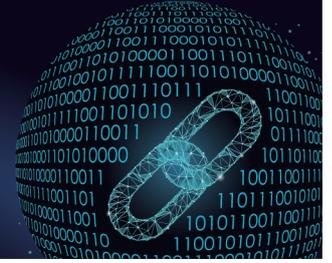




中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

# 控制与决策

CONTROL AND DECISION



## 基于时变函数的非完整轮式移动机器人的镇定与跟踪控制

李丽珍, 程松松, 樊渊

引用本文:

李丽珍,程松松,樊渊. 基于时变函数的非完整轮式移动机器人的镇定与跟踪控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(9): 2932–2940.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0244>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

控制与决策. 2021, 36(6): 1435–1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

#### 一种基于免疫机理的确定性移动机器人路径规划算法

A path planning algorithm of deterministic mobile robot based on immune mechanism

控制与决策. 2021, 36(10): 2418–2426 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0059>

#### 基于 $\text{pm}3\sigma$ 正态概率区间分族遗传蚁群算法的移动机器人路径规划

Path planning of mobile robot based on  $\text{pm}3\sigma$  normal probability interval population division using genetic ant-colony algorithm

控制与决策. 2021, 36(12): 2861–2870 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0745>

#### 凸优化与A\*算法结合的路径避障算法

Convex optimization and A-star algorithm combined path planning and obstacle avoidance algorithm

控制与决策. 2020, 35(12): 2907–2914 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0351>

#### 基于免疫优化的平面Acrobot线性自抗扰鲁棒镇定

Robust stabilization of planar Acrobot using linear active disturbance rejection control with immune optimization

控制与决策. 2020, 35(12): 3053–3058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0289>

# 基于时变函数的非完整轮式移动机器人的镇定与跟踪控制

李丽珍, 程松松, 樊渊<sup>†</sup>

(安徽大学 电气工程与自动化学院, 合肥 230601)

**摘要:** 非完整轮式移动机器人被广泛应用于军事设备、物流运输、医疗和家居服务等场景. 采用一种光滑的反馈控制策略来同时解决非完整移动机器人的目标点镇定问题与轨迹跟踪问题, 使得移动机器人能够自适应地在点镇定和跟踪控制中平滑地切换. 首先, 针对点镇定与跟踪问题构建统一的数学模型; 其次, 基于数学模型并结合一致 $\delta$ 持续激励理论, 设计一种基于时变函数的新型控制器, 该控制器不仅能在无参考轨迹的先验知识条件下解决点镇定控制问题的同时获得更为光滑的自主运动轨迹和更快的收敛速率, 而且能够很好地实现期望轨迹跟踪; 然后, 基于Lyapunov稳定性理论, 给出点镇定和轨迹跟踪误差的稳定性分析; 最后, 通过数值仿真与工程实验验证所提出方法的可行性和有效性.

**关键词:** 非完整约束; 轮式移动机器人; 时变函数; 点镇定; 轨迹跟踪; Lyapunov稳定性

中图分类号: TP242

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0244

**引用格式:** 李丽珍, 程松松, 樊渊. 基于时变函数的非完整轮式移动机器人的镇定与跟踪控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(9): 2932-2940.

## Stabilization and tracking control of nonholonomic wheeled mobile robot based on time-varying function

LI Li-zhen, CHENG Song-song, FAN Yuan<sup>†</sup>

(School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei 230601, China)

**Abstract:** The nonholonomic wheeled mobile robot is widely used in scenarios such as military equipment, transportation, medical, and household services. In this paper, a smooth feedback control strategy is used to solve the target point stabilization and trajectory tracking problems of such robots, so that the mobile robot can adaptively and smoothly switch between stabilization and tracking control. Firstly, a unified mathematical model is constructed for the stabilization and tracking problems of nonholonomic wheeled mobile robots. Then, combined with the theory of uniform  $\delta$  persistency of excitation, a novel controller has been designed based on time-varying functions. This controller can not only obtain smoother autonomous motion trajectory and faster convergence rate without prior knowledge of reference trajectory when addressing the point stabilization problem, but also complete the tracking of the desired trajectory, and achieve fast tracking in the case of the desired trajectory switching. In addition, we give the stability analysis of stabilization and tracking error using the Lyapunov stability theory. Finally, the feasibility and effectiveness of the proposed method are verified by numerical simulations and experiments.

**Keywords:** nonholonomic constraints; wheeled mobile robots; time-varying function; point stabilization; trajectory tracking; Lyapunov stability

## 0 引言

轮式移动机器人(wheeled mobile robots, WMRs)作为一类典型的非完整系统,具有结构简单、运动灵活性强、操纵性能好、能量利用率高等优点,在无人驾驶、监控巡检、家政、医疗和军事服务等领域具有广泛的应用. 然而,该类机器人的非完整约束使

其不满足光滑反馈镇定的必要条件,因此无法通过光滑或者连续的定常状态反馈来实现其镇定<sup>[1]</sup>. 为了解决这一难题,文献[2]设计了一种基于有限时间输出的反馈控制以实现拖车轮式移动机器人的点镇定控制. 点镇定控制问题也可以转换为动态跟踪控制问题进行研究<sup>[3]</sup>,从而采用贝塞尔曲线和非线性模型预

收稿日期: 2023-03-06; 录用日期: 2023-09-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973002, 62103003); 安徽省杰出青年基金项目(2008085J32).

责任编辑: 晔斌.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: yuanf@ahu.edu.cn.

测相结合的控制策略解决移动机器人的点镇定控制过程中的运动轨迹不连续问题. 文献[4]为减少到达目标点的时间、缩短轨迹,对现有的基于运动学模型的控制律进行了改进. 文献[5]提出基于时间标度法设计的有限时间控制器,使得研究对象能够在有限时间内实现点镇定控制. 相关研究表明,反馈控制机制不仅能够有效实现该类机器人的稳定控制<sup>[6-7]</sup>,还能拓展于更广义的非完整链式系统的稳定控制<sup>[8]</sup>. 根据Samson等人的相关研究成果,文献[9]通过引入一致 $\delta$ 持续激励(uniform  $\delta$  persistency of excitation,  $\mu\delta$ -PE)理论,对非完整系统的时变稳定机制给出了简洁清晰的诠释. 这些已有的研究成果不仅为非完整系统的稳定性提供了更清晰的概念阐释,也为解决其稳定性控制问题提供了新的思路.

通常,WMRs的控制主要体现在其对参考轨迹的跟踪和设定点的镇定. 轨迹跟踪是指在笛卡尔坐标系下,从任意初始位姿出发,到达并跟随期望轨迹;而点镇定是指从给定的初始位姿出发,到达并稳定在给定的期望位姿处. 特别地,在轨迹跟踪控制中,为了实现任意参考轨迹的有效跟踪,常见的思路是设计两个及以上的控制器,辅以相应的控制器切换规则. 滑模控制<sup>[10-13]</sup>和神经网络控制<sup>[14-16]</sup>等作为机器人控制研究中经典的非线性控制策略,常常被用于移动机器人的控制,在克服外部干扰的情形下进一步提高机器人的跟踪性能. 文献[17]提出的双时间尺度滤波方法也是一种有效的控制技术,该方法设计快速变量来补偿扰动,以此提高控制的精度和鲁棒性. 然而,在实践中,往往需要频繁实现轨迹跟踪和点镇定,上述多控制器切换的控制方法会引入切换扰动,且控制器实时性较差,使得系统的稳定程度不佳. 同时,在缺乏参考轨迹先验信息的情形中,上述切换控制无法使WMRs在自主运动模式下实现点镇定<sup>[18]</sup>. 考虑到如何有效提高控制器的设计效率和执行效率问题,有必要深入研究能够同时实现非完整WMRs轨迹跟踪和点镇定的控制器<sup>[19]</sup>,提升控制器的执行性能. 针对这一要求,文献[20]采用反馈策略同时实现轨迹跟踪控制和点镇定控制,但是,这种控制方法只能跟踪一类速度受限的参考轨迹. 受文献[20]的启发,文献[21]采用输入约束技术,避免了执行器饱和的现象,但是也增加了计算负担,降低了轨迹收敛的时效性. 文献[18]通过构造一类时变函数建立WMRs的轨迹跟踪问题与点镇定问题之间的联系,从而设计了一类简单有效的基于时变函数的控制器,不仅能够同时解决轨迹跟踪问题与点镇定问题,还提高了轨迹收

敛的快速性. 然而,由于设计的时变函数变化幅度较大,在实现点镇定时存在轨迹不平滑现象. 构建时变控制器来实现机器人的点镇定和轨迹跟踪控制成为研究热点之一,文献[19]考虑受输入约束等不确定性影响的机器人,提出基于自适应跟踪控制策略的饱和时变控制器.

基于以上分析,现有的WMRs的控制策略存在如下几个方面的问题: 1) 大多数现有的控制方法只注重实现对参考轨迹的跟踪,忽略了对设定点镇定问题的研究. 而事实上,后者使WMRs应用中的一类重要问题的控制难度更高<sup>[18]</sup>. 2) 现有的同时实现轨迹跟踪和点镇定的控制方法中,或对参考轨迹的速度有限制;或控制器复杂,计算量大,实时性不理想;或点镇定轨迹不平滑,镇定过程耗时较长. 针对这些问题,本文通过引入一类新的时变函数,构建了基于动态误差模型的控制策略,取得了如下两个方面较好的控制效果: 1) 通过单个控制器同时实现轨迹跟踪和点镇定控制,避免了多控制器切换带来的较高的计算复杂度和不佳的响应实时性. 2) 通过光滑的时变函数获得了在轨迹跟踪和点镇定两类问题下统一的连续控制输入,使得WMRs获得了更平滑的轨迹,提高了控制策略的实用性.

## 1 问题描述及预备知识

### 1.1 问题描述

在纯滚动和不打滑的前提下,移动机器人的相关结构可以由广义坐标向量 $q = (x, y, \theta)^T$ 来表示,其中 $x$ 和 $y$ 表示机器人在笛卡尔坐标下的位置, $\theta$ 表示方向角. 轮式移动机器人的非完整约束描述如下:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0. \quad (1)$$

基于式(1),WMRs的运动学模型可以等价描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{\theta} = w, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $v$ 和 $w$ 分别为WMRs的线速度和角速度. 用 $q_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T$ 来表示可行的期望轨迹,且满足

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_r \cos \theta_r, \\ \dot{y}_r = v_r \sin \theta_r, \\ \dot{\theta}_r = w_r. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x_r, y_r, \theta_r$ 代表虚拟机器人的位姿信息; $v_r$ 和 $w_r$ 分别代表虚拟机器人的线速度和角速度.

本文的控制目标就是基于系统(2)设计一个时变

的反馈控制器来解决轨迹跟踪过程中的镇定或跟踪问题,使得系统的镇定误差或跟踪误差能够最终收敛到零,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q_r(t) - q(t)) = 0, \quad (4)$$

其中  $q_r(t)$  和  $q(t)$  分别表示设定的期望点或位姿和起始点或实际位姿.

## 1.2 预备知识

为了设计可行的控制器实现轨迹跟踪和点镇定,本文给出如下假设.

**假设1** 输入的参考信号  $v_r$ 、 $w_r$ 、 $\dot{v}_r$ 、 $\dot{w}_r$  是有界的,且  $v_r$  和  $w_r$  总会满足下列情形中的一个.

**情况1**  $\exists T$ , 对于  $\forall t \geq 0$  有  $\kappa_1 > 0$  且满足  $\int_t^{t+T} (v_r^2(s) + w_r^2(s)) ds \geq \kappa_1$ .

**情况2**  $\exists \kappa_2 > 0$  满足  $\int_0^\infty (v_r^2(s) + w_r^2(s)) ds \leq \kappa_2$ .

**注1** 情况1表示  $v_r$  和  $w_r$  满足持续激励条件,主要应用于线路径和圆路径等连续轨迹跟踪问题;情况2应用于针对设定点自主运动过程中的镇定问题.将两种情形作用于同一控制器来实现控制器设计,可有效扩展单一控制器的应用范围.此外,与文献[18]相比,上述情形中的参考速度的适用范围更广,有利于将本文的控制器设计方法应用于带有其他性能要求的WMRs控制的研究中.

**引理1**<sup>[1]</sup> 假设对于任意  $t \geq t_0 \geq 0$ , 都有  $a(t), b(t), c(t) \geq 0$ , 假定  $b(t)$  是有界的,且满足

$$\dot{a}(t) \leq -b(t)a(t) + c(t), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

若有  $\int_{t_0}^\infty c(t) dt < \infty$  和  $\int_{t_0}^\infty b(t) dt = \infty$  成立,则能够得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ .

在现有研究中,大多数对WMRs的镇定和跟踪问题都作为两个不同的控制问题分开考虑,采用不同的控制器加以解决,单个控制器同时解决镇定和跟踪问题并不容易<sup>[20]</sup>.针对这类问题,本文将设计一个通用的控制器来同时解决镇定和跟踪问题.

## 2 控制设计及稳定性分析

### 2.1 控制器设计

基于上述系统模型的建立与分析,本文所研究的WMRs只要使得实际位姿  $q$  能够跟踪到期望位姿  $q_r$ , 就能实现所需控制效果.将WMRs的跟踪控制问题转化为跟踪误差的稳定性问题,选择笛卡尔坐标下的跟踪误差为  $q_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T$ , 满足方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \theta - \theta_r \end{bmatrix}. \quad (5)$$

基于式(5),可以得到如下动态误差方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_e = w y_e + v - v_r \cos \theta_e, \\ \dot{y}_e = -w x_e + v_r \sin \theta_e, \\ \dot{\theta}_e = w - w_r. \end{cases} \quad (6)$$

为了建立满足要求的控制器,定义一个新的时变函数  $\phi$  来构建角度误差  $\bar{\theta}_e$ , 即

$$\bar{\theta}_e = \theta_e + \phi. \quad (7)$$

将式(7)代入动态误差方程(6),得到一个重构后的动态误差模型

$$\begin{cases} \dot{x}_e = w y_e + v - v_r \cos \theta_e, \\ \dot{y}_e = -w x_e + v_r \sin \theta_e, \\ \dot{\bar{\theta}}_e = w - w_r + \dot{\phi}. \end{cases} \quad (8)$$

采用输入转换解决WMRs的点镇定和轨迹跟踪问题,即

$$\begin{cases} u_1 = v_r \cos \theta_e - v, \\ u_2 = w - w_r. \end{cases} \quad (9)$$

为了设计控制输入中选取的辅助函数以进一步保证WMRs控制器的有效性,选择如下Lyapunov函数:

$$V_1 = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2). \quad (10)$$

计算  $V_1$  沿着误差系统(8)的导数,可以得到

$$\dot{V}_1 = x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e. \quad (11)$$

基于式(11)设计被控对象的控制输入

$$u_1 = k_1 x_e, \quad k_1 > 0. \quad (12)$$

为了得到稳定且平滑的跟踪效果,设计变量

$$\phi = \frac{k_0 \alpha h y_e}{1 + \sqrt{\frac{1}{2} x_e^2 + \frac{1}{2} y_e^2}}, \quad (13)$$

定义参数变量  $\alpha$  满足

$$\dot{\alpha} = -(v_r^2(t) + w_r^2(t)) \alpha. \quad (14)$$

其中:参数  $k_0 > 0, \alpha(0) = 1$ .

**注2** 在位姿跟踪过程中,相较于  $x_e$ 、 $y_e$  带来的误差影响,方向角  $\theta_e$  的误差影响更大,且由于非完整移动机器人本身属性,轮式机器人在二维平面上的角度无法做到横向移动,角度问题需要更加重视;结合现有经验,学者们均以角度为主要着力点进行拓展研究.因此,本文提出的控制策略是基于角度误差的重新构建,而对重新构建的方向角误差不宜过大.为了避免因  $\phi$  的时变性而导致新建误差变量  $\bar{\theta}_e$  波动范围过大,本文在  $\phi$  中增加了范围限制约束  $y_e / (1 + \sqrt{x_e^2/2 + y_e^2/2})$ , 其区间范围为  $(0, 1)$ , 一定程

度上杜绝了因角度误差变化过大而引起系统收敛过程中的振荡,使得系统能够稳定且平缓地实现点镇定和轨迹跟踪控制.

假定  $h = h(t, x_e, y_e)$  满足下列假设.

**假设2**  $h(t, x_e, y_e)$  对  $t$  的一阶偏导数和二阶偏导数都是有界的,并且满足如下3个性质<sup>[18]</sup>.

**性质1**  $h(t, 0, 0) = 0$  且  $\frac{\partial h}{\partial x_e} y_e - \frac{\partial h}{\partial y_e} x_e = 0$ .

**性质2**  $h(t, x_e, y_e)$  关于  $t, x_e, y_e$  一致有界,即对于  $\forall t \geq 0, \forall (x_e, y_e) \in \mathbf{R}^2, \exists \eta > 0$ , 有  $|h(t, x_e, y_e)| \leq \eta$ .

**性质3**  $\frac{\partial h(t, 0, y_e)}{\partial t}$  关于  $y_e$  满足  $\mu\delta - PE$ , 即对于  $\forall \delta > 0, \exists T > 0, \mu > 0$ , 使得当  $t \geq 0$  时, 有

$$\min_{s \in [t, t+T]} |y_e(s)| > \delta \Rightarrow \int_t^{t+T} \left| \frac{\partial h(s, 0, y_e(s))}{\partial t} \right| \geq \mu. \quad (15)$$

针对假设2, 选取恰当的  $h$  是容易满足的. 受文献[18]的启发, 本文选择  $h = \frac{2\eta}{\pi} \arctan(ar^b) \sin(ct)$  构造新的时变函数  $\phi$ .

结合式(7)和(13), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_e = & \left(1 - \frac{k_0 x_e \alpha h}{1 + \sqrt{V_1}}\right) u_2 + k_0 \alpha y_e \frac{\frac{\partial h}{\partial x_e}(-u_1)}{1 + \sqrt{V_1}} + \\ & k_0 \alpha y_e \frac{\frac{\partial h}{\partial y_e} v_r \sin \theta_e - (v_r^2(t) + w_r^2(t))h}{1 + \sqrt{V_1}} + \\ & k_0 \alpha \frac{(v_r \sin \theta_e - w x_e)h + y_e \frac{\partial h}{\partial t}}{1 + \sqrt{V_1}} - \\ & k_0 \alpha \frac{(-x_e u_1 + y_e v_r \sin \theta_e)h}{2\sqrt{V_1}(1 + \sqrt{V_1})^2} =: \\ & m(t, x_e, y_e)u_2 + n(t, x_e, y_e, \theta_e). \end{aligned} \quad (16)$$

构造如下 Lyapunov 函数:

$$V_2 = \frac{1}{2} \bar{\theta}_e^2. \quad (17)$$

对  $V_2$  关于时间求导, 可以得到

$$\dot{V}_2 = \bar{\theta}_e \dot{\bar{\theta}}_e = \bar{\theta}_e (m u_2 + n). \quad (18)$$

由此设计反馈控制输入

$$u_2 = -\frac{n}{m} - k_2 \bar{\theta}_e, \quad (19)$$

其中  $k_2 > 0$ . 将式(19)代入(18)可得

$$\dot{V}_2 = -m k_2 \bar{\theta}_e^2. \quad (20)$$

结合式(9), (12)和(19), 设计 WMRs 的控制律

$$\begin{cases} v = v_r \cos \theta_e - k_1 x_e, \\ w = w_r - \frac{n}{m} - k_2 \bar{\theta}_e. \end{cases} \quad (21)$$

基于上述分析, 将式(12)代入(8), 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_e = w y_e - k_1 x_e, \\ \dot{y}_e = -w x_e + v_r \sin \theta_e, \\ \dot{\bar{\theta}}_e = -m k_2 \bar{\theta}_e. \end{cases} \quad (22)$$

## 2.2 稳定性分析

本节将根据 Lyapunov 理论和 Barbalat 引理给出系统稳定性的证明. 针对前述系统(22)和相应的控制律(21), 有下述定理成立.

**定理1** 在假设1和假设2成立的条件下, 控制律(21)能够使得闭环系统(22)的镇定误差或跟踪误差全局渐近收敛到零.

根据 Barbalat 引理, 式(20)的连续可导二元函数  $V_2: \mathbf{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  有下界,  $\dot{V}_2(\bar{\theta}_e, t)$  半负定, 且  $\dot{V}_2(\bar{\theta}_e, t)$  关于时间  $t$  是一致连续的, 因此可以得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_2(\bar{\theta}_e, t) = 0$ . 由  $\dot{V}_2(t) \leq 0$  可知  $V_2(t)$  为减函数, 满足  $\sup_{t \geq 0} V_2(t) \leq V_2(0)$ , 故  $\bar{\theta}_e$  有界.

由  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_2 = 0$  可知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\theta}_e = 0$ , 求解方程(14)可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = 0$ , 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e = 0$ . 根据假设1的设定条件, 对于  $\forall t \geq 0$ , 存在正的常数  $P$  使得

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}v_r(t)}{2} \leq P. \quad (23)$$

综上, 可以进一步推出

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}v_r(t) \sin \theta_e(t)}{2} dt < \infty. \quad (24)$$

将式(12)代入(11), 可得

$$\dot{V}_1 = -k_1 x_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e \leq \sqrt{2}v_r \sqrt{V_1} \sin \theta_e. \quad (25)$$

不等式(25)可以进一步写为

$$\frac{d\sqrt{V_1}}{dt} \leq \frac{\sqrt{2}v_r \sin \theta_e}{2}. \quad (26)$$

结合式(23), 对不等式(25)从0到  $t$  积分如下:

$$\begin{aligned} \sqrt{V_1(t)} & \leq \\ \sqrt{V_1(0)} + \int_0^t \frac{\sqrt{2}v_r(s) \sin \theta_e(s)}{2} ds & \leq \\ \sqrt{V_1(0)} + Pt & < \infty, \quad \forall t \in (0, T_0]. \end{aligned}$$

对于  $0 \leq t \leq T_0 < \infty$ , 可得  $V_1(t)$  是有界的. 因此, 存在正的常数  $\mu_0$  和  $\mu$ , 使得对于  $\forall V_1(0) \leq \mu_0$ , 都满足

$$V_1(t) \leq \mu. \quad (27)$$

根据式(23)和(27), 式(24)可以进一步写为

$$\dot{V}_1(t) \leq -k_1 x_e^2 + 2\sqrt{\mu}P, \quad \forall V_1(0) \leq \mu_0, \quad (28)$$

即

$$\frac{d}{dt} \left( V_1(t) - 2\sqrt{\mu}P \int_0^t ds \right) \leq 0.$$

可见  $V_1(t) - 2\sqrt{\mu}P \int_0^t ds$  非增. 因此, 当  $0 \leq t \leq T_0$  时, 从0到  $t$  对式(28)进行积分, 可得

$$V_1(t) + \int_0^t k_1(x_e(s))^2 ds \leq V_1(0) + 2\sqrt{\mu}Pt < \infty.$$

由上可知  $k_1 x_e^2$  是可积的. 结合 Barbalat 引理进一步得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_1 x_e^2 = 0$ , 而参数  $k_1 \neq 0$ , 所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e = 0$ , 即误差变量  $x_e$  最终渐近收敛到零. 接下来分两种情况来分析  $y_e$  的收敛性.

1) 当  $v_r$  持续激励时, 用于连续的期望轨迹跟踪, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_r \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & -k_1 x_e^2 + y_e v_r \frac{\sin \theta_e}{\theta_e} \left( \bar{\theta}_e - \frac{k_0 \alpha h y_e}{1 + \sqrt{\frac{1}{2} x_e^2 + \frac{1}{2} y_e^2}} \right) \leq \\ & -k_1 x_e^2 - k_0 v_r \frac{\alpha h y_e^2}{1 + \sqrt{V_1}} + \sqrt{2} v_r |\bar{\theta}_e| \sqrt{V_1} \leq \\ & -\epsilon V_1 + \sqrt{2} v_r |\bar{\theta}_e| \sqrt{V_1}. \end{aligned} \quad (29)$$

其中:  $\epsilon = \min(k_1, \zeta)$ ,  $\zeta = \sup_{t \geq 0} \left( \frac{k_0 v_r \alpha h}{1 + \sqrt{V_1}} \right) < \infty$ . 又因为  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\theta}_e = 0$ , 所以  $\sqrt{2} v_r |\bar{\theta}_e|$  是可积的, 即

$$\int_0^\infty \sqrt{2} v_r(t) |\bar{\theta}_e(t)| dt < \infty.$$

通过引理1可以得到, 对于所有的  $t \geq t_0 \geq 0$ , 均有  $V_1(t) \geq 0$ ,  $\epsilon(t) \geq 0$  且  $\beta(t) \geq 0$ , 其中  $\beta(t) = \sqrt{2} v_r |\bar{\theta}_e| \sqrt{V_1}$ , 明显  $\epsilon(t)$  是有界的, 简化式(29)可得

$$\dot{V}_1(t) \leq -\epsilon(t) V_1(t) + \beta(t), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

且有  $\int_{t_0}^\infty \beta(t) dt < \infty$  和  $\int_{t_0}^\infty \epsilon(t) dt = \infty$  成立. 因此有  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_1(t) = 0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_1(x_e, y_e) = 0$ . 结合前述结果  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e = 0$ , 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e = 0$ .

2) 当  $v_r$  不激励时, 用于点的镇定跟踪, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_r = 0$ .

结合  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\theta}_e = 0$ , 根据 Barbalat 引理和  $\dot{x}_e = w y_e - k_1 x_e$ , 可知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_e = \lim_{t \rightarrow \infty} w y_e = 0$  成立, 代入控制律  $w$  的表达式(21), 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( w_r - \frac{n}{m} \right) y_e = 0. \quad (30)$$

若在情况1)的情况下, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = 0$  成立, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha h = 0$ , 则由式(30)可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_r y_e = 0. \quad (31)$$

由  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_r y_e = 0$  和式(31)可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_r^2 + w_r^2) y_e = 0.$$

考虑情况1), 可以推出  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e = 0$ . 考虑情况2), 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $0 < \alpha < 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_r = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} w_r = 0$  成立, 从而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n}{m} y_e = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha \frac{\partial h}{\partial t} y_e = 0.$$

由性质3可知, 若  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e \neq 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \partial h(t, 0, y_e) /$

$\partial t \neq 0$ , 矛盾. 故只有当  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e = 0$  成立时才能满足条件. 因此, 针对情况1)和情况2), 都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e = 0$ .

综上所述, 在假设1和假设2下, 控制律(21)可使  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e = 0$  成立, 明显满足控制目标(4), 即闭环误差动态系统(22)能够全局渐近收敛到零. 相较于文献[18]的控制器, 控制律(21)能够有效避免新定义的角度误差不能为0的这一局限性.

### 3 仿真与实验验证

本节给出仿真和实验来说明本文所提出控制器的有效性. 在仿真中, 将所提出方法用于实现 WMRs 的点镇定、跟踪给定圆和切换轨迹, 平台采用 Matlab 2021b, Intel Core i5-1035G1, RAM 16 GB. 为进一步说明所设计控制器的实用性, 在 Turtlebot2 平台上进行实物实验. 相关仿真与实验结果均与文献[18]进行了对比.

#### 3.1 点镇定问题

对于点镇定问题, WMRs 的起始点和目标终点的位姿坐标分别为  $q(0) = (2, -2, -1)^T$  和  $q_r = (0, 0, 0)^T$ [18]. 设计  $k_0 = 2$ ,  $k_1 = 9.83$ ,  $k_2 = 3.5$  以及  $h(t, x_e, y_e) = \arctan(x_e^2 + y_e^2) \sin t$ . 图1展示了到达设定点的镇定轨迹、镇定误差、航向角和均方误差  $\sqrt{x_e^2 + y_e^2 + \theta_e^2}$ . 此外, 本文设计的变量  $\phi$  增加的范围限制约束使得 WMRs 能够获得稳定平缓的运动轨迹.

相关仿真结果如图1所示. 由图1(a)可知, WMRs 在没有参考轨迹的条件下能够实现点镇定控制性能, 且自主运动产生的轨迹较文献[18]更光滑平缓. 图1(c)显示本文所提出控制器的航向角变化比文献[18]更温和. 图1(b)~图1(d)显示本文提出的控制器能够使 WMRs 更稳定、平滑、快速地到达指定点. 基于上述仿真结果, 本文所提出的控制方案在关于点镇定的稳定性和收敛速度方面均具有明显优势.

#### 3.2 轨迹跟踪问题

利用参考线速度  $v_r = 1.4$  m/s 和参考角速度  $w_r = 0.7$  rad/s 生成半径为 2 m 的期望圆轨迹. 期望和实际的初始位姿状态分别为  $q_r(0) = (2, 0, \pi/2)^T$  和  $q(0) = (1.5, -0.4, \pi/4)^T$ . 设计  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = 1.5$ ,  $k_2 = 2$  以及  $h(t, x_e, y_e) = \arctan(x_e^2 + y_e^2) \sin t$ .

相关仿真结果如图2所示. 图2(a)和图2(b)分别展示了所提控制器的圆轨迹跟踪性能及其状态向量的跟踪误差, 图2(c)描述了移动机器人航向角的跟踪效果, 图2(d)展示了控制输入信号  $v$  和  $w$ . 仿真结果显示本文所提出的控制器能稳定地跟踪到期望轨迹, 且跟踪效果比文献[18]更稳定、快速.

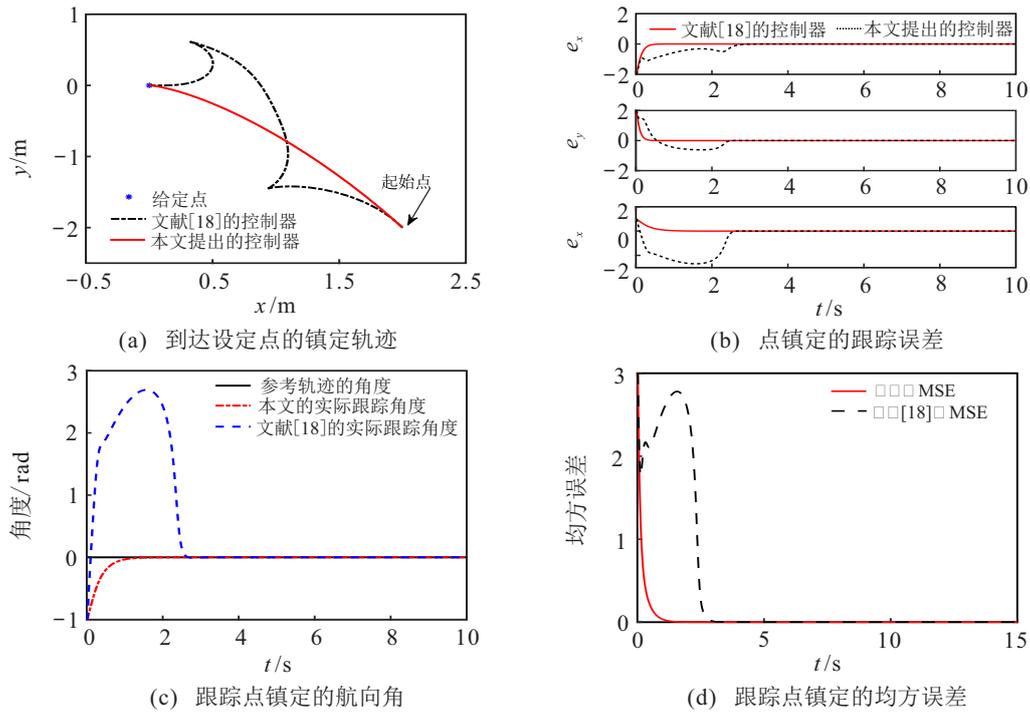


图1 点镇定问题的仿真结果

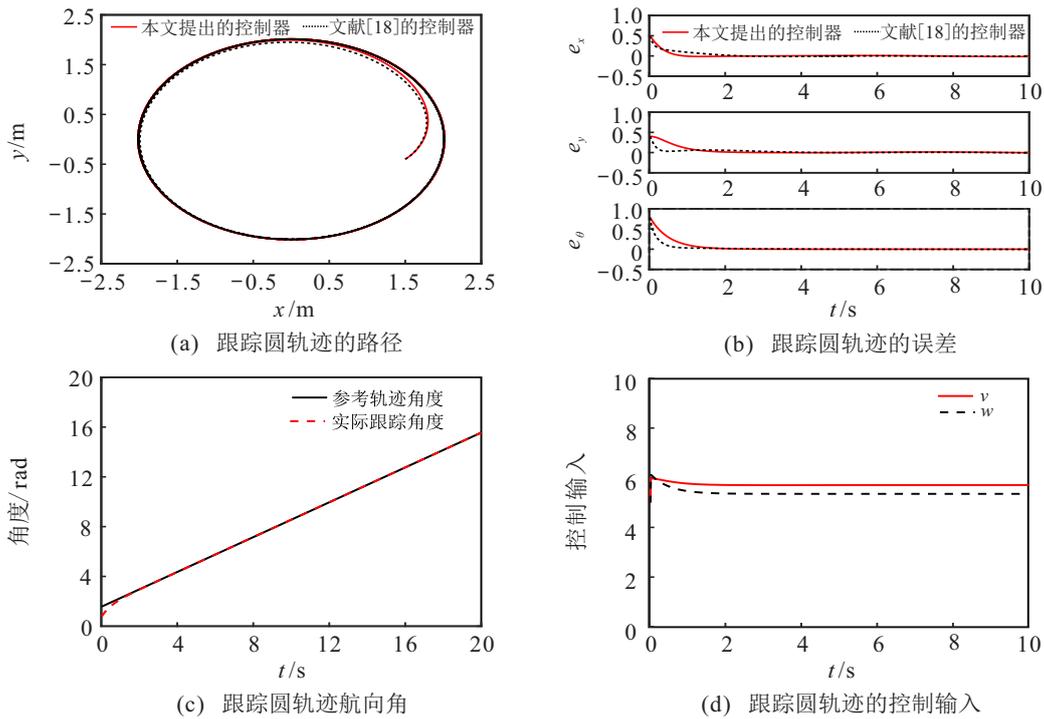


图2 轨迹跟踪问题的仿真结果

### 3.3 轨迹切换问题

考虑切换跟踪轨迹情形,设置0~5s和5~15s的期望圆轨迹相关参数( $w_r, v_r, R$ )分别为(0.7 rad/s, 0.7 m/s, 1 m)和(0.7 rad/s, 1.4 m/s, 2 m),期望和实际轨迹的初始位姿分别为 $q_r(0) = (2, 0, \pi/2)^T$ 和 $q(0) = (2, -2, -1)^T$ ,选择 $k_0 = 1, k_1 = 1.23, k_2 = 1$ .进一步地,考虑由点镇定到跟踪圆轨迹的切换情形,点镇定相关参数同第3.1节,设置圆轨迹的( $w_r, v_r, R$ )

为(0.7 rad/s, 1.05 m/s, 1.5 m),选择 $k_0 = 2.5, k_1 = 1.2, k_2 = 2$ .上述两种情形均设计 $h(t, x_e, y_e) = \arctan(x_e^2 + y_e^2) \sin t$ .

相关仿真结果如图3所示.图3(a)和图3(d)展示了本文和文献[18]的方法在轨迹切换前后的跟踪轨迹和误差.仿真结果显示,本文所提出的控制器相较于文献[18]能够更加快速且平缓地收敛到期望轨迹,如在第10s后,本文的方法对应的误差 $e_x, e_y$ 和 $e_\theta$

均趋于稳定,而文献[18]对应的误差仍存在较大波动.图3(c)是相关的线速度 $v$ 和角速度 $w$ 的输入信息,在轨迹切换之前,文献[18]所需的控制输入信号比本文的控制输入信号变化范围要大,且轮式移动机器人位姿误差的收敛精度较低.当期望轨迹发生切换后,文献[18]已经趋于稳定的控制输入信号再一次增大,通过反馈控制来调整轨迹切换后的轮式移动机器

人位姿误差,输入信号波动大且收敛精度不高;而本文控制算法的输入信号在期望轨迹突变后仍能保持着相对平滑的变化.此外,图3(b)展示了研究对象在经过镇定任务后切换到轨迹跟踪任务的平滑运动信息.结合图3可知,本文所采用的控制策略在非完整系统的稳定性、快速性及精确性方面的跟踪优势和平滑切换性能.

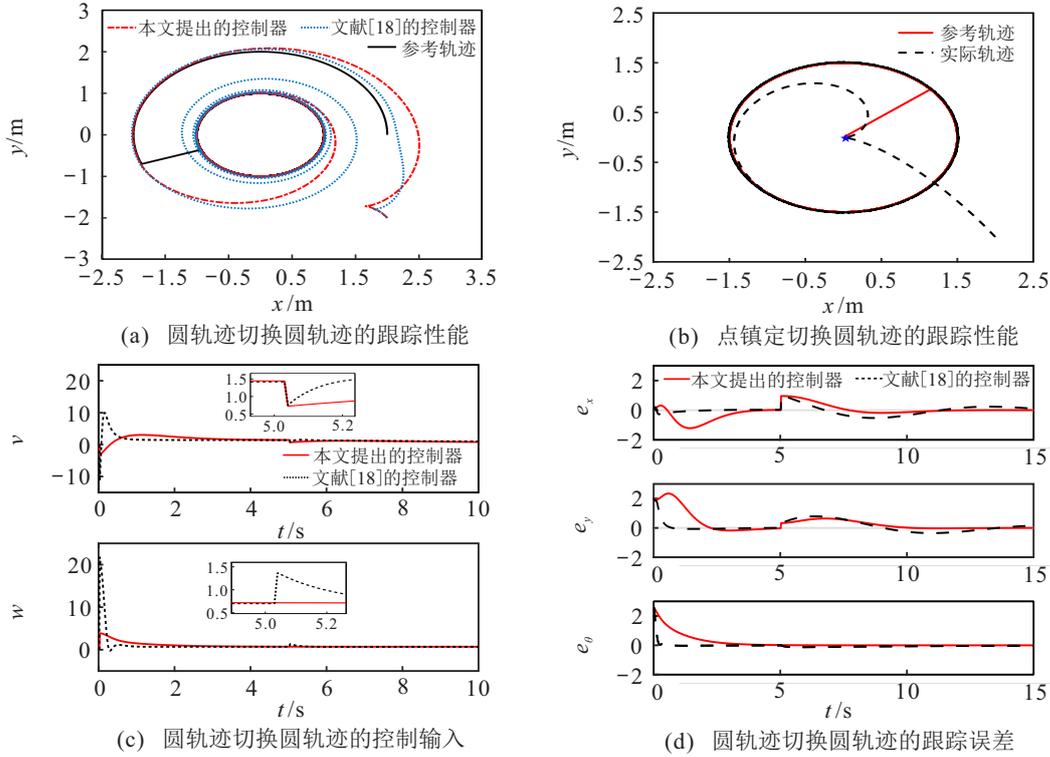


图3 轨迹切换问题的仿真结果

### 3.4 实验验证

为了验证本文所提出方法在实际场景中的时效性,基于Turtlebot2实验平台做相关的点镇定控制和轨迹跟踪控制的实物实验,具体实验场景如图4所示. Turtlebot2的自身质量为6.3kg,最大负载5kg,主要硬件为Yujin Kobuki移动底座、2200mAh电池和可装卸的结构模块,选配Kinect视觉传感器及双核笔记本.以ROS(robot operating system)作为操作系统,通过两层控制组成整个系统的控制架构,其中上层算法由C++编程语言来实现,机器人的实际位姿通过轮式里程计反馈获取.

在前述基于Matlab的仿真中,可将研究对象等价为一个质点,从而基于机器人的运动学模型来进行研究.然而在实际场景中,需要考虑机器人固有的自身动力学模型和外部环境等影响.因此,对控制器的相关参数 $k_0, k_1, k_2$ 和时变函数 $h(t, x_e, y_e)$ 进行适当调整.

对于点镇定控制实验部分,选择函数 $h(t, x_e, y_e)$



图4 Turtlebot2实验操作平台

$= 2.8 \arctan(x_e^2 + y_e^2) \sin t$ ,取 $k_0 = 1, k_1 = 1, k_2 = 3$ .选择原点为起始点,目标点为 $q_r(0) = (0, 4, \pi/2)^T$ .镇定的实验结果如图5(a)和图5(b)所示,由图5(a)可以直观看出,文献[18]提出的控制器在开始的一段时间内不能很好地实现镇定控制,尽管跟踪误差最终都能收敛到零.进一步由图5(b)展示的位姿误差向量也可以看出,文献[18]的控制器在镇定控制前期的误差较大.

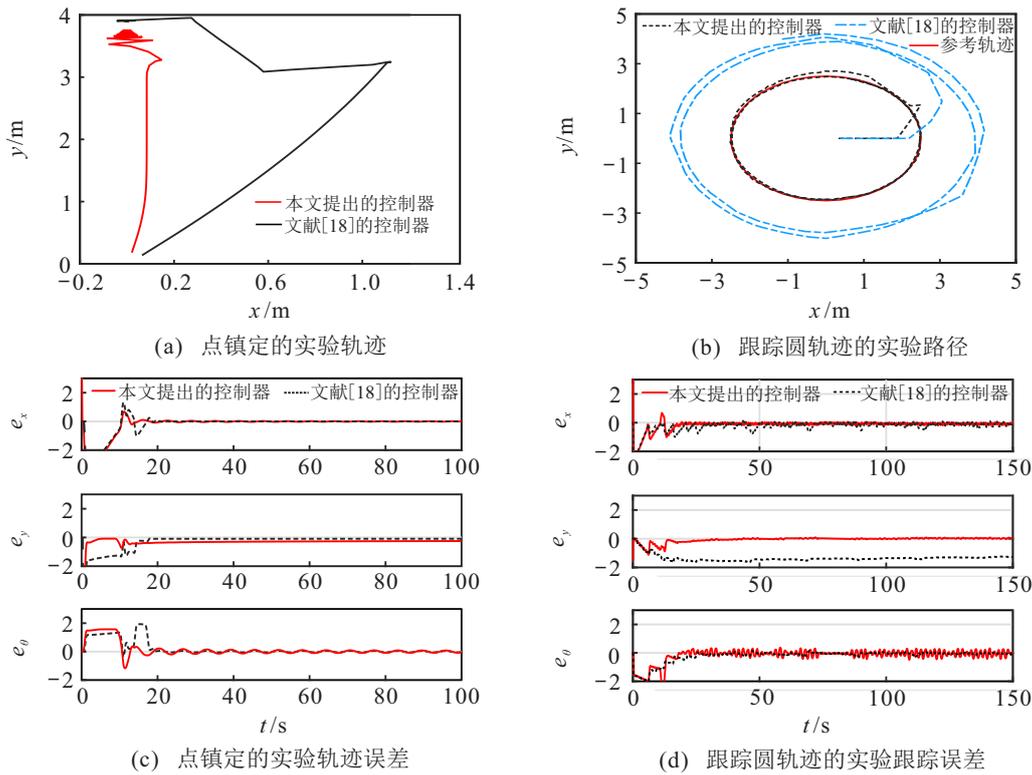


图5 轨迹切换问题的仿真结果

对于轨迹跟踪控制的实验部分,选择函数  $h(t, x_e, y_e) = \arctan(x_e^2 + y_e^2) \sin t$ ,取  $k_0 = 9, k_1 = 4, k_2 = 9$ .以原点为初始位姿,跟踪一个半径为2的圆.轨迹跟踪的实验结果如图5(c)和图5(d)所示.实验结果显示本文的方法相较于已有方法可获得更小的跟踪误差,可获得更好的轨迹跟踪效果.

### 4 结论

针对非完整轮式移动机器人的镇定与跟踪控制问题,本文提出单个时变控制器来解决WMRs的点镇定和轨迹跟踪问题,从而能够有效避免复杂的计算量以及多个控制器之间的切换.一方面,针对轨迹跟踪问题,即在持续激励情形下,所设计的控制器能够使机器人跟踪给定的期望轨迹;另一方面,针对点镇定问题,即在非持续激励的情形下,所设计的控制器能够自主且稳定地到达设定点.通过Lyapunov函数证明了所提出的控制器能够使被控对象渐近收敛并跟踪到期望点或期望的轨迹动态.仿真和实验结果验证了该控制器的有效性.后续工作考虑将所提出的控制器用于动力学控制器的设计,用于解决WMRs的外部扰动及系统模型的不确定性.

### 参考文献(References)

[1] Brockett R. Asymptotic stability and feedback stabilization[C]. Differential Geometric Control

Theory. Boston, 1983: 181-191.  
 [2] Khalaji A K, Ali A Moosavian S. Switching control of a tractor-trailer wheeled robot[J]. International Journal of Robotics and Automation, 2015, 30(2): 1-9.  
 [3] Zhang Y H, Zhao X W, Tao B, et al. Point stabilization of nonholonomic mobile robot by Bézier smooth subline constraint nonlinear model predictive control[J]. ASME Transactions on Mechatronics, 2021, 26(2): 990-1001.  
 [4] Fabregas E, Farias G, Aranda-Escolastico E, et al. Simulation and experimental results of a new control strategy for point stabilization of nonholonomic mobile robots[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(8): 6679-6687.  
 [5] He X D, Geng Z Y. Arbitrary point-to-point stabilization control in specified finite time for wheeled mobile robots based on dynamic model[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 97(2): 937-954.  
 [6] Nuño E, Loria A, Hernández T, et al. Distributed consensus-formation of force-controlled nonholonomic robots with time-varying delays[J]. Automatica, 2020, 120: 109114.  
 [7] Aye Y Y, Watanabe K, Maeyama S, et al. Invariant manifold-based stabilizing controllers for nonholonomic mobile robots[J]. Artificial Life and Robotics, 2015, 20(3): 276-284.  
 [8] Chen X H, Jia Y M, Matsuno F. Tracking control for differential-drive mobile robots with diamond-shaped

- input constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2014, 22(5): 1999-2006.
- [9] Panteley E, Loria A, Teel A. Relaxed persistency of excitation for uniform asymptotic stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(12): 1874-1886.
- [10] Mu J Q, Yan X G, Spurgeon S K, et al. Generalized regular form based SMC for nonlinear systems with application to a WMR[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(8): 6714-6723.
- [11] Wang B, Zhang Y M, Zhang W. A composite adaptive fault-tolerant attitude control for a quadrotor UAV with multiple uncertainties[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2022, 35(1): 81-104.
- [12] Guo Y J, Yu L, Xu J M. Robust finite-time trajectory tracking control of wheeled mobile robots with parametric uncertainties and disturbances[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2019, 32(5): 1358-1374.
- [13] 王雪闯, 王会明, 赵振华. 基于改进型积分终端滑模控制方法的移动机器人轨迹跟踪设计与实验[J]. 控制与决策, 2023, 38(10): 2881-2887.  
(Wang X C, Wang H M, Zhao Z H. Trajectory tracking design and experiment of mobile robot based on an improved integral terminal sliding mode control approach[J]. Control and Decision, 2023, 38(10): 2881-2887.)
- [14] Chen G D, Yao D Y, Zhou Q, et al. Distributed event-triggered formation control of USVs with prescribed performance[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2022, 35(3): 820-838.
- [15] 王童, 李鹭, 宋海萃, 等. 基于分层深度强化学习的移动机器人导航方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 2799-2807.  
(Wang T, Li A, Song H L, et al. Navigation method for mobile robot based on hierarchical deep reinforcement learning[J]. Control and Decision, 2022, 37(11): 2799-2807.)
- [16] 刘宜成, 熊宇航, 杨海鑫. 基于RBF神经网络的多关节机器人固定时间滑模控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(11): 2790-2798.  
(Liu Y C, Xiong Y H, Yang H X. Fixed-time sliding mode control of multi-joint robot based on RBF neural network[J]. Control and Decision, 2022, 37(11): 2790-2798.)
- [17] Sun W C, Tang S Y, Gao H J, et al. Two time-scale tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2016, 24(6): 2059-2069.
- [18] Wang Y N, Miao Z Q, Zhong H, et al. Simultaneous stabilization and tracking of nonholonomic mobile robots: A Lyapunov-based approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(4): 1440-1450.
- [19] Li J W. Adaptive tracking and stabilization of nonholonomic mobile robots with input saturation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(11): 6173-6179.
- [20] Lee T C, Song K T, Lee C H, et al. Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2001, 9(2): 305-318.
- [21] Wang Z P, Li G B, Chen X Z, et al. Simultaneous stabilization and tracking of nonholonomic WMRs with input constraints: Controller design and experimental validation[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(7): 5343-5352.

## 作者简介

李丽珍(1996—), 女, 硕士, 从事自主机器人控制与决策的研究, E-mail: zhenvae@foxmail.com;

程松松(1989—), 男, 副教授, 硕士生导师, 从事多智能体系统的优化与决策、自适应控制等研究, E-mail: sscheng@ahu.edu.cn;

樊渊(1983—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络化系统理论、机器人控制等研究, E-mail: yuanf@ahu.edu.cn.