



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



非匹配条件下非线性系统的指定时间二阶滑模控制

石尚, 张国胜, 闵惠芳

引用本文:

石尚,张国胜,闵惠芳. 非匹配条件下非线性系统的指定时间二阶滑模控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(9): 3043–3051.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0243>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制

Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation

控制与决策. 2021, 36(5): 1078–1086 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0820>

线控转向系统的自适应高阶滑模控制

Adaptive higher-order sliding mode control for SbW system

控制与决策. 2021, 36(6): 1529–1536 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1526>

磁悬浮开关磁阻电机的自适应终端滑模控制

Adaptive terminal sliding mode control of bearingless switched reluctance motor

控制与决策. 2021, 36(6): 1449–1456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1064>

多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

控制与决策. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

基于高阶滑模速度控制器的异步电机模型预测转矩控制

A model predictive torque control for induction motor based on high order sliding mode speed controller

控制与决策. 2021, 36(4): 953–958 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0650>

非匹配条件下非线性系统的指定时间二阶滑模控制

石尚^{1,2}, 张国胜¹, 闵惠芳^{3†}

(1. 河海大学 能源与电气学院, 南京 211100; 2. 东南大学 自动化学院, 南京 210096;
3. 南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘要: 针对不确定非线性系统设计一种新型指定时间二阶滑模 (SOSM) 控制器. 首先, 通过选取新的滑模变量, 将标准的二阶滑模积分链系统推广至带有非匹配项的新二阶滑模动态系统, 新滑模动态系统的使用可以有效减少传统滑模系统控制通道中的不确定性; 其次, 通过使用时变放缩函数的概念, 在非匹配项的增益函数上界未知的情况下, 针对新的滑模动态系统提出一种基于切换策略的指定时间 SOSM 控制算法. 所提出的控制器从一个有限时间域的 SOSM 控制器切换到传统的有限时间 SOSM 控制器, 前者可以保证滑模变量在有限时间域内实现指定时间收敛到零, 且收敛时间不依赖于系统的初始条件; 后者可以保证滑模变量此后始终保持在零. 最后, 对闭环系统的指定时间稳定性进行了分析, 通过仿真对比验证了理论结果的有效性.

关键词: 指定时间控制; 二阶滑模; 非线性系统; 非匹配项; 滑模控制; 不确定系统

中图分类号: TP13 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0243

引用格式: 石尚, 张国胜, 闵惠芳. 非匹配条件下非线性系统的指定时间二阶滑模控制 [J]. 控制与决策, 2024, 39(9): 3043-3051.

Prescribed-time SOSM control of nonlinear systems subject to mismatched terms

SHI Shang^{1,2}, ZHANG Guo-sheng¹, MIN Hui-fang^{3†}

(1. College of Energy and Electrical Engineering, Hohai University, Nanjing 211100, China; 2. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China; 3. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: A novel prescribed-time second-order sliding mode (SOSM) controller is proposed for uncertain nonlinear systems. Firstly, by selecting the new sliding mode variable, the standard SOSM integral chain system is extended to a new SOSM dynamic system with mismatched terms, and the use of the new sliding mode system can effectively reduce the uncertainties in input channel. Secondly, by using the concept of time-varying scaling function, a prescribed-time SOSM control algorithm based on switching strategy is proposed for the new sliding mode system when the upper limit of the gain function of the mismatched item is unknown. The proposed controller switches from a finite time domain SOSM controller to the traditional finite time SOSM controller, the former can ensure that the sliding mode variable converges to zero at a prescribed time in the finite time domain, and the convergence time does not depend on the initial conditions of the system, and the latter can ensure that the sliding mode variable remains at zero thereafter. Finally, the prescribed time stability of the closed-loop system is analyzed. The theoretical results are verified by simulation comparison.

Keywords: prescribed-time control; second-order sliding mode; nonlinear systems; mismatched terms; sliding mode control; uncertain systems

0 引言

滑模控制 (SMC) 因其鲁棒性好、物理实现简单等优点, 被广泛用于处理不确定非线性系统^[1-2]. 然而, 传统一阶滑模控制的抖振问题及其对系统相对阶的要求限制了其实际应用范围. 为了克服传统滑模

控制的缺陷, 人们提出了许多方法, 如基于观测器的方法和边界层方法等^[3-4], 但这些方法都有其自身缺陷. 高阶滑模控制技术在保留了传统滑模控制优点的同时, 成功克服了传统滑模控制的应用障碍^[5]. 二阶滑模控制 (SOSM) 作为最简单和最特殊的高阶滑

收稿日期: 2023-03-05; 录用日期: 2023-08-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62373135, 62203221); 江苏省自然科学基金项目 (BK20200520, BK20220943); 中国博士后科学基金项目 (2022M710682); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (B220202004).

†通讯作者. E-mail: jiejie1043640772@126.com.

模控制,在过去的几十年间受到了大量的关注,产生了诸如twisting算法、super-twisting算法、次最优算法等众多性能优越的SOSM算法^[6-8]。

闭环系统的收敛时间是衡量控制器性能的重要指标。传统的SOSM控制只能实现闭环系统的有限时间稳定,其收敛时间取决于系统初始条件,并且会随着初始值的增加而增加。为了克服这一缺点,文献[9]提出了固定时间稳定性的概念。与有限时间稳定性相比,固定时间稳定性的收敛不受系统初始条件的影响,因此受到越来越多的关注^[10-13]。近年来,关于固定时间SOSM的研究产生了许多积极的成果。文献[14]将传统的twisting控制算法推广至固定时间收敛情况,这种算法的优点在于控制器的设计不需要测量滑模变量的精确值,只需要他们的符号信息用以反馈控制,因此更容易设计和实现。文献[15]提出了一种新的固定时间super-twisting控制算法,该算法不需要知道滑模变量的导数信息,且控制器是完全连续的,因此得到了大量应用。此外,为了满足系统的齐次性,大部分已有的SOSM算法需要假设系统的不确定项具有一个已知的常数上界。然而在实际应用中,不确定项往往依赖于系统的状态,其上界也会随状态的变化而变化。因此,将常数上界推广至函数上界更为合理。针对这一问题,文献[16-17]提出了新型可变增益SOSM控制器,解决了函数限定条件下非线性系统的固定时间二阶滑模控制问题。

可以发现,传统的SOSM控制是针对标准二阶滑模系统的,标准二阶滑模系统是通过滑模变量直接求二阶导数获得的。然而,滑模变量的一阶导数通常含有一些有用信息,当直接对滑模变量求二阶导数时,这些有用信息将被直接传导至输入通道,从而导致大的输入通道存在不确定性。注意到,大的输入通道的不确定项意味着在设计控制器时,需要选取更大的控制器增益,从而加剧系统的抖振效应。为了解决这一问题,文献[18]首次将滑模变量的一阶导数分为两部分,即新的已知变量和未知非匹配不确定项,这样传统的滑模系统将变为受非匹配条件影响的新滑模系统,并针对新滑模系统设计了SOSM控制算法。在之后的文献[19]中,文献[18]中的结果被推广至高阶滑模的情况。然而,文献[18-19]中的算法仅能实现滑模面的有限时间收敛。文献[20]针对非匹配条件影响下的新二阶滑模系统,设计了基于切换策略的固定时间SOSM算法。之后的文献[21]将固定时间SOSM算法推广至高阶滑模的情况。在最近的文献[22]中,作者在考虑输出约束对系统影响的前提

下,进一步研究了输出约束非线性系统的固定时间高阶滑模控制问题。可以发现,现有的关于非匹配条件影响下的SOSM和高阶滑模控制器设计,都需要对非匹配项施加一个严格的已知增长假设条件。然而,在很多情况下,尽管系统的未知参数或不确定项有界,但其上界往往很难精确获得。在这种情况下,考虑具有未知增益函数的非匹配项影响下的SOSM控制问题具有重要的实际意义。据作者所知,这仍是一个待解决的问题,也是本文的主要研究动机之一。

此外,对于战术导弹制导^[23]等一些特殊系统,通常需要在给定时间内实现对目标的控制。因此,如何设计在指定时间内收敛且收敛时间不依赖于系统初始条件的控制器,具有重要的理论和实际意义。文献[24]利用时变缩放函数的概念,针对非线性系统提出了一种全新的指定时间控制方法,结果表明该控制器只需要调节放缩函数中的参数 T 即可实现收敛时间不依赖于系统初始条件的指定时间输出调节控制。文献[25]给出了一个新任意指定时间收敛的Lyapunov稳定性定理,基于此定理给出了非线性系统的指定时间控制器设计过程。自此以后,关于指定时间控制的相关文献被大量报道,并在过去的几年间产生了许多积极的结果^[26-27]。

尽管关于指定时间控制的结果有很多,但是关于指定时间滑模控制的研究却相对较少。文献[28]针对二阶受扰非线性系统,提出了一种基于扩张状态观测器的指定时间SMC算法。在最近的文献[29]中,针对具有扰动的 n 阶积分链系统,提出了一种指定时间收敛的新型终端SMC算法。然而,以上指定时间SMC算法均需假设系统中的不确定项具有一个已知的常数上界。根据前文分析,将不确定项的常数上界推广至函数上界更加合理。然而,当将常数上界推广至函数上界时,文献[28-29]中的算法将不再适用。另一方面,文献[28-29]中的算法都是传统的一阶滑模算法。据作者所知,现有文献中关于指定时间SOSM控制的结果鲜有报道。当进一步考虑系统受到具有未知增益函数的非匹配项的影响时,问题将变得更加复杂。如何解决这一问题,也是本文的另一个重要研究动机。

基于以上分析,本文针对非匹配条件影响下的非线性系统,提出新的指定时间SOSM控制算法,与已有算法相比主要贡献如下:

- 1) 考虑了具有更一般假设条件的非匹配SOSM系统。与已知文献中的SOSM算法不同,本文将施加在非匹配项上的已知增长假设条件放宽到未知,拓宽

了算法的应用范围.

2) 针对非匹配项具有未知增益函数的 SOSM 系统, 提出一种基于切换策略的指定时间 SOSM 算法. 理论分析表明, 所提出算法能够实现滑模面的不依赖于系统初始条件的任意指定时间收敛.

1 问题描述

考虑以下单输入单输出不确定非线性系统:

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad s = s(t, x). \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ 为状态向量和控制输入; $a(t, x)$ 和 $b(t, x)$ 为光滑非线性函数. 假设滑模变量 s 和 $\dot{s} = ds/dt$ 已知, 滑模变量相对于系统输出的相对阶为 2, 且系统的解为 Filippov 平均意义下的解^[30]. 由此可获得输入输出关系如下:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= h_1(t, x) + g_1(t, x)u. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $s_1 = s, s_2 = \dot{s}; h_1(t, x) = \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial s_2}{\partial x}a$ 和 $g_1(t, x) = \frac{\partial s_2}{\partial x}b$ 为输入通道不确定项, 满足以下假设.

假设 1 存在已知常数 $g_1^* > 0, \bar{h}_1^* \geq 0$ 使得 $g_1(t, x) \geq g_1^*, |h_1(t, x)| \leq \bar{h}_1^*$.

针对满足假设 1 的系统 (2), 学者们已经设计出许多二阶滑模控制器. 但是需要注意的是, 系统 (2) 是通过直接对 s 取二阶导数所得的, 这种直接求导数的方式会带来一些问题, 比如滑模变量的一阶导数 $\dot{s} = \partial s/\partial t + (\partial s/\partial x)\dot{x}$ 中通常会包含一些有用项或未知项, 直接对 s 取二阶导数可能会使得这些有用项或者未知项直接传导进输入通道, 从而带来极大的输入通道不确定性. 为了克服这个问题, 选取 $s_1 = s, s_2$ 为新的滑模变量, 将 $f_1(t, x) = \partial s/\partial t + (\partial s/\partial x)\dot{x} - \lambda_1(t, x)s_2$ 视为未知的非匹配项, 因此滑模变量的一阶导数可以重新写为 $\dot{s}_1 = \lambda_1(t, x)s_2 + f_1(t, x)$. 通过在一阶导数通道中将有用项保留为非匹配项 $f_1(t, x)$, 输入通道不确定性将大大降低. 所以可进一步得到一个具有未知非匹配项的更一般的 SOSM 系统

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \lambda_1(t, x)s_2 + f_1(t, x), \\ \dot{s}_2 &= h(t, x)u + g(t, x). \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\lambda_1(t, x), f_1(t, x), h(t, x), g(t, x)$ 为未知非线性函数. 为了方便后续控制器设计, 给出以下假设.

假设 2 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_1 &\leq \lambda_1(t, x) \leq \bar{\lambda}_1, \quad h(t, x) \geq \underline{h}, \\ g(t, x) &\leq \bar{g}(x), \quad f_1(t, x) \leq \rho_1(t, s_1)|s_1|. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\underline{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1, \underline{h}$ 均为未知正常数; $\bar{g}(x)$ 为已知的非负函数. 非匹配项的增益函数 $\rho_1(t, s_1)$ 的上界不要求精确已知, 但是满足以下条件:

$$\rho_1(t, s_1) \leq d_1(t)\varrho_1(s_1). \quad (5)$$

其中: $\varrho_1(s_1) \geq 0$ 是一个已知的连续函数, $d_1(t)$ 有界但上界 d_{\max} 不要求已知.

注 1 虽然在文献 [18-20] 中也研究了关于受非匹配项影响的高阶滑模控制器设计, 但是所有的研究均要求增益函数 $\rho_1(t, s_1)$ 或其上界是提前精确已知的, 并且现有结果仅能实现滑模变量的有限时间或固定时间收敛.

本文的控制目标为: 在非匹配项具有未知增益函数的情况下, 针对系统 (3) 设计一个新的 SOSM 控制器, 使得 s_1 和 s_2 能够在不依赖于系统初始状态的任意指定时间 T 内收敛到零, 且此后都保持在零.

2 设计方法及主要结果

2.1 设计方法

控制器设计的基础是使用文献 [24] 中介绍的时变缩放函数, 该函数 $\mu_1(t, T) : [0, T) \mapsto \mathbb{R}^+$ 如下所示:

$$\mu_1(t) = \frac{T}{T-t}, \quad (6)$$

其中 T 是给定的任意指定时间. 显然该函数具有如下性质: $\mu_1(0) = 1, \mu_1(T) = +\infty$. 接下来, 定义

$$\mu(t) = \mu_1(t)^m = \frac{T^m}{(T-t)^m}, \quad (7)$$

其中 m 为正整数. 对于函数 $\mu(t)$, 除了 $\mu(0) = 1, \mu(T) = +\infty$ 性质外可以发现, 通过选取正整数 $m \geq 1$ 可以实现 $\mu(t)$ 比 $\mu_1(t)$ 更快的增长. 为了设计指定时间 SOSM 控制器, 考虑以下时变坐标变换:

$$\omega_i = \mu^{3-i}s_i, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

注意到式 (7) 中定义的 μ 是一个单调递增函数, 且当 $t \rightarrow T$ 时 μ 将趋向于无穷大 (T 是任意给定的指定时间). 那么式 (8) 的逆变换为

$$s_i = \nu^{3-i}\omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

其中: $\nu = \mu^{-1}$, 容易发现当 $t \rightarrow T$ 时 ν^{3-i} 将会单调递减到零. 因此, 可以由式 (9) 得到, 如果 ω_i 是有界的, 则当 $t \rightarrow T$ 时有 $s_i \rightarrow 0$, 为了实现控制目标, 只需要设计控制器使得:

- 1) 当 $0 \leq t < T$ 时, 变量 ω_i 可以保持有界;
- 2) 当 $t \geq T$ 时, $s_i \equiv 0$ 成立.

2.2 主要结果

定义 $|x|^\alpha = |x|^\alpha \text{sign}(x)$, 指定时间 SOSM 控制器以如下定理形式给出.

定理1 控制器 u 设计为

$$u = u_1\delta(t) + u_2(1 - \delta(t)). \quad (10)$$

其中: δ 为切换函数形式, 即

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t < T; \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \quad (11)$$

T 为任一指定时间. u_1 设计如下:

$$u_1 = -\frac{\bar{g}(x)}{h} \text{sign}(\sigma_2(\omega_2)) - \check{\alpha}_2(\cdot)\sigma_2(\omega_2). \quad (12)$$

其中: $\sigma_2(\omega_2) = \omega_2 + \alpha_1(\cdot)\omega_1, \omega_2 = [\omega_1, \omega_2]^T$, 且 $\alpha_1(\omega_1)$ 和 $\check{\alpha}_2(\omega_1)$ 为待设计的增益函数. u_2 设计如下:

$$u_2 = -\frac{\bar{g}(x)}{h} \text{sign}(\phi(s_2)) - \check{\beta}_2[\phi(s_2)]^{\frac{r_3}{a}}. \quad (13)$$

其中: $\phi(s_2) = [s_2]^{\frac{a}{r_2}} + \beta_1[s_1]^{\frac{a}{r_1}}$, 参数 $a, r_1, r_2 > 0$ 且 r_i 满足 $r_3 = r_2 + \tau, r_2 = r_1 + \tau, \tau \in [-r_1/2, 0)$, 参数 $\beta_1, \check{\beta}_2$ 分别为待设计的增益常数. 对于闭环系统 (3)~(10), 如果假设2成立, 则 $s_i (i = 1, 2)$ 可以在任意指定时间 T 内收敛到零, 并且以后时间都保持在零, 即 $\lim_{t \rightarrow T} s = 0$, 且 $s_i \equiv 0 (i = 1, 2)$ 对于 $\forall t \geq T$ 成立.

3 稳定性分析

下面介绍稳定性分析需要用到的引理.

引理1 以下不等式成立:

$$ab \leq \lambda a^2 + \frac{b^2}{4\lambda}, \quad (14)$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 且 $a, b \in \mathbb{R}$ (由Young不等式得到).

引理2^[31] 如果 x, y 是实变量, 则对于任意常数 p 满足 $p_1 > 0$ 和 $0 < p_2 \leq 1$, 有

$$|[x]^{p_1 p_2} - [y]^{p_1 p_2}| \leq 2^{1-p_2} |[x]^{p_1} - [y]^{p_1}|^{p_2}. \quad (15)$$

引理3^[32] 如果 x, y 是实变量, $c, d > 0$ 为正常数, 则对于任意给定的函数 $\gamma > 0$, 有

$$|x^c||y^d| \leq \frac{c}{c+d} \gamma |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-\frac{c}{d}} |y|^{c+d}. \quad (16)$$

引理4^[32] 如果 $\forall x_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为实数变量, 则对于任意实数 p 满足 $0 < p < 1$, 有

$$\begin{aligned} (|x_1| + \dots + |x_n|)^p &\leq |x_1|^p + \dots + |x_n|^p, \\ (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq n^{\frac{1}{p}-1} (|x_1| + \dots + |x_n|). \end{aligned} \quad (17)$$

接下来分情形 $0 \leq t < T$ 和情形 $t \geq T$ 两部分进行讨论.

3.1 Case1 ($0 \leq t < T$)

当 $0 \leq t < T$ 时, 有 $u = u_1$, 使用式(8)的时变坐标变换, 系统(3)将会转变为

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu \left(\lambda_1 \omega_2 + 2 \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} \omega_1 + \mu f_1 \right), \\ \dot{\omega}_2 &= \mu \left(h(t, x)u + g(t, x) + \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} \omega_2 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

对于 $\forall t \in [0, T)$, 控制器 $u = u_1$ 可以保证 ω_1, ω_2 有界. 具体分析如下.

step 1: 选取Lyapunov函数 $V_1(\omega_1) = \sigma_1^2/2$, 其中 $\sigma_1 = \omega_1 - \omega_1^*$ 且 $\omega_1^* = 0$. 沿系统(18)对 V_1 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \\ &\mu \lambda_1 \sigma_1 \omega_2 + 2\mu \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} \sigma_1^2 + \mu^2 \sigma_1 f_1 \leq \\ &\mu \lambda_1 \sigma_1 \omega_2^* + \mu \frac{2m}{T} \sigma_1^2 + \mu^2 \sigma_1 f_1 + \mu \lambda_1 \sigma_1 \sigma_2, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 ω_2^* 是待设计的虚拟控制器, 且有

$$\sigma_2 = \omega_2 - \omega_2^*. \quad (20)$$

根据式(14)以及假设2可以得到

$$\mu^2 \sigma_1 f_1 \leq \mu d_1 \varrho_1 \sigma_1^2 \leq \mu \lambda \varrho_1^2 \sigma_1^2 + \mu \frac{d_1^2}{4\lambda}. \quad (21)$$

设计虚拟控制器为

$$\omega_2^* = -\alpha_1(\omega_1)\sigma_1, \quad (22)$$

其中 $\alpha_1(\omega_1)$ 是一个 C^1 函数, 满足

$$\alpha_1(\omega_1) \geq \frac{2k_0 + \frac{2m}{T} + \lambda \varrho_1^2 \sigma_1^2}{\lambda_1}, \quad (23)$$

且 $k_0 > 0$. 将式(21)和(22)代入 \dot{V}_1 可以进一步得到

$$\dot{V}_1 \leq -2\mu k_0 \sigma_1^2 + \mu \delta_1 + \mu \lambda_1 \sigma_1 \sigma_2, \quad (24)$$

其中 $\delta_1 = d_1^2/4\lambda$.

step 2: 选取Lyapunov函数 $V_2(\omega_2) = V_1 + \sigma_2^2/2$, 沿系统(18)对 V_2 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \sigma_2 \dot{\omega}_2 - \sigma_2 \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \omega_1} \dot{\omega}_1 \leq \\ &-2\mu k_0 \sigma_1^2 + \mu \delta_1 + \mu \lambda_1 \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \omega_2 \sigma_2 + \\ &\mu \sigma_2 (h(t, x)u + g(t, x)) - \sigma_2 \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \omega_1} \dot{\omega}_1. \end{aligned} \quad (25)$$

接下来对式(25)中的部分项进行估计.

首先, 对 $\mu \lambda_1 \sigma_1 \sigma_2$ 进行估计. 根据假设2以及式(14)可得

$$\mu \lambda_1 \sigma_1 \sigma_2 \leq \mu \bar{\lambda}_1 \sigma_1 \sigma_2 \leq \mu \frac{k_0}{3} \sigma_1^2 + \mu c_{2,1} \sigma_2^2, \quad (26)$$

其中 $c_{2,1}(k_0) = 3\bar{\lambda}_1^2/4k_0$.

其次, 对 $\frac{\dot{\mu}}{\mu} \omega_2 \sigma_2$ 进行估计. 根据式(14)可得

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \omega_2 \sigma_2 &\leq \mu \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} |\sigma_2| (\alpha_1 |\sigma_1| + |\sigma_2|) \leq \\ &\mu \frac{k_0}{3} \sigma_1^2 + \mu c_{2,2} \sigma_2^2, \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $c_{2,2}(\omega_1) = \frac{3m^2}{4T^2 k_0} \alpha_1^2 + \frac{m}{T}$.

然后, 对 $\sigma_2 \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \omega_1} \dot{\omega}_1$ 进行估计. 由 ω_2^* 定义可得

$$\sigma_2 \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \omega_1} \dot{\omega}_1 \leq \bar{\alpha}_1(\omega_1) |\sigma_2| |\dot{\omega}_1|,$$

其中 $\bar{\alpha}_1(\omega_1) = \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1} \sigma_1 + \sigma_1 \right|$. 又由 $|\omega_2| = |\omega_2^* + \sigma_2| \leq$

$\alpha_1|\sigma_1| + |\sigma_2|$, 容易得到

$$\begin{aligned} \sigma_2 \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \omega_1} \dot{\omega}_1 &\leq \\ \mu \bar{\alpha}_1 |\sigma_2| &\left(\frac{2\dot{\mu}}{\mu^2} |\omega_1| + \bar{\lambda}_1 |\omega_2| + d_1 \varrho_1 |\omega_1| \right) \leq \\ \mu \bar{\alpha}_1 |\sigma_2| &\left(\left(\frac{2m}{T} + \bar{\lambda}_1 \alpha_1 \right) |\sigma_1| + \bar{\lambda}_1 |\sigma_2| + d_1 \varrho_1 |\sigma_1| \right) \leq \\ \mu \bar{\lambda}_1 \bar{\alpha}_1 \sigma_2^2 + \mu \bar{\alpha}_1 |\sigma_1| |\sigma_2| &+ \mu d_1 \bar{\alpha}_1 \varrho_1 |\sigma_1| |\sigma_2|, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\tilde{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1(2m/T + \bar{\lambda}_1 \alpha_1)$. 由引理1容易得到

$$\begin{aligned} \mu \tilde{\alpha}_1 |\sigma_1| |\sigma_2| &\leq \mu \frac{k_0}{3} \sigma_1^2 + \mu \tilde{c}_{2,3} \sigma_2^2, \\ \mu d_1 \bar{\alpha}_1 \varrho_1 |\sigma_1| |\sigma_2| &\leq \mu \tilde{c}_{2,3} \sigma_2^2 + \mu \frac{d_1^2}{4\lambda}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\tilde{c}_{2,3}(\omega_1) = 3\tilde{\alpha}_1/(4k_0)$ 和 $\tilde{c}_{2,3}(\omega_1) = \lambda \bar{\alpha}_1^2 \varrho_1^2 \sigma_1^2$ 均为 C^1 函数. 将式(29)代入(28)可得

$$\sigma_2 \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \omega_1} \dot{\omega}_1 \leq \mu \frac{k_0}{3} \sigma_1^2 + \mu c_{2,3} \sigma_2^2 + \mu \frac{d_1^2}{4\lambda}, \quad (30)$$

其中 $c_{2,3}(\omega_1) = \bar{\lambda}_1 \bar{\alpha}_1 + \tilde{c}_{2,3} + \tilde{c}_{2,3}$.

将式(26), (27), (30)代入(25)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\mu k_0 \sigma_1^2 + \mu(c_{2,1} + c_{2,2} + c_{2,3})\sigma_2^2 + \\ &\mu \sigma_2 (h(t, x)u + g(t, x)) + \mu \delta_2, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\delta_2 = \delta_1 + d_1^2/(4\lambda)$. 根据式(10), 当 $0 \leq t < T$ 时, 控制器为

$$u = u_1 = -\frac{\bar{g}(x)}{h} \text{sign}(\sigma_2) - \check{\alpha}_2(\omega_1)\sigma_2, \quad (32)$$

由 σ_i, ω_i^* 定义可知, $\sigma_2(\omega_2) = \omega_2 + \check{\alpha}_1(\omega_1)\omega_1$, 选取 $\check{\alpha}_2(\omega_1)$ 使其满足

$$\check{\alpha}_2(\omega_1) \geq \frac{k_0 + c_{2,1} + c_{2,2} + c_{2,3}}{h}. \quad (33)$$

将式(32)代入式(31)可得

$$\dot{V}_2 \leq -\mu k_0 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \mu \delta_{\max}, \quad (34)$$

其中 δ_{\max} 是 δ_2 的上界. 然后由 V_2 定义及式(34)可得

$$\dot{V}_2 \leq -2\mu k_0 V_2 + \mu \delta_{\max}. \quad (35)$$

通过解以上微分不等式有

$$\begin{aligned} V_2(t) &\leq e^{-2k_0 \int_0^t \mu(\tau) d\tau} V_2(0) + \\ &\delta_{\max} \int_0^t e^{-2k_0 \int_\tau^t \mu(s) ds} \mu(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

对不等式中的积分项 $\int_0^t \mu(\tau) d\tau$ 求解可得

$$\int_0^t \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{T}{1+m} (\mu_1(t)^{m-1} - 1), & m \geq 2; \\ T \ln \frac{T}{T-t}, & m = 1. \end{cases} \quad (37)$$

对式(36)中的最后1项进行估计

$$\begin{aligned} &\delta_{\max} \int_0^t e^{-2k_0 \int_\tau^t \mu(s) ds} \mu(\tau) d\tau \leq \\ &\delta_{\max} \int_0^t e^{2k_0(-\int_0^t \mu(s) ds + \int_0^\tau \mu(s) ds)} \mu(\tau) d\tau = \\ &\delta_{\max} e^{-2k_0 \int_0^t \mu(s) ds} \int_0^t e^{2k_0 \int_0^\tau \mu(s) ds} d\left(\int_0^\tau \mu(s) ds\right) = \\ &\delta_{\max} e^{-2k_0 \int_0^t \mu(s) ds} \frac{1}{2k_0} e^{2k_0 \int_0^\tau \mu(s) ds} \Big|_0^t = \\ &\delta_{\max} e^{-2k_0 \int_0^t \mu(s) ds} \frac{1}{2k_0} (e^{2k_0 \int_0^t \mu(s) ds} - 1) = \\ &\frac{\delta_{\max}}{2k_0} (1 - e^{-2k_0 \int_0^t \mu(s) ds}) \leq \frac{\delta_{\max}}{2k_0}. \end{aligned} \quad (38)$$

将式(37), (38)代入(36)可得

$$V_2(t) \leq \zeta(t)^{2k_0} V(0) + \frac{\delta_{\max}}{2k_0}. \quad (39)$$

其中

$$\zeta(t) = \begin{cases} e^{\frac{T}{1+m}(1-\mu_1(t)^{m-1})}, & m \geq 2; \\ e^{-T \ln \frac{T}{T-t}}, & m = 1. \end{cases} \quad (40)$$

由式(40)易得 $\zeta(0) = 1, \zeta(T) = 0$. 因此易得 V_2 是有界的, 因此 σ_1, σ_2 和 ω_1, ω_2 在 $[0, T]$ 均是有界的. 由式(9)可知: 若 ω_1, ω_2 有界, 则对于 $\forall t \in [0, T]$, 有 $\lim_{t \rightarrow T} s = 0$ 成立.

3.2 Case 2 ($t \geq T$)

当 $t \geq T$ 时, 有 $u = u_2$, 系统(3)可以写成

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \lambda_1(t, x)s_2 + f_1(t, x), \\ \dot{s}_2 &= h(t, x)u_2 + g(t, x). \end{aligned} \quad (41)$$

需要注意的是, 本文中非匹配项 $f_1(t, x)$ 的增益函数具有未知的上界. 所以, 根据文献[19]设计的控制器 u_2 在这种情况下不能保证系统(41)的有限时间稳定性. 幸运的是, 由第1步的分析可知 $\lim_{t \rightarrow T} s = 0$, 对于 $\forall t \in [0, T]$ 成立. 又由 s_1, s_2 的连续性可得: 当 $t = T$ 时, 有 $s_1 = s_2 = 0$, 进一步可得 $f_1(t, x) = 0$ 在 $t = T$ 成立. 以上分析表明系统(41)中的非匹配项在 $t = T$ 时消失, 所以系统(41)在 $t = T$ 时可以进一步简化为

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \lambda_1(t, x)s_2, \\ \dot{s}_2 &= h(t, x)u_2 + g(t, x). \end{aligned} \quad (42)$$

由控制器 $u = u_2$ 可以保证 $s_i \equiv 0 (i = 1, 2)$ 对于 $\forall t \geq T$ 成立. 具体分析如下.

step 1: 选取 C^1 正定的 Lyapunov 函数 $U_1(s_1)$, 形式如下:

$$U_1(s_1) = \int_{s_1^*}^{s_1} [|\theta|^{\frac{a}{r_1}} - |s_1^*|^{\frac{a}{r_1}}]^{\frac{2\rho-r_2}{a}} d\theta. \quad (43)$$

其中: $s_1^* = 0, \rho \geq a \geq r_1 > 0$. 定义 $\phi_1 = |s_1|^{\frac{a}{r_1}}$, 易证

$$\begin{aligned} |U_1(s_1)| &\leq |s_1 - s_1^*| |\phi_1|^{\frac{2\rho-r_2}{a}} \leq \\ |s_1| |\phi_1|^{\frac{2\rho-r_2}{a}} &\leq 2|\phi_1|^{\frac{2\rho-\tau}{a}}. \end{aligned} \quad (44)$$

$U_1(s_1)$ 在系统(42)上的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(s_1) = & \lambda_1(\cdot)[\phi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}} s_2^* + \lambda_1(\cdot)[\phi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}} (s_2 - s_2^*). \quad (45) \end{aligned}$$

其中: $s_2^* = -\beta_1[\phi_1]^{\frac{r_2}{a}}$ 是待设计的虚拟控制器, β_1 满足

$$\beta_1 \geq 2\beta_0/\lambda_1, \quad (46)$$

且 $\beta_0 > 0$ 为正常数. 结合式(45)进一步可得

$$\dot{U}_1(s_1) \leq -2\beta_0|\phi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + \lambda_1(\cdot)[\phi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}} (s_2 - s_2^*). \quad (47)$$

step 2: 定义变量 $\phi_2 = [s_2]^{\frac{a}{r_2}} - [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}$ 和 C^1 正定的 Lyapunov 函数 $U_2(\bar{s}_2)$ 满足

$$\begin{aligned} U_2(\bar{s}_2) = & U_1(s_1) + W_2(\bar{s}_2), \\ W_2(\bar{s}_2) = & \int_{s_2^*}^{s_2} [|\theta|^{\frac{a}{r_2}} - [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}]^{\frac{2\rho-r_3}{a}} d\theta. \quad (48) \end{aligned}$$

由引理2可得

$$\begin{aligned} |W_2(\bar{s}_2)| \leq & |s_2 - s_2^*| |\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3}{a}} \leq \\ & |[s_2]^{\frac{a}{r_2} \times \frac{r_2}{a}} - [s_2^*]^{\frac{a}{r_2} \times \frac{r_2}{a}}| |\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3}{a}} \leq \\ & 2^{1-\frac{r_2}{a}} |\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3}{a}} \leq 2|\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3}{a}}. \quad (49) \end{aligned}$$

结合式(44), (49)可得

$$|U_2(\bar{s}_2)| \leq 2(|\phi_1|^{\frac{2\rho-r_3}{a}} + |\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3}{a}}). \quad (50)$$

由文献[32]可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_2} = & [\phi_2]^{\frac{2\rho-r_3}{a}}, \\ \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} = & \frac{2\rho-r_3}{a} \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1} \int_{s_2^*}^{s_2} [|\theta|^{\frac{a}{r_2}} - [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}]^{\frac{2\rho-r_3-a}{a}} d\theta. \quad (51) \end{aligned}$$

结合式(47), (51)可得

$$\begin{aligned} \dot{U}_2(\bar{s}_2) = & \dot{U}_1(s_1) + \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_2} \dot{s}_2 + \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} \dot{s}_1 \leq \\ & -2\beta_0|\phi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + \lambda_1(\cdot)[\phi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}} (s_2 - s_2^*) + \\ & [\phi_2]^{\frac{2\rho-r_3}{a}} (h(t, x)u_2 + g(t, x)) + \frac{\partial W_2(\cdot)}{\partial s_1} \dot{s}_1. \quad (52) \end{aligned}$$

下面对式(52)中的各项进行估计, 由引理2可得

$$\begin{aligned} |s_2| \leq & |s_2 - s_2^*| + |s_2^*| \leq \\ & 2^{1-\frac{r_2}{a}} |\phi_2|^{\frac{r_2}{a}} + \beta_1 |\phi_1|^{\frac{r_2}{a}}. \quad (53) \end{aligned}$$

首先对 $\lambda_1(\cdot)[\phi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}} (s_2 - s_2^*)$ 进行估计. 由引理2和引理3得

$$\begin{aligned} \lambda_1(\cdot)[\phi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}} (s_2 - s_2^*) \leq & \\ \bar{\lambda}_1 2^{1-\frac{r_2}{a}} |\phi_1|^{\frac{2\rho-r_2}{a}} |\phi_2|^{\frac{r_2}{a}} \leq & \end{aligned}$$

$$\frac{\beta_0}{2} |\phi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + b_{2,1} |\phi_2|^{\frac{2\rho}{a}}, \quad (54)$$

其中

$$b_{2,1} = 2^{1-\frac{r_2}{a}} \frac{r_2 \bar{\lambda}_1}{2\rho} \left(\frac{(2\rho-r_2)2^{1-\frac{r_2}{a}} \bar{\lambda}_1}{\rho\beta_0} \right)^{(2\rho-r_2)/r_2}.$$

其次, 对 $|\partial W_2(\bar{s}_2)/\partial s_1|$ 进行估计. 由引理2和式(51)可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} \right| \leq & \\ \frac{2\rho-r_3}{a} |s_2 - s_2^*| |\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3-a}{a}} \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1} \leq & \\ \frac{2\rho-r_3}{a} 2^{1-\frac{r_2}{a}} |\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3-a}{a}} \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1}. \quad (55) \end{aligned}$$

易证式(55)中 $\frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1}$ 满足

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1} \right| \leq & \left| \frac{\partial \beta_1 [s_1]^{\frac{a}{r_1}}}{\partial s_1} \right| \leq \\ \beta_1 \frac{a}{r_1} |\phi_1|^{1-\frac{r_1}{a}} \leq & \bar{\beta}_1 |\phi_1|^{1-\frac{r_1}{a}}, \quad (56) \end{aligned}$$

其中 $\bar{\beta}_1 = \beta_1 \frac{a}{r_1}$. 再由式(53)可得

$$\begin{aligned} |\dot{s}_1| \leq & \bar{\lambda}_1 (|s_2 - s_2^*| + |s_2^*|) \leq \\ 2^{1-\frac{r_2}{a}} \bar{\lambda}_1 |\phi_2|^{\frac{r_2}{a}} + & \bar{\lambda}_1 \beta_1 |\phi_1|^{\frac{r_2}{a}}. \quad (57) \end{aligned}$$

由式(55)~(57)可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} \dot{s}_1 \right| \leq & \\ \tilde{\beta}_1 |\phi_2|^{\frac{2\rho-r_3-a}{a}} |\phi_1|^{1-\frac{r_1}{a}} (|\phi_1|^{\frac{r_2}{a}} + & |\phi_2|^{\frac{r_2}{a}}) \leq \\ \frac{\beta_0}{2} |\phi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + b_{2,2} |\phi_2|^{\frac{2\rho}{a}}. \quad (58) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 = & \frac{2\rho-r_3}{a} 2^{1-\frac{r_2}{a}} \bar{\beta}_1 \max\{2^{1-\frac{r_2}{a}} \bar{\lambda}_1, \beta_1 \bar{\lambda}_1\}, \\ b_{2,2} = & \frac{2\rho-r_3-a}{2\rho} \tilde{\beta}_1 \left(\frac{2(a+\tau)\tilde{\beta}_1}{\rho\beta_0} \right)^{\frac{a+\tau}{2\rho-r_3-a}} + \\ & \frac{2\rho-a+r_1}{2\rho} \tilde{\beta}_1 \left(\frac{2(a-r_1)\tilde{\beta}_1}{\rho\beta_0} \right)^{\frac{a-r_1}{2\rho-a+r_1}}. \quad (59) \end{aligned}$$

将式(54), (58)代入(52)可得

$$\begin{aligned} \dot{U}_2(\bar{s}_2) \leq & -\beta_0 |\phi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + (b_{2,1} + b_{2,2}) |\phi_2|^{\frac{2\rho}{a}} + \\ & [\phi_2]^{\frac{2\rho-r_3}{a}} (h(t, x)u_2 + g(t, x)). \quad (60) \end{aligned}$$

根据式(10), 当 $t \geq T$ 时, 控制器为

$$u = u_2 = -\frac{\bar{g}(x)}{h} \text{sign}(\phi_2) - \check{\beta}_2 [\phi_2]^{\frac{r_3}{a}}. \quad (61)$$

由 ϕ_2 定义得 $\phi_2 = \phi(s_2) = [s_2]^{\frac{a}{r_2}} + \beta_1 [s_1]^{\frac{a}{r_1}}$. 选取 $\check{\beta}_2$ 使其满足

$$\check{\beta}_2 \geq \frac{\beta_0 + b_{2,1} + b_{2,2}}{h}. \quad (62)$$

然后将(61)代入(60)可得

$$\dot{U}_2(\bar{s}_2) \leq -\beta_0 (|\phi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + |\phi_2|^{\frac{2\rho}{a}}), \quad t \geq T. \quad (63)$$

鉴于 $0 < 2\rho/(2\rho - \tau) < 1$, 通过对式(50)运用引

理4可得

$$U_2^{\frac{2\rho}{2\rho-\tau}}(\bar{s}_2) \leq 2^{\frac{2\rho}{2\rho-\tau}} (|\phi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + |\phi_2|^{\frac{2\rho}{a}}).$$

由式(63)可得

$$\dot{U}_2(\bar{s}_2) \leq -\frac{\beta_0}{2^{2\rho/(2\rho-\tau)}} U_2^{\frac{2\rho}{2\rho-\tau}}(\bar{s}_2),$$

所以进一步可得 $0 \leq U_2(t) \leq U_2(T) = 0$ 对于 $\forall t \geq T$ 成立, 易得对于 $\forall t \geq T, U_2 = 0$ 成立. 因此 $s_i \equiv 0 (i = 1, 2)$ 对于 $\forall t \geq T$ 成立.

4 仿真结果及分析

下面给出一个数值仿真的算例来验证定理1中所提出算法的有效性. 考虑如下非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + a(t)x_1, \\ \dot{x}_2 &= bu + d. \end{aligned} \tag{64}$$

其中: x_1, x_2 为系统状态, $s = x_1$ 为系统输出, u 为控制输入, $a(t)$ 是上界未知的增益函数, b 是未知控制增益, $d(t)$ 是未知扰动. 为实现仿真, 选取 $a(t) = 0.5 + 0.1 \cos t, b = 2, d(t) = \sin t$. 此处的控制目标为针对系统(64)设计控制器 u , 使得系统输出 s 在任意给定指定时间 T 内收敛到零.

下面将文献[33]和文献[17]中所提出控制器与本文所提出的控制方案进行比较. 值得注意的是文献[33]和文献[17]中均要求未知增益函数 $a(t)$ 的上界精确已知, 本文则不需要满足这个条件.

1) 标准滑模系统的有限时间控制器. 针对系统(64), 根据文献[5]选取 $s_1 = s, s_2 = \dot{s} = x_2 + a(t)x_1$, 可以得到如下标准滑模系统:

$$\ddot{s} = h_1(t, x)u + g_1(t, x). \tag{65}$$

其中: $h_1(t, x) = b, g_1(t, x) = (0.5 + 0.1 \cos t)x_2 - (0.1 \sin t - a^2(t))x_1 + d$. 根据文献[33], 针对系统(65)设计有限时间控制器

$$u = -\left(\beta_2 + \frac{\bar{g}(x)}{h}\right) \text{sign}([s_2]^2 + \beta_1 s_1). \tag{66}$$

其中: $\beta_2 = 14.9, \beta_1 = 1, h = 2, \bar{g}(x) = 1 + 0.6|x_1| + 0.6|x_2|$.

2) 标准滑模系统的固定时间控制器. 根据文献[17], 针对标准滑模系统(65)设计固定时间控制器

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\bar{g}(x)}{h} \text{sign}(\xi_2) - \frac{\beta_1(s_1)}{h} \text{sign}[\xi_2]^{\frac{r_3}{a}} - \\ &\frac{\alpha_0}{h} \text{sign}[\xi_2]^{\frac{r_3+2r_2}{a}}. \end{aligned} \tag{67}$$

其中: $\bar{g}(x) = 1 + 0.6|x_1| + 0.6|x_2|, h = 2, \xi_2 = [s_2]^{\frac{a}{r_2}} + \tilde{\beta}_1^{\frac{a}{r_2}}(s_1)[s_1]^{\frac{a}{r_1}}$. 选取参数 $a = r_1 = 1, r_2 = 3/4, r_3 = 1/2, \alpha_0 = \beta_0 = 1$. 另取增益函数 $\tilde{\beta}_1(s) = 1 + |s|, \beta_1(s) = 13/4 + 2.2(1 + |s|)^{1/3}(1 + 7|s|/3) +$

$$4.1(1 + |s|)^{32/15}(1 + 7|s|/3)^{8/5}.$$

3) 新滑模系统的指定时间控制器. 针对系统(64), 通过选取滑模变量 $s_1 = s = x_1, s_2 = x_2$ 可以得到带有具有未知非匹配项的更一般的SOSM系统

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 + f_1(t, x), \\ \dot{s}_2 &= h(t, x)u + g(t, x). \end{aligned} \tag{68}$$

其中: $f_1(t, x) = a(t)x_1, h(t, x) = bg(t, x) = d$.

根据定理1, 针对新滑模系统(68)设计指定时间SOSM控制器, 满足

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\bar{g}(x)}{h} \text{sign}(\omega_2 + \check{\alpha}_1(\cdot)\omega_1) - \\ &\check{\alpha}_2(\cdot)(\omega_2 + \check{\alpha}_1(\cdot)\omega_1). \end{aligned} \tag{69}$$

其中: $\bar{g} = 1, h = 2$, 选取参数 $m = 1, k_0 = 0.1, \lambda = 0.0001, T = 3, \bar{\lambda} = \lambda = 1, \varrho_1 = |s|$.

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{\bar{g}(x)}{h} \text{sign}([s_2]^{\frac{a}{r_2}} + \check{\beta}_1[s_1]^{\frac{a}{r_1}}) - \\ &\check{\beta}_2[[s_2]^{\frac{a}{r_2}} + \check{\beta}_1[s_1]^{\frac{a}{r_1}}]^{\frac{r_3}{a}}. \end{aligned} \tag{70}$$

其中: $\bar{g} = 1, h = 2$, 选取参数 $a = r_1 = 1, r_2 = 2/3, r_3 = 1/3, \tau = -1/3, \check{\beta}_1 = 3, \check{\beta}_2 = 5$.

仿真结果如图1~图5所示. 图1分别展示了在指定时间控制器(69)和有限时间控制器(70)、有限时间控制器(66)以及固定时间控制器(67)作用下滑模变量 s_1 的收敛曲线. 图2分别展示了在指定时间控制器(69)和有限时间控制器(70)、有限时间控制器(66)以及固定时间控制器(67)作用下滑模变量 s_2 的收敛曲线. 图3展示了指定时间控制器仿真结果. 图4展示了有限时间控制器仿真结果. 图5展示了固定时间控制器仿真结果. 表1展示了不同初始条件下系统收敛时间. 由图1和图2可以发现, 在指定时间控制器作用下, 滑模变量 s_1 和 s_2 可以在一个不依赖于初始条件的指定时间 T 内收敛到零, 且此后都保持为零; 在有限时间控制器作用下, 滑模变量 s_1 和 s_2 收敛时间会随着初始条件的增大而增大, 无法实现收敛时间不依赖初始条件. 由文献[17]计算可得, 固定时间控制

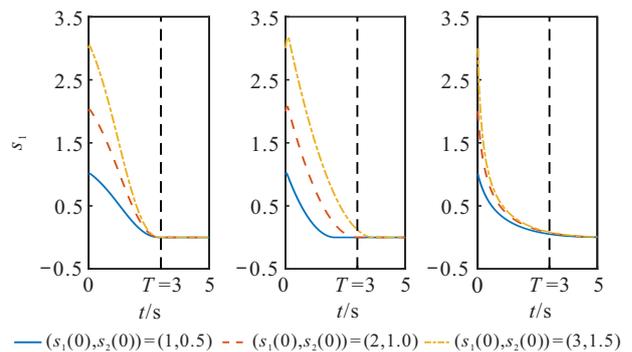


图1 3种控制器作用下滑模面 s_1 收敛曲线

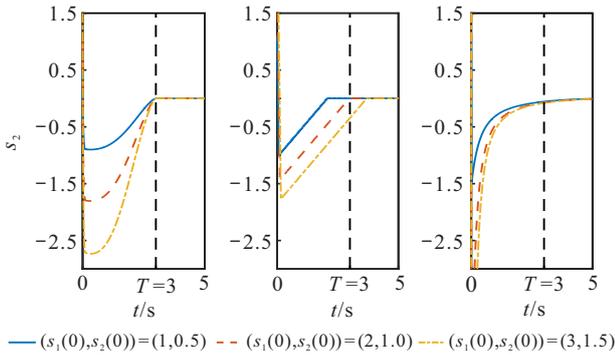


图2 3种控制器作用下滑模面 s_2 收敛曲线

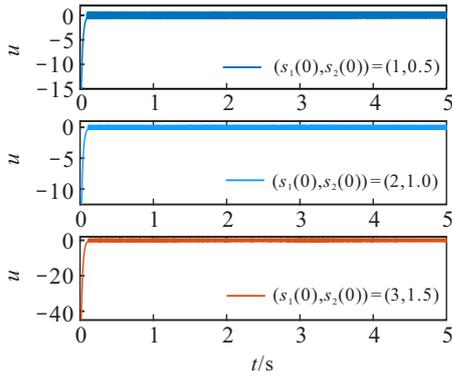


图3 指定时间控制器 u 仿真结果

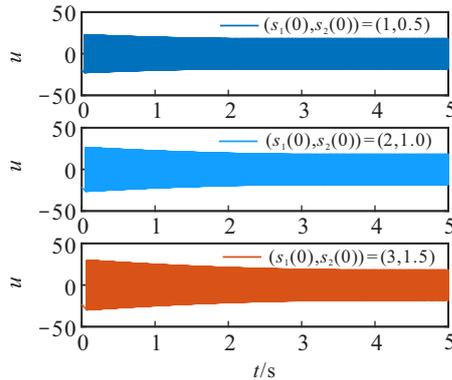


图4 有限时间控制器 u 仿真结果

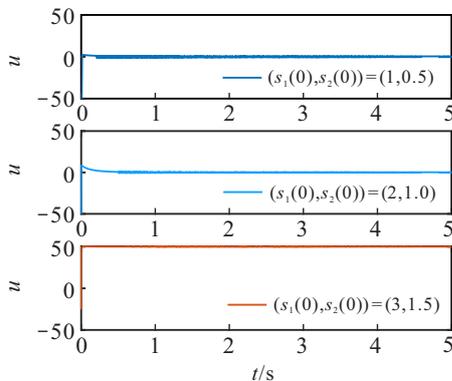


图5 固定时间控制器 u 仿真结果

器(67)的收敛时间上界估计满足 $T_{\max} = 78.349$ s. 在固定时间控制器作用下,滑模变量 s_1 和 s_2 可以在一个不依赖于初始条件的固定时间 T_{\max} 内收敛到零,但是对于收敛时间的估计并不精确,且控制器的

抖振情况比较严重. 由表1可以发现:在本文所提出的控制器基础上,系统收敛时间不依赖于初始条件且可以实现收敛时间提前指定;有限时间控制器的收敛时间将会随着初始条件的增大而增大;对于固定时间控制器,当 $\|x(0)\|_{\infty} \geq 3$ 时,系统的实际收敛时间为 $T = 6.8$ s,可以发现收敛时间的上界估计 $T_{\max} = 78.349$ s,远大于系统的实际收敛时间,因此存在收敛时间过分估计的问题.

表1 5种诊断方法的分类准确度 s

初值	有限时间	固定时间	指定时间
0.1	0.64	3.61	2.99
1	2.07	6.33	3.00
3	3.69	6.79	3.00
6	5.41	6.79	3.01
16	9.70	6.80	3.01

5 结论

本文针对不确定非线性系统,提出了一种新型指定时间SOSM控制器.与传统的有限时间SOSM控制和固定时间SOSM控制相比,本文所提出的控制器具有收敛时间不依赖于初始条件且可以提前指定的优点.众所周知,SOSM系统是最简单的HOSM系统,所以如何将SOSM系统研究成果推广至HOSM系统将是我们的后续研究的重点.

参考文献(References)

- [1] Utkin V. Sliding modes in control and optimization[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992: 1-286.
- [2] 陈正升, 王雪松, 程玉虎. 考虑扰动与输入饱和的机械臂连续非奇异快速终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(4): 903-912.
(Chen Z S, Wang X S, Cheng Y H. Continuous non-singular fast terminal sliding mode control of robotic manipulators considering disturbance and input saturation[J]. Control and Decision, 2022, 37(4): 903-912.)
- [3] 沙磊, 王树波, 刘逸坚. 基于扩张状态观测器的二质量系统非奇异快速终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2023, 38(3): 850-856.
(Sha L, Wang S B, Liu Y J. Nonsingular fast terminal sliding mode control based on extended state observer for two mass systems[J]. Control and Decision, 2023, 38(3): 850-856.)
- [4] Yang J, Li S H, Yu X H. Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(1): 160-169.
- [5] Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control[J]. International Journal of Control, 2003, 76(9/10): 924-941.
- [6] Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding

- mode control[J]. *International Journal of Control*, 1993, 58(6): 1247-1263.
- [7] Shtessel Y B, Shkolnikov I A, Brown M D J. An asymptotic second-order smooth sliding mode control[J]. *Asian Journal of Control*, 2008, 5(4): 498-504.
- [8] Bartolini G, Ferrara A, Usai E. Chattering avoidance by second-order sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(2): 241-246.
- [9] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [10] 陈强, 钱宁, 南余荣. Buck型变换器固定时间自适应控制[J]. *控制与决策*, 2020, 35(5): 1183-1190.
(Chen Q, Qian N, Nan Y R. Fixed-time adaptive control for Buck converters[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(5): 1183-1190.)
- [11] Shi S, Min H F, Ding S H. Observer-based adaptive scheme for fixed-time frequency estimation of biased sinusoidal signals[J]. *Automatica*, 2021, 127(4): 109559.
- [12] Min H F, Shi S, Xu S Y, et al. Fixed-time Lyapunov criteria of stochastic nonlinear systems and its generalization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(8): 5052-5058.
- [13] Min H F, Xu S Y, Zhang B Y, et al. Fixed-time Lyapunov criteria and state-feedback controller design for stochastic nonlinear systems[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2022, 9(6): 1005-1014.
- [14] Dvir Y, Levant A. Accelerated twisting algorithm[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(10): 2803-2807.
- [15] Cruz-Zavala E, Moreno J A, Fridman L. Uniform sliding mode controllers and uniform sliding surfaces[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2012, 29(4): 491-505.
- [16] Cruz-Zavala E, Moreno J A, Fridman L. Lyapunov-based design for a class of variable-gain 2nd-sliding controllers with the desired convergence rate[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(17): 5279-5296.
- [17] Shi S, Gu J, Xu S Y, et al. Variable-gain second-order sliding mode controller with globally fixed-time stability guarantees[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67(8): 1414-1418.
- [18] Ding S H, Li S H. Second-order sliding mode controller design subject to mismatched term[J]. *Automatica*, 2017, 77: 388-392.
- [19] Shi S, Xu S Y, Gu J, et al. Global high-order sliding mode controller design subject to mismatched terms: Application to buck converter[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2019, 66(12): 4840-4849.
- [20] Shi S, Min H F, Hu Y L, et al. A novel hybrid scheme for fixed-time SOSM control of nonlinear uncertain systems subject to mismatched terms[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 386: 125511.
- [21] Shi S, Gu J, Xu S Y, et al. Globally fixed-time high-order sliding mode control for new sliding mode systems subject to mismatched terms and its application[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(12): 10776-10786.
- [22] Mei K Q, Ding S H. Fixed-time HOSM controller design for constrained sliding mode systems with mismatched terms[J]. *Information Sciences*, 2022, 585: 366-381.
- [23] Zarchan P. *Tactical and strategic missile guidance*[M]. The 6th edition. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- [24] Song Y D, Wang Y J, Holloway J, et al. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time[J]. *Automatica*, 2017, 83: 243-251.
- [25] Pal A K, Kamal S, Nagar S K, et al. Design of controllers with arbitrary convergence time[J]. *Automatica*, 2020, 112: 108710.
- [26] Zhou B, Shi Y. Prescribed-time stabilization of a class of nonlinear systems by linear time-varying feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(12): 6123-6130.
- [27] Shao K, Zheng J C. Predefined-time sliding mode control with prescribed convergent region[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2022, 9(5): 934-936.
- [28] Cui L, Jin N. Prescribed-time ESO-based prescribed-time control and its application to partial IGC design[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 106(1): 491-508.
- [29] Pal A K, Kamal S, Yu X H, et al. Free-will arbitrary time terminal sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(7): 3189-3193.
- [30] Filippov A F. *Differential equations with discontinuous right-hand side, mathematics and its applications (soviet series)*[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988: 1-316.
- [31] Ding S H, Li S H, Zheng W X. Nonsmooth stabilization of a class of nonlinear cascaded systems[J]. *Automatica*, 2012, 48(10): 2597-2606.
- [32] Qian C J, Lin W. Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(3): 185-200.
- [33] Ding S H, Wang J D, Zheng W X. Second-order sliding mode control for nonlinear uncertain systems bounded by positive functions[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(9): 5899-5909.

作者简介

石尚(1990—), 男, 副教授, 博士, 从事线性 and 非线性系统建模、稳定性分析以及控制理论与应用等研究, E-mail: shishangshang@foxmail.com;

张国胜(1998—), 男, 硕士生, 从事非线性系统高阶滑模控制的研究, E-mail: zgs15295770291@163.com;

闵惠芳(1990—), 女, 教授, 博士, 从事随机非线性系统控制、滑模控制等研究, E-mail: jiejie1043640772@126.com.