点最大熵平滑估计

本节首先推导另一种 MCKF 表达式, 然后以此为基础推导本文所研究的 FP-MCS 平滑估计算法.

2.1 MCKF 的另一种形式

在 1.3 节基础上, 重新定义 MCKF 增益矩阵 L_k 为

$$\begin{aligned}L_k &= F_k K_k = \\ &F_k ((P_k^-)^{-1} + H_k^T C_k R_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T C_k R_k^{-1}.\end{aligned}\quad (7)$$

使用矩阵逆定理

$$\begin{aligned}(A + BCD)^{-1} &= \\ A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1},\end{aligned}\quad (8)$$

并设置

$$(P_k^-)^{-1} \rightarrow A, \quad H_k^T C_k \rightarrow B, \quad R_k^{-1} \rightarrow C, \quad H_k \rightarrow D,\quad (9)$$

则式 (7) 能够重新写为

$$\begin{aligned}L_k &= F_k (P_k^- - P_k^- H_k^T C_k (R_k + \\ &H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} H_k P_k^-) H_k^T C_k R_k^{-1}.\end{aligned}\quad (10)$$

使用矩阵逆定理的反操作, 并设置

$$R_k \rightarrow A, \quad R_k \rightarrow B, \quad R_k^{-1} \rightarrow C, \quad H_k P_k^- H_k^T C_k \rightarrow D,\quad (11)$$

式 (10) 能够进一步简化为

$$L_k = F_k P_k^- H_k^T C_k (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1}.\quad (12)$$

将式 (6) 中的第 1 项 \hat{x}_k^+ 代入式 (5) 中的第 1 项 \hat{x}_{k+1}^- , 得到

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1}^- &= F_k \hat{x}_k^- + F_k K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) = \\ &F_k \hat{x}_k^- + L_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-).\end{aligned}\quad (13)$$

进一步将式 (6) 中的第 2 项 K_k 代入第 4 项 P_k^+ , 使用矩阵逆定理并合并同类项, 得到

$$P_k^+ = P_k^- - P_k^- H_k^T (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} C_k H_k P_k^-.\quad (14)$$

将上式中的 P_k^+ 代入到式 (5) 中的第 2 项 P_{k+1}^- , 可以得到

$$P_{k+1}^- = F_k P_k^- (F_k - L_k H_k)^T + Q_k.\quad (15)$$

结合式 (10)、(12)、(13) 和 (15), 得到 MCKF 的另一种表达式, 概括为

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1}^- &= F_k \hat{x}_k^- + L_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-), \\ L_k &= F_k (P_k^- - P_k^- H_k^T C_k (R_k + \\ &H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} H_k P_k^-) H_k^T C_k R_k^{-1} = \\ &F_k P_k^- H_k^T C_k (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1}, \\ C_k &= \text{diag}[G_\sigma(\|y_{k1} - H_{k1}\hat{x}_k^-\|_{R_{k11}^{-1}}), \dots, \\ &G_\sigma(\|y_{km} - H_{km}\hat{x}_k^-\|_{R_{kmm}^{-1}})], \\ P_{k+1}^- &= F_k P_k^- (F_k - L_k H_k)^T + Q_k.\end{aligned}\quad (16)$$

注 1 对于上面推导得到的另一种 MCKF 表达式, 虽然只给出了先验状态估计和先验估计误差协方差, 但本质上与标准 MCKF 一样, 能够通过变换获得所有状态估计和误差协方差.

2.2 FP-MCS 的推导

为了推导 FP-MCS 平滑估计算法, 首先定义新的状态变量 x' , 在时刻 j 初始化为 $x'_j = x_j$, 其动态方程满足 $x'_{k+1} = x'_k$ ($k \in [j+1, N]$). 基于以上定义, 对于所有的 $k \geq j$, 存在 $x'_k = x_j$.

将新状态 x'_k 增加到式 (4) 所描述的方程中, 得到增广系统为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_k \\ x'_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{k-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x'_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} w_{k-1}, \\ y_k &= [H_k \quad 0] \begin{bmatrix} x_k \\ x'_k \end{bmatrix} + v_k.\end{aligned}\quad (17)$$

其对应的估计误差协方差可以表示为

$$E \left[\begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_k^- \\ x_j - \hat{x}_{j,k}^- \end{bmatrix} ((x_k - \hat{x}_k^-)^T (x_j - \hat{x}_{j,k}^-)^T) \right] = \begin{bmatrix} P_k & (\Sigma_k)^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix}. \quad (18)$$

其中: $\hat{x}_{j,k}$ 为状态 x_j 在时刻 k 下的 FP-MCS 平滑估计, Π_k 为对应的平滑估计误差协方差, P_k 为原先 MCKF 的估计误差协方差, Σ_k 为两者之间的交互协方差. 特别地, 当 $k = j$ 时, 存在 $\Pi_j = P_j$ 和 $\Sigma_j = P_j$. 注意, 为方便表达, 已将式中误差协方差的上标 “-” 省去, 均表示先验估计值.

接着根据式(16)中的第1项, 增广系统的状态估计迭代方程为

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1}^- \\ \hat{x}_{j,k+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \\ \hat{x}_{j,k}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} \left(y_k - [H_k \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \\ \hat{x}_{j,k}^- \end{bmatrix} \right). \quad (19)$$

其中: L_k 为式(16)中的 MCKF 增益矩阵, λ_k 定义为 FP-MCS 增益矩阵. 上式用分立方程表示为

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^- + L_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-), \\ \hat{x}_{j,k+1}^- = \hat{x}_{j,k}^- + \lambda_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-). \end{cases} \quad (20)$$

根据式(16)中的第2项, 增广系统的增益可以重新表示为

$$\begin{aligned} [L_k \ \lambda_k]^T &= \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_k & (\Sigma_k)^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_k & (\Sigma_k)^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} C_k \right) \times \\ &\left(R_k + [H_k \ 0] \begin{bmatrix} P_k & (\Sigma_k)^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} C_k \right)^{-1} \times \\ &[H_k \ 0] \begin{bmatrix} P_k & (\Sigma_k)^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} C_k R_k^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

对上式展开, 得到两个分立方程如下:

$$\begin{aligned} L_k &= F_k (P_k - P_k H_k^T C_k (R_k + H_k P_k H_k^T C_k)^{-1} H_k P_k) H_k^T C_k R_k^{-1} = \\ &F_k P_k H_k^T C_k (R_k + H_k P_k H_k^T C_k)^{-1}, \\ \lambda_k &= (\Sigma_k - \Sigma_k H_k^T C_k (R_k + H_k P_k H_k^T C_k)^{-1} H_k P_k) H_k^T C_k R_k^{-1} = \\ &\Sigma_k H_k^T C_k (R_k + H_k P_k H_k^T C_k)^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

进一步, 根据式(16)中的第4项, 得到增广系统估计误差协方差的迭代方程为

$$\begin{bmatrix} P_{k+1} & (\Sigma_{k+1})^T \\ \Sigma_{k+1} & \Pi_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k & (\Sigma_k)^T \\ \Sigma_k & \Pi_k \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} F_k^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \end{bmatrix} [(L_k)^T \ (\lambda_k)^T] \right) + \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

将上式展开, 可以用4个分立方程表示为

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= F_k P_k (F_k - L_k H_k)^T + Q_k, \\ \Sigma_{k+1} &= \Sigma_k (F_k - L_k H_k)^T, \\ (\Sigma_{k+1})^T &= F_k ((\Sigma_k)^T - P_k H_k^T (\lambda_k)^T), \\ \Pi_{k+1} &= \Pi_k - \Sigma_k H_k^T (\lambda_k)^T. \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $(\Sigma_{k+1})^T$ 为 Σ_{k+1} 的转置矩阵, 尽管形式有所不同, 但是结合 P_k 和 L_k , 两者之间可以实现相互转换.

综上, 式(19)~(24)给出了平滑估计算法 FP-MCS 的推导过程, 其整体平滑过程如算法1所示.

算法1 固定点最大相关熵平滑估计算法.

-
- step 1: 运行式(16)所描述的 MCKF 算法, 得到时刻 j 的 \hat{x}_j^- 和 P_j .
 step 2: 初始化参数, 令 $\Sigma_j = P_j$, $\Pi_j = P_j$, $\hat{x}_{j,j} = \hat{x}_j^-$.
 step 3: 对于 $k = j + 1, \dots, N$, 执行如下操作:
 1) 根据式(16)第3项, 计算相关熵增益 C_k ;
 2) 根据式(20), 计算 FP-MCS 的状态估计 \hat{x}_{k+1}^- 和 $\hat{x}_{j,k+1}^-$;
 3) 根据式(22), 计算 FP-MCS 的增益矩阵 L_k 和 λ_k ;
 4) 根据式(24), 计算 FP-MCS 的估计误差协方差 P_{k+1} 、 Σ_{k+1} 和 Π_{k+1} .
-

2.3 FP-MCS 的性能分析

对于本文提出的 FP-MCS 算法, 由相关熵增益矩阵 C 的表达式(16)第3项可知, 核函数带宽 σ 是影响平滑估计算法性能的关键参数. 这是因为 $G_\sigma(\|y_{kj} - H_{kj} \hat{x}_k^-\|_{R_{kjj}^{-1}}) = \exp(-\|y_{kj} - H_{kj} \hat{x}_k^-\|_{R_{kjj}^{-1}}/2\sigma^2)$ 中, 当量测值 y_{kj} 被脉冲噪声或者较大异常值干扰时, 其信息 $r_{kj} = y_{kj} - H_{kj} \hat{x}_k^-$ 增大, 如果此时 σ 值变小, 将加速 $G_\sigma(\|r_{kj}\|_{R_{kjj}^{-1}})$ 快速趋向于 0, 表示 C 的第 j 个元素趋向于 0, 从而避免该脉冲噪声或较大异常值对 FP-MCS 算法性能的影响. 因此, 相对来讲, σ 值较小时, FP-MCS 算法对非高斯噪声干扰系统的鲁棒性较好. 另一方面, 当 σ 值变大, FP-MCS 算法性能将更接近 Kalman 平滑估计算法, 这是由于存在以下定理.

定理1 当相关熵增益矩阵 C 中核函数带宽 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, 固定点最大相关熵平滑估计算法将退化为固定点 Kalman 平滑估计算法.

证明 当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, 由 C 的定义可知, $C \rightarrow I$, 将其代入到 FP-MCS 算法迭代公式(19)~(24)中, 即可得到固定点 Kalman 平滑估计算法. \square

接下来讨论 FP-MCS 算法对状态平滑估计带来

的性能改进. 本文采用估计误差协方差作为性能衡量指标. 由上一小节可知, P_j 和 Π_{k+1} 分别为 x_j 在时刻 j 的状态估计误差协方差和在时刻 k 的平滑估计误差协方差. 也就是说, 在平滑过程中, Π_{k+1} 比 P_j 多使用 $k - j$ 个量测数据. 因此, FP-MCS 算法得到的性能改进可表示为

$$P_j - \Pi_{k+1} = \Pi_j - \left(\Pi_j - \sum_{i=j}^k \Sigma_i H_i^T (\lambda_i)^T \right) = \sum_{i=j}^k \Sigma_i H_i^T (\lambda_i)^T, \quad (25)$$

将式(22)中的 λ_i 代入上式, 得到

$$P_j - \Pi_{k+1} = \sum_{i=j}^k \Sigma_i H_i^T (R_i(C_i)^{-1} + H_i P_i H_i^T)^{-1} (\Sigma_i H_i^T)^T. \quad (26)$$

特殊地, 对于时不变系统, 且在时刻 j 已达到稳定, 则

$$P_j^- = P, \quad \Sigma_j = \Sigma, \quad (27)$$

那么式(26)可以简化为

$$P_j - \Pi_{k+1} = \sum_{i=j}^k \Sigma H^T (R(C)^{-1} + H P H^T)^{-1} (\Sigma H^T)^T. \quad (28)$$

注2 由式(28)可知, 等式右边部分为正定矩阵, 则存在 $(P_j - \Pi_{k+1}) > 0$, 即 $\Pi_{k+1} < P_j$, 表示平滑估计算法 FP-MCS 的性能总是优于 MCKF. 进一步, 由正定矩阵之和可知, k 越大, 即得到的量测数据越多, 平滑估计算法 FP-MCS 的性能改进越好.

注3 由式(28)也可知, 平滑估计算法 FP-MCS 的性能改进与相关熵增益矩阵 C 有关, 由于其包含核函数带宽 σ , 再次印证了 σ 是改进算法平滑估计性能的关键因子. 进一步, 当 $C = I$ 时, 所获得的性能改进等同于固定点 Kalman 平滑估计算法.

2.4 FP-MCS 的计算复杂度分析

接下来分析固定点最大相关熵平滑估计算法的计算复杂度. 根据算法1, 本文所提出的 FP-MCS 及比较算法中每个基本表达式的计算复杂度如表1所示, 表中(16- x)表示式(16)的第 x 项.

表1 FP-MCS 平滑估计算法的计算复杂度

算法	方程		矩阵运算	
	编号	变量	加法、减法和乘法	除法、求逆和解
MCKF	(16-1)	\hat{x}_{k+1}^-	$2n^2 + 4nm - n$	0
	(16-2)	L_k	$2n^3 + 2m^3 + 4n^2m + 6m^2n - n^2 - m^2 - 4nm$	$O(m^3)$
	(16-3)	C_k	$2nm + m$	m
	(16-4)	P_{k+1}^-	$4n^3 + 2n^2m - 2n^2$	0
FP-MCS	(16-3)	C_k	$2nm + m$	m
	(20-1)	\hat{x}_{k+1}^-	$2n^2 + 4mn - n$	0
	(20-2)	$\hat{x}_{j,k+1}^-$	$4nm$	0
	(22-1)	L_k	$2n^3 + 8m^2n + 4n^2m - n^2 - 5nm$	$O(m^3)$
	(22-2)	λ_k	$8m^2n + 4n^2m - 5nm$	$O(m^3)$
	(24-2)	Σ_{k+1}	$2n^3 + 2n^2m - n^2$	0
KS	(24-4)	Π_{k+1}	$4n^2m - nm$	0
	(20-1)	\hat{x}_{k+1}^-	$2n^2 + 4mn - n$	0
	(20-2)	$\hat{x}_{j,k+1}^-$	$4nm$	0
	(22-1)	L_k	$2n^3 + 4m^2n + 4n^2m - n^2 - 3nm$	$O(m^3)$
	(22-2)	λ_k	$4m^2n + 4n^2m - 3nm$	$O(m^3)$
	(24-2)	Σ_{k+1}	$2n^3 + 2n^2m - n^2$	0
(24-4)	Π_{k+1}	$4n^2m - nm$	0	

根据表1可以分别得到最大相关熵 Kalman 滤波算法(MCKF)、本文所提 FP-MCS 平滑估计算法和 Kalman 平滑估计算法(KS)的总体计算复杂度. 其中, 2.1 节所述另一种形式 MCKF 只涉及式(16-1)~(16-4), 因此其总体计算复杂度为

$$S_{MCKF} = 6n^3 + 2m^3 + 6n^2m - n^2 + 6m^2n - m^2 + 2nm - n + 2m + O(m^3). \quad (29)$$

本文所提 FP-MCS 平滑估计算法是在 MCKF 基

础上增加了平滑估计操作, 根据算法1的描述, 对于时刻 N , 需对平滑估计操作执行 N 次, 因此其计算复杂度高于 MCKF 的计算复杂度, 总体为

$$S_{FP-MCS} = (4N + 6)n^3 + 2m^3 + (14N + 6)n^2m - n^2 + (16N + 6)m^2n - m^2 + m - (3N - 2)nm + (2N + 1)O(m^3). \quad (30)$$

Kalman 平滑估计算法是 FP-MCS 平滑估计算法在 $C = I$ 时的特殊形式, 其平滑估计的计算复杂度略

有不同,总体为

$$S_{KS} = (4N + 6)n^3 + 2m^3 + (14N + 6)n^2m - n^2 + (8N + 6)m^2n - m^2 - (1 + N)n + (2 + N)nm + m + (2N + 1)O(m^3). \quad (31)$$

3 实验结果

本节通过如下实例对所提出的FP-MCS算法的有效性和优越性进行验证.

考虑基本的线性导航问题^[24]

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t \sin \theta \\ \Delta t \cos \theta \end{bmatrix} u_{k-1} + w_{k-1},$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k. \quad (32)$$

其中: $\Delta t = 1\text{ s}$ 为离散化采样时间, $\theta = \pi/6$ 为常数转角, u_k 为已知的加速度. 状态向量中前两个元素表示车辆的坐标位置,后两个元素表示对应的速度,过程噪声和量测噪声均为带脉冲函数的混合分布,其服从 $w_{k-1} \sim 0.9N(0, 0.01) + 0.1N(0, 1) + \text{outliers}(N, t)$, $v_k \sim 0.8N(0, 0.01) + 0.2N(0, 10) + \text{outliers}(N, t)$.

其中: $\text{outliers}(N, t)$ 表示在 t 时刻产生服从脉冲分布 $N(1, 100)$ 的散粒噪声,这里 t 取值 $50 \times \text{rand}(1, 10)$,即

在时刻 $[0, 50]$ 内随机产生10个较大异常值,且系统和算法的初始状态设置为

$$x_0 = \hat{x}_0 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, P_0 = \text{diag}([4, 4, 3, 3]).$$

设置量测时间为 $k = 100$,用于平滑 $j = 900$ 时的状态. 表2给出了100次蒙特卡洛仿真下,本文提出的FP-MCS平滑估计算法、Kalman平滑估计算法(KS)、粒子平滑估计算法(PS)、最大相关熵Kalman滤波算法(MCKF)、Kalman滤波算法(KF)和粒子滤波算法(PF)在平滑时刻所获得的估计均方误差(mean square error, MSE). 从表2可以看到FP-MCS平滑估计算法在核函数带宽 $\sigma = 1$ 时,其平滑性能最好. σ 值越小,FP-MCS平滑估计算法的性能越好,但当其小到一定值时,平滑性能发生转折,又趋于变差;相反,当 σ 值变大时,性能相对变差,且越来越接近Kalman平滑估计算法. 可能因为过小的 σ 值难以快速收敛导致性能下降,而过大的 σ 值使得FP-MCS平滑估计算法退化为Kalman平滑估计算法. 该实验结果与上节所证明的理论结果大体上保持一致. 进一步,在相同值下,FP-MCS平滑估计算法的性能优于最大相关熵Kalman滤波算法,且在适当的 σ 值下,其性能要优于粒子平滑估计算法和粒子滤波算法. 这些结果说明 σ 值的选择对FP-MCS平滑估计算法性能影响很大,总体上而言,对于本文研究的脉冲混合高斯噪声,选择相对较小的 σ 值更利于系统的平滑估计,具体的数值需要通过适当的实验评估.

表2 不同算法在非高斯噪声下的MSE值

		MSE				时间/s
		$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	
平滑算法	KS	1.613 6	1.787 9	1.026 1	1.074 2	8.41
	PS	0.741 5	1.357 3	0.831 9	0.812 4	16.24
	FP-MCS ($\sigma = 0.5$)	0.681 8	1.238 0	0.812 7	0.735 3	10.98
	FP-MCS ($\sigma = 1$)	0.364 9	0.920 1	0.644 7	0.615 8	10.92
	FP-MCS ($\sigma = 3$)	1.221 7	1.542 6	0.871 9	0.878 1	10.83
	FP-MCS ($\sigma = 5$)	1.582 4	1.767 4	0.981 6	1.048 2	10.70
	FP-MCS ($\sigma = 10$)	1.637 9	1.791 3	1.022 5	1.071 3	10.58
滤波算法	KF	1.948 2	2.049 6	1.347 4	1.384 3	4.17
	PF	1.041 5	1.623 2	1.102 3	1.057 2	8.25
	MCKF ($\sigma = 0.5$)	0.838 6	1.432 7	1.028 1	0.960 2	6.87
	MCKF ($\sigma = 1$)	0.542 5	1.079 5	0.820 8	0.855 8	6.58
	MCKF ($\sigma = 3$)	1.561 3	1.830 2	1.175 6	1.191 4	6.39
	MCKF ($\sigma = 5$)	1.855 4	2.029 9	1.280 2	1.359 3	6.23
	MCKF ($\sigma = 10$)	1.937 1	2.077 2	1.318 8	1.391 2	6.14

表2还列出了不同算法的运行时间,平滑算法KS、PS和FP-MCS的运行时间要大于滤波算法KF、PF和MCKF,这是因为需要更多的量测值应用到平滑估计的运算中,加大了算法的运行时间. 同时,由

于需要计算相关熵增益矩阵,FP-MCS和MCKF的运行时间要略大于对应的KS和KF. 另外对于同一算法,随着 σ 值增大,其运行时间略减少,趋于非常接近,这是因为不同 σ 值的计算对算法的运行时间影响很

小. 这些结果验证了上节算法计算复杂度分析所获得的结论.

图2给出了100次蒙特卡洛仿真下, 本文提出的FP-MCS平滑估计算法、Kalman平滑估计算法和粒子平滑估计算法的估计均方误差, 图中横坐标T表示用于平滑估计的量测值. 从图中可以看到平滑估计算法的性能趋势: 当系统趋于稳定时, 在相同的平滑时刻, FP-MCS算法的σ值越小, 性能越好, 但当其到达一定小值时, 平滑性能发生改变, 又趋于变差; 相反, σ值越大, 性能越接近Kalman平滑估计算法. 进一步发现, 在平滑前期, 性能有一定波动, 但是当平滑时间加长时, 意味着更多的量测值用于平滑估计, 其性能

趋于稳定, 该结果也符合前面讨论的平滑估计本质.

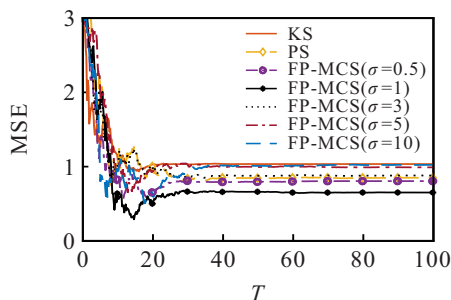
表3给出了FP-MCS算法所获得的性能改进(improvement percent, IP), 其计算表达式为

$$IP = \frac{\text{Tr}(P_j - \Pi_{k+1})}{\text{Tr}(P_j)} \times 100\%, \quad (33)$$

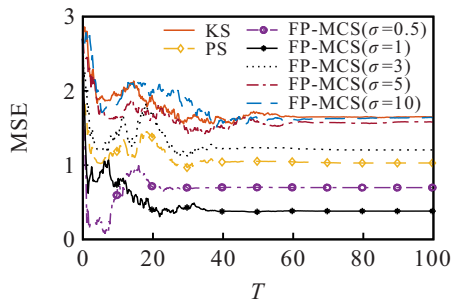
其中Tr(·)为状态估计误差协方差的迹. 从表3可以看到, 与理论预计的结果大体一致, 对于不同的核函数带宽σ, 所得到的性能改进有所不同, 在一定范围内, σ值越小, 性能改进相对显著, 但当其小到一定极值时, 改进趋势发生反转. 总体上讲, FP-MCS算法在不同σ值下所获得性能改进都要优于Kalman平滑估计算法. 另外, 图3给出了FP-MCS算法和Kalman平滑估计算法的性能改进过程, 再次证实了上述结论.

表3 FP-MCS平滑估计算法所获得的性能改进结果

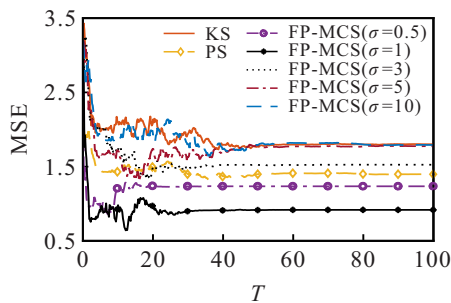
平滑算法	性能改进/%
KS	38.15
PS	42.71
FP-MCS (σ = 0.5)	45.42
FP-MCS (σ = 1)	50.24
FP-MCS (σ = 3)	39.27
FP-MCS (σ = 5)	38.82
FP-MCS (σ = 10)	38.54



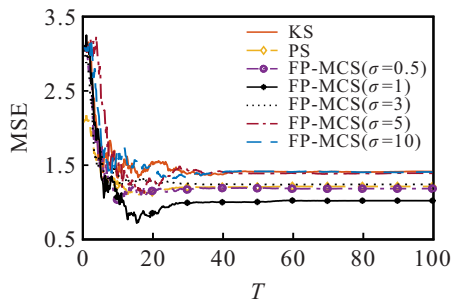
(a) 状态x(1)的MSE



(b) 状态x(2)的MSE



(c) 状态x(3)的MSE



(d) 状态x(4)的MSE

图2 FP-MCS算法在不同σ值下的估计均方误差

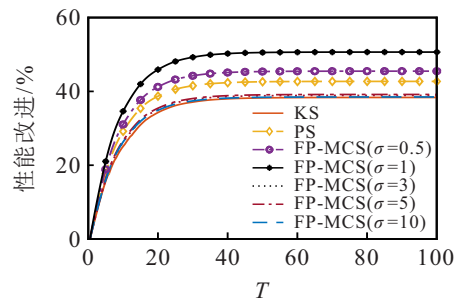


图3 FP-MCS算法在不同σ值下的性能改进

4 结论

本文主要研究了非高斯噪声环境下的系统状态平滑估计, 提出了一种针对固定点平滑问题的最大相关熵平滑估计算法. 采用矩阵变换, 首先给出了最大相关熵Kalman滤波的另一种表达形式; 然后通过状态扩展, 得到固定点平滑估计问题的增广系统, 并以新形式下的最大相关熵Kalman滤波为基础, 推导出固定点最大相关熵平滑估计算法的迭代方程; 进一步通过比较平滑前后状态估计误差协方差的表达式, 分析新算法的性能改进效果, 并比较其计算复杂度; 最后通过算例表明, 与Kalman平滑估计算法相比, 所提出的固定点最大相关熵平滑估计算法能够更好地抑制非高斯噪声的干扰, 对于在复杂环境下相关状态估计算法的设计和应用具有现实指导意义.

参考文献(References)

- [1] 王子赞, 张帅, 占雅聪, 等. 基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(1): 127-134.
(Wang Z Y, Zhang S, Zhan Y C, et al. Orthotopic double filtering based state estimation algorithm[J]. Control and Decision, 2022, 37(1): 127-134.)
- [2] 王树亮, 毕大平, 阮怀林, 等. 基于信息熵准则的认知雷达机动目标跟踪算法[J]. 电子学报, 2019, 47(6): 1277-1284.
(Wang S L, Bi D P, Ruan H L, et al. Cognitive radar maneuvering target tracking algorithm based on information entropy criterion[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(6): 1277-1284.)
- [3] 李海芬, 谭永红, 董瑞丽, 等. 动态迟滞 Hammerstein 系统的改进卡尔曼状态估计[J]. 控制理论与应用, 2020, 37(4): 745-752.
(Li H F, Tan Y H, Dong R L, et al. Modified Kalman filtering for Hammerstein systems with dynamic hysteresis[J]. Control Theory & Applications, 2020, 37(4): 745-752.)
- [4] 张霄, 丁锋. 双线性状态空间系统的状态观测器设计[J]. 控制与决策, 2023, 38(1): 274-280.
(Zhang X, Ding F. State observers for bilinear state-space systems[J]. Control and Decision, 2023, 38(1): 274-280.)
- [5] 张焕水, 柴天佑, 何乐亮. 离散随机线性系统最优滤波、预报和平滑估计的一种统一方法[J]. 控制与决策, 1997, 12(1): 20-24.
(Zhang H S, Chai T Y, H L L. A unified algorithm to the optimal filtering, smoothing and prediction for the discrete stochastic linear system[J]. Control and Decision, 1997, 12(1): 20-24.)
- [6] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(1): 35-45.
- [7] Wang N Y, Forger D B. The level set Kalman filter for state estimation of continuous-discrete systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2022, 70: 631-642.
- [8] Fisch A T M, Eckley I A, Fearnhead P. Innovative and additive outlier robust Kalman filtering with a robust particle filter[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2021, 70: 47-56.
- [9] Dan S. Optimal state estimation: Kalman, H_∞ , and nonlinear approaches[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [10] Chen B D, Liu X, Zhao H Q, et al. Maximum correntropy Kalman filter[J]. Automatica, 2017, 76: 70-77.
- [11] Principe J C. Information theoretic learning: Renyi's entropy and kernel perspectives[M]. New York: Springer, 2010: 26-45.
- [12] Chen B. System parameter identification: Information criteria and algorithms[M]. The 1st edition. London: Elsevier, 2013.
- [13] 方冰, 韩冰. 混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 546-554.
(Fang B, Han B. Hybrid entropy and cross-entropy measures of probabilistic hesitant fuzzy information[J]. Control and Decision, 2023, 38(2): 546-554.)
- [14] Murata M, Kawano I, Inoue K. Degeneracy-free particle filter: Ensemble Kalman smoother multiple distribution estimation filter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(12): 6956-6961.
- [15] Lv J J, Lang X L, Xu J H, et al. Continuous-time fixed-lag smoothing for LiDAR-inertial-camera SLAM[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2023, 28(2): 473-482.
- [16] Lin X, Liang X, Li W, et al. Adaptive robust least-squares smoothing algorithm[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 71: 1-18.
- [17] Wang G Q, Zhang Y G, Wang X D. Maximum correntropy rauch-tung-striebel smoother for nonlinear and non-Gaussian systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(3): 1270-1277.
- [18] Liu X, Ren Z G, Lyu H Q, et al. Linear and nonlinear regression-based maximum correntropy extended Kalman filtering[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(5): 3093-3102.
- [19] Wang G, Xue R, Wang J X. A distributed maximum correntropy Kalman filter[J]. Signal Processing, 2019, 160: 247-251.
- [20] Kulikova M V. Sequential maximum correntropy Kalman filtering[J]. Asian Journal of Control, 2020, 22(1): 25-33.
- [21] Liu X, Chen B D, Zhao H Q, et al. Maximum correntropy Kalman filter with state constraints[J]. IEEE Access, 2017, 5: 25846-25853.
- [22] Fan X X, Wang G, Han J C, et al. Interacting multiple model based on maximum correntropy Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 68(8): 3017-3021.
- [23] Wang G Q, Zhang Y G, Wang X D. Iterated maximum correntropy unscented Kalman filters for non-Gaussian systems[J]. Signal Processing, 2019, 163(C): 87-94.
- [24] Fakoorian S, Mohammadi A, Azimi V, et al. Robust Kalman-type filter for non-Gaussian noise: Performance analysis with unknown noise covariances[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2019, 141(9): 091011.

作者简介

马海平(1981—), 男, 教授, 博士, 从事智能信息处理与控制、智能优化算法与智能制造等研究, E-mail: mahp@usx.edu.cn;

刘婷(1999—), 女, 硕士生, 从事最优控制、信息安全等研究, E-mail: tingliu010@163.com;

张雅静(1999—), 女, 硕士生, 从事信号处理与控制、网络安全等研究, E-mail: zhang1304379@163.com;

费敏锐(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络控制、仪器仪表检测等研究, E-mail: mrfei@staff.shu.edu.cn.