



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



基于特征正交分解的微波加热过程快速求解方法

杨彪, 黄宏彬, 杜庆治, 吴照刚, 彭飞云, 韩泽民

引用本文:

杨彪, 黄宏彬, 杜庆治, 吴照刚, 彭飞云, 韩泽民. 基于特征正交分解的微波加热过程快速求解方法[J]. 控制与决策, 2024, 39(9): 3059–3068.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0456>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于一致性算法的多模式搅拌器微波加热系统温度均匀性优化

Temperature uniformity optimization of multi-mode stirrer microwave heating system based on consensus algorithm
控制与决策. 2021, 36(12): 2901–2909 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0986>

求解非线性方程组的智能优化算法综述

Overview of intelligent optimization algorithms for solving nonlinear equation systems
控制与决策. 2021, 36(4): 769–778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0379>

基于微波无线传能的动态无线传能链路多目标规划问题

Multi-objective planning of dynamic wireless energy transmission link based on microwave wireless energy transmission
控制与决策. 2021, 36(12): 3039–3048 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1187>

基于自注意力生成对抗网络的图像超分辨率重建

Image super-resolution reconstruction based on self-attention GAN
控制与决策. 2021, 36(6): 1324–1332 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1290>

一种基于双编码遗传算法的机动微波接力网组网方法

Mobile microwave relay network construction method based on double coding genetic algorithm
控制与决策. 2020, 35(12): 2915–2922 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0347>

基于特征正交分解的微波加热过程快速求解方法

杨彪^{1,2,3†}, 黄宏彬¹, 杜庆治¹, 吴照刚¹, 彭飞云¹, 韩泽民¹

- 昆明理工大学 信息工程与自动化学院, 昆明 650500;
- 昆明理工大学 云南省人工智能重点实验室, 昆明 650500;
- 昆明理工大学 非常规冶金教育部重点实验室, 昆明 650093)

摘要: 应用传统数值计算方法求解微波加热媒质过程的温度分布时,存在自由度数量大且无法快速获取温度分布的问题,为此开展如何平衡计算精度和求解速度的研究. 一方面,推导微波加热模型有限元离散格式的高阶非线性方程组,并构建瞬像矩阵,在此基础上,引入特征正交分解(proper orthogonal decomposition, POD)方法获取最优POD基底,进一步降维得到低阶微波加热离散控制方程;另一方面,建立TE₁₀波辐射下矩形波导中媒质内部显性耗散功率表达式,开展微波加热媒质全局温度分布的有效计算. 数值计算结果表明:所提基于POD的微波加热求解方法不仅能够准确求得加热过程中媒质内部的温度分布,并且计算速度提升82.9%~85.5%;同时,该方法在加热边界条件或初始条件发生变化时,无需重新计算POD基底,用较少基底就能够描述高阶模型超99.9%以上能量,对微波加热媒质过程温度分布的实时控制和快速计算具有重要意义.

关键词: 微波加热; 温度分布; 特征正交分解; 有限元法; 低阶模型; 求解方法

中图分类号: TN801 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0456

引用格式: 杨彪,黄宏彬,杜庆治,等. 基于特征正交分解的微波加热过程快速求解方法[J]. 控制与决策, 2024, 39(9): 3059-3068.

Rapid solution method for microwave heating processes based on proper orthogonal decomposition

YANG Biao^{1,2,3†}, HUANG Hong-bin¹, DU Qing-zhi¹, WU Zhao-gang¹, PENG Fei-yun¹, HAN Ze-min¹

(1. Faculty of Information Engineering and Automation, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China; 2. Yunnan Key Laboratory of Artificial Intelligence, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China; 3. Key Laboratory of Unconventional Metallurgy of Ministry of Education, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: This paper studies how to balance the accuracy of the calculation with the speed of the solution, as the number of freedom degrees is large and the temperature distribution cannot be obtained quickly when applying the traditional solution method of numerical calculation for the temperature distribution of the microwave heating medium process. For this reason, on the one hand, this paper derives a set of higher-order non-linear equations in finite element discrete format for the microwave heating model, and constructs a snapshot matrix. On the basis of this, the optimal proper orthogonal decomposition (POD) basis is obtained by introducing the POD method, which further reduces the dimensionality to obtain the low-order microwave heating discrete control equations. On the other hand, an expression for the explicit dissipated power inside the medium in a rectangular waveguide under TE₁₀ mode wave radiation is developed, and an effective calculation of the global temperature distribution of the microwave heated medium is carried out. The numerical results show that the proposed method based on the POD can accurately calculate the temperature distribution inside the medium during the microwave heating process, and the computational speed is increased by 82.9%~85.5%. At the same time, the method has the feature of not having to recalculate the POD basis when the heating boundary conditions or initial conditions change, and can describe the super 99.9% energy in the higher order model with less basis, which is very important for real-time control and fast calculation of the temperature distribution of the microwave heating medium process.

Keywords: microwave heating; temperature distribution; POD; FEM; low-order model; solution method

收稿日期: 2023-04-11; 录用日期: 2023-08-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62363019, 61863020).

责任编辑: 张维海.

†通讯作者. E-mail: ybiaocn@163.com.

0 引言

微波加热具有加热速度快、体积加热、选择性加热等优点^[1],近年来被广泛应用于道路养护、食品工程、材料科学等领域^[2-4].然而,微波加热也存在加热不均匀和热失控两大突出问题,严重影响加热效果,并阻碍了该技术的进一步发展^[5].为避免这类问题的出现,从控制学科观点出发,研究者们主要提出了正反馈和负反馈两种解决方案.其中:正反馈方法主要通过改变微波加热腔体内部机械结构或者改变微波源的输入功率和频率,间接实现加热过程中电磁场均匀分布;负反馈方法主要通过先进控制算法实现温度场均匀分布,并且还能够实现温度的精准控制,但该方法依赖于所构建数学模型的精度.

微波加热是多物理场相互耦合、自身演变的过程,具有时空耦合的特点.加热模型可分解为电磁场子模型与温度场子模型,两者之间通过内热源项即耗散功率项建立联系,其主要包括无限维的热传导偏微分方程(partial differential equation, PDE)、初始温度条件、非齐次Neumann边界条件.因其无限维的特点,再加上非齐次边界条件,使得采用传统的解析方法无法获得加热模型的解析解.多年来,学者们提出了不同的求解方法. Campañone等^[6]采用隐式有限差分法(finite difference method, FDM)求解了一维条件下的温度分布; Wäppling-Raaholt等^[7]采用时域有限差分法(finite difference time domain, FDTD)求解Maxwell方程得到三维空间的电磁场分布,然后进一步求解加热腔体内食品的温度分布; de Almeida等^[8]将 Galerkin 最小二乘有限元法与 Kurganov-Tamor 有限体积法(finite volume method, FVM)相结合对微波加热稠油辅助注水模型进行了求解; Zhong等^[9]采用改进谱伽辽金法得到了有限维的微波加热 ODE 模型; Vilayannur等^[10]基于有限元方法(finite element method, FEM)对微波加热过程中矩形、圆柱形和六棱柱媒质的温度和水分分布进行求解; Wu等^[11]基于 FEM 对微波加热货油温度场进行模拟; Wang等^[12]采用 FEM 分析了具有双端口的微波谐振腔; Bhoi等^[13]对微波混合烧结过程采用 FEM 进行模拟.可见,近年来 FEM 尤其受到微波研究者的青睐,但该方法主要通过将加热模型转化为高维的常微分方程组进行求解,精度越高,维数越大,时间复杂度也随之增加.

模型降阶技术的发展为在保证求解精度的同时提高计算速度提供了解决方案.特征正交分解(proper orthogonal decomposition, POD)作为一种高效的模型降阶方法被广泛应用于材料力学、传热学、

最优控制等领域^[14-18]. Liang等^[14]将 POD 方法与自由单元法结合,提高了求解瞬态非线性热传导问题的迭代效率; Liu等^[15]在使用 FEM 求解时间分数阶 Tricomi 型方程中,应用 POD 方法有效减轻了计算负载;郑保敬等^[16]提出了 POD 模型降阶方法,实现了快速求解功能梯度材料在复杂载荷条件下的动态响应;朱强华等^[17]在 POD 和 FEM 的基础上,结合单元预转换方法和多级线性化方法,提出了求解瞬态非线性热传导模型的高效计算方法; Dehghan等^[18]将 POD 方法与 FEM 结合对地下水的对流-扩散反应耦合方程进行求解,减小了 CPU 的运行时间.

本文在 POD 降阶方法研究的基础上,提出针对微波加热过程求解媒质温度分布的快速计算方法.首先分析具有非齐次 Neumann 边界条件的微波加热 PDE 模型,通过有限元离散得到高阶模型,并进一步给出计算方法;然后构造瞬态矩阵,利用特征正交分解方法求解 POD 基底,在满足精度的条件下截取 POD 基底,之后代入原始高阶模型,从而将高阶的微波加热非线性微分方程组降维为低阶;最后分析推导 TE₁₀ 波模式下的显性耗散功率表达式,采用本文所提快速计算方法对矩形波导中加热去离子水和土豆的温度分布进行求解,从而对所提方法的准确性和快速性进行验证.本文所提方法具有以下优势:

- 1) POD 基底只需计算一次,当模型中被加热媒质热力学参数、边界条件、初始条件等发生变化时,依旧可以通过降阶模型进行求解,降低了求解规模,提高了求解效率;
- 2) 在构造瞬像矩阵时,只需计算 t_1 时刻内的温度分布,所得到的 POD 降阶模型可计算到 t_2 时刻 ($t_2 > t_1$);
- 3) 能够满足微波加热控制器设计时实时获取温度分布的要求,且当控制律发生变化时仍能够通过降阶模型进行求解.

1 微波加热模型的有限元法

1.1 微波加热模型的控制方程

微波由相互正交的电场和磁场构成,它们在时空上的变化可由频域形式的 Maxwell 方程组^[1]表示为

$$\nabla \times \mu_r^{-1}(\nabla \times E) - k_0^2 \left(\varepsilon - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right) E = 0. \quad (1)$$

其中: μ_r 表示相对磁导率; E 表示电场强度, V/m; $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 表示真空中的波数; ε 表示媒质的复相对介电常数; j 表示虚数单位, $j = \sqrt{-1}$; σ 表示媒质的导电性能, S/m; ω 表示入射电磁波的角频率, rad/s; ε_0 表示真空电容率, 8.854×10^{-12} F/m; μ_0 表示真空

磁导率, 1.257×10^{-6} H/m.

微波加热过程中媒质的温度场分布可由带内热源项的热传导方程^[19]进行描述,有

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\kappa \nabla T) + Q_{\text{abs}}(x, y, z, t). \quad (2)$$

其中: ρ 表示被加热媒质的密度; C_p 表示比热容; T 表示媒质内部的温度; κ 表示导热系数; $Q_{\text{abs}}(x, y, z, t)$ 表示瞬态耗散功率项,其描述了单位体积内媒质内部由电磁功率损耗所产生的热量. 对于非磁性介质,其内部的热量主要由介电损耗项产生,磁滞损耗可近似为零, $Q_{\text{abs}}(x, y, z, t)$ ^[20]可表示为

$$Q_{\text{abs}}(x, y, z, t) = \pi f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'' \cdot E \cdot E^* = \pi f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon' \cdot \tan \delta \cdot E \cdot E^*. \quad (3)$$

其中: E^* 表示电场的复数; ε'' 表示相对介电损耗, ε' 表示相对介电常数; $\tan \delta$ 表示损耗角正切, $\tan \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$.

在加热过程中,当媒质温度高于外部环境温度时,媒质热量向外流失,即产生边界热对流. 由牛顿冷却定律可得如下Neumann边界条件:

$$\mathbf{n} \cdot \kappa \nabla T = h_c(T - T_\infty). \quad (4)$$

其中: \mathbf{n} 表示单位向量,由媒质表面指向外部环境; h_c 表示对流换热系数; T_∞ 表示外部环境温度.

初值条件即初始温度条件为

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z). \quad (5)$$

抛物型偏微分热传导方程(2)及非齐次Neumann边界条件(4)和初始温度条件(5)组成了本文所求的微波加热模型的控制方程. 热力学参数随温度变化、非齐次Neumann边界条件等因素使得该方程无法直接求得解析解.

1.2 微波加热模型的有限元离散格式

运用FEM求解抛物型偏微分热传导方程(2)及非齐次Neumann边界条件(4)和初始温度条件(5)的弱解形式,有

$$\int_{\Omega} N \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \kappa \nabla N \cdot \nabla T dV = \int_{\Omega} \pi f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon' \cdot \tan \delta \cdot E \cdot E^* \cdot N dV + \int_{\Gamma} N h_c (T - T_\infty) dS. \quad (6)$$

其中: Ω 和 Γ 分别为求解域和边界, N 为权函数. 在整个求解域内,权函数难以满足正交特性关系,再结合微波加热媒质的温度场在时间域和空间域上并不重合,因此将整个求解域离散为有限个网格单元. 在网格单元内温度的近似解 $T^m(t)$ 可通过网格节点温度 $T_i^m(t)$ 插值计算得到,且节点温度是关于时间的函数,

即

$$T^m(t) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i^m(x, y, z) T_i^m(t) = \mathbf{N}^{mT} \mathbf{T}^m, \quad m = 1, 2, \dots, n_{\text{elem}}. \quad (7)$$

其中: $N_i^m(x, y, z)$ 为网格单元 m 内节点 i 的权函数,该函数为空间域的函数; n_e 为网格单元 m 内的节点总数量; n_{elem} 为求解域 Ω 内离散的网格单元总数量; \mathbf{N}^m 和 \mathbf{T}^m 分别为单元 m 内各节点所构成的权函数向量和温度向量.

通过Galerkin投影可以得到网格单元 m 内 n_e 个节点温度 $T_i^m(t)$ 的非线性方程组如下:

$$\mathbf{C}^m(\mathbf{T}^m) \dot{\mathbf{T}}^m(t) + \mathbf{K}^m(\mathbf{T}^m) \mathbf{T}^m(t) = \mathbf{G}^m(t). \quad (8)$$

其中: \mathbf{C}^m 、 \mathbf{K}^m 和 \mathbf{G}^m 分别为网格单元 m 的热容向量、热传导向量和温度载荷向量; $\dot{\mathbf{T}}^m(t)$ 为节点温度 $\mathbf{T}^m(t)$ 对时间的导数向量, $\dot{\mathbf{T}}^m(t) = d\mathbf{T}^m(t)/dt$. 向量 \mathbf{C}^m 、 \mathbf{K}^m 和 \mathbf{G}^m 的元素定量计算如下:

$$\mathbf{C}^m = \int_{\Omega_m} \rho C_p \mathbf{N}^m \mathbf{N}^{mT} dV, \quad (9)$$

$$\mathbf{K}^m = \int_{\Omega_m} \kappa \frac{\partial \mathbf{N}^m}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^m}{\partial x} \right)^T dV + \int_{\Gamma} h_c \mathbf{N}^m \mathbf{N}^{mT} dS, \quad (10)$$

$$\mathbf{G}^m = \int_{\Omega_m} \pi f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon' \cdot \tan \delta \cdot E \cdot E^* \mathbf{N}^m dV + \int_{\Gamma} h_c T_\infty \mathbf{N}^m dS. \quad (11)$$

微波加热模型的有限元离散格式可通过求解域 Ω 内离散的各网格单元的非线性方程组(8)组集得到:

$$\mathbf{C}(\mathbf{T}) \dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{T}) \mathbf{T}(t) = \mathbf{G}(t). \quad (12)$$

其中: \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 和 \mathbf{G} 分别为求解域 Ω 内加热模型的热容矩阵、热传导矩阵和温度载荷列阵,且 \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 都为对称正定矩阵,其定量计算为

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \sum_{m=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{C}^m, \\ \mathbf{K} = \sum_{m=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{K}^m, \\ \mathbf{G} = \sum_{m=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{G}^m. \end{cases} \quad (13)$$

$\mathbf{T}(t)$ 表示 t 时刻网格节点的温度向量,即

$$\mathbf{T}(t) = [T_1(t) \ T_2(t) \ \dots \ T_{n_{\text{node}}-1}(t) \ T_{n_{\text{node}}}(t)]^T, \quad (14)$$

n_{node} 表示求解域 Ω 内网格节点的总数量.

1.3 有限元离散格式非线性方程组求解

非线性方程组式(12)中热容矩阵 $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ 和热传导矩阵 $\mathbf{K}(\mathbf{T})$ 是关于温度 T 的函数,为了对微波加热过程媒质温度分布进行瞬态分析,将加热时间离散为有限个时间步,步长为 Δt . 采用加权差分法对 $t + \Delta t$ 时刻建立差分格式如下:

$$T_{t+\theta\Delta t} = \theta T_{t+\Delta t} + (1 - \theta)T_t, \quad (15)$$

$$\frac{\partial T_{t+\theta\Delta t}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(T_{t+\Delta t} - T_t). \quad (16)$$

将式(15)、(16)代入(12)可得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) + \theta \mathbf{K}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) \right] \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \\ & \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) - (1 - \theta) \mathbf{K}(\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}) \right] \mathbf{T}_t + \mathbf{G}_{t+\Delta t}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 θ 为加权系数. 当 θ 取不同值时对应不同的差分方法: $\theta = 0$ 为向前差分方法, $\theta = 1/2$ 为 Crank-Nicolson 方法, $\theta = 2/3$ 为 Galerkin 方法, $\theta = 1$ 为向后差分方法.

本文采用向后差分方法,即 $\theta = 1$, 式(17)可进一步简化为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_{t+\Delta t}) + \mathbf{K}(\mathbf{T}_{t+\Delta t}) \right] \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \\ & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{T}_{t+\Delta t}) \mathbf{T}_t + \mathbf{G}_{t+\Delta t}. \end{aligned} \quad (18)$$

由此,将微波加热模型的有限元离散格式非线性方程组转化成了分段线性的代数方程组. 为使 FEM 在求解精度与计算速度之间取得良好的平衡,在提高计算速度的同时满足求解精度要求,引入模型降阶技术结合 FEM 对微波加热模型进行求解.

2 特征正交分解法模型降阶原理

2.1 构造瞬像矩阵

瞬像 (snapshots) 也称快照,是模型的数值解或者模型对应实验数据在若干个时刻点上的空间分布值. 对于微波加热过程,本文考虑被加热媒质的温度场 T 分布,选取 L 个时刻按顺序组集形成瞬像矩阵

$$\mathbf{S} = [\mathbf{T}(t_1) \quad \mathbf{T}(t_2) \quad \dots \quad \mathbf{T}(t_L)]. \quad (19)$$

其中: $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{N \times L}$, $L \ll N$; $\mathbf{T} = [T_1(t) \quad \dots \quad T_N(t)]^T$, 表示 t 时刻原始模型计算得到的 N 个网格节点的温度值,或通过温度传感器所测量的 N 个观测点的温度值. 瞬像矩阵 \mathbf{S} 中的每一个列向量称为一个快照,列数 L 为快照数量,与采样时间周期密切相关. 在构建瞬像矩阵 \mathbf{S} 时,为保证不同时刻的场是互不相关的,应使采样时间周期大于温度的自相关时间^[21]. 相关系数取值范围为 $-1 \sim +1$, 绝对值越小,表示相关

性越小. 在本文中,当相关系数绝对值小于 0.3 时忽略其相关性.

2.2 获取 POD 基底

通过对瞬像矩阵 \mathbf{S} 进行特征正交分解,获得 POD 基底,也称 POD 模态,即

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_L]. \quad (20)$$

其中矩阵 Φ 是 N 行 L 列的 POD 规范正交基集合矩阵,且满足正交性

$$\Phi^T \Phi = \mathbf{I}(L). \quad (21)$$

加热模型网格上任意节点的温度值都可以采用 POD 基底线性表示,即

$$\mathbf{T}(t) = \sum_{j=1}^L a_j(t) \varphi_j, \quad (22)$$

其中 $a_j(t)$ 为 POD 基底 φ_j 所对应的系数,随时间 t 变化. POD 基底的佳条件是温度向量 $\mathbf{T}(t_j)$ 与投影的误差范数等价为一个带约束的最大值问题,即

$$\mathbf{H} = \max_{\varphi} \sum_{j=1}^N \frac{(\mathbf{T}_j, \varphi)^2}{\|\varphi\|^2}, \quad \|\varphi\|_2 = 1, \quad (23)$$

其中向量 φ 为式(20) POD 规范正交基集合中的一个规范正交基. 运用拉格朗日乘子法求解上式,可将最大值问题转化为

$$J(\varphi) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{T}_j, \varphi)^2 - \lambda (\|\varphi\| - 1) \quad (24)$$

的极值问题,其中 λ 为拉格朗日乘子. 对于有限维空间,求解上式极值可转化为特征值问题

$$\mathbf{S} \mathbf{S}^T \varphi = \lambda \varphi. \quad (25)$$

其中: λ 为特征值; 矩阵 $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{N \times L}$, 所以 $\mathbf{S} \mathbf{S}^T \in \mathbf{R}^{N \times N}$, $\mathbf{S}^T \mathbf{S} \in \mathbf{R}^{L \times L}$. 虽然矩阵 $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ 与 $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ 的维数不相同,且 $L \ll N$, 但两者的非零特征值完全相同. 定义相关矩阵

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \in \mathbf{R}^{L \times L}. \quad (26)$$

求解相关矩阵 \mathbf{R} 的特征值 λ 及其对应的特征向量 $\phi_j (j = 1, 2, \dots, L)$, 有

$$\mathbf{R} \phi_j = \lambda_j \phi_j. \quad (27)$$

其中: 特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L > 0$, $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ 的 L 个特征值对应的特征向量即 POD 基底为

$$\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \mathbf{S} \phi_j. \quad (28)$$

$\varphi_j (j = 1, 2, \dots, L)$ 是一组标准正交基,即满足

$$\varphi_i^T \cdot \varphi_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (29)$$

利用POD基底对微波加热模型的有限元非线性方程组进行降阶分析时,只需截取前 r 个特征向量对模型进行降阶处理.降阶后的加热模型网络上任意节点的温度值可近似表示为

$$\mathbf{T}(t) \approx \sum_{j=1}^r a_j(t) \varphi_j. \quad (30)$$

为保证降阶后模型的求解精度满足要求, r 应满足

$$r = \arg \min \left\{ I(r) : I(r) \geq \frac{\gamma}{100} \right\}. \quad (31)$$

其中

$$I(r) = \sum_{j=1}^r \sqrt{\lambda_j} / \sum_{j=1}^L \sqrt{\lambda_j}. \quad (32)$$

为保证降维精度, γ 一般取99.99.

2.3 POD模型降阶分析

微波加热模型各网格节点的温度值都可用降阶后POD基底线性表示,如式(30)所示,也可进一步表示为矩阵形式

$$\mathbf{T} = \bar{\Phi} \mathbf{a}. \quad (33)$$

其中:降阶后POD基底矩阵 $\bar{\Phi} = [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_r]$;系数矩阵 $\mathbf{a} = [a_1 \ \dots \ a_r]^T$.

将式(33)代入(12)可得

$$\mathbf{C}(\mathbf{T}) \bar{\Phi} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}(\mathbf{T}) \bar{\Phi} \mathbf{a} = \mathbf{G}(t). \quad (34)$$

将上式左右两边同时乘以 $\bar{\Phi}^T$ 得

$$\bar{\Phi}^T \mathbf{C}(\mathbf{T}) \bar{\Phi} \dot{\mathbf{a}} + \bar{\Phi}^T \mathbf{K}(\mathbf{T}) \bar{\Phi} \mathbf{a} = \bar{\Phi}^T \mathbf{G}(t). \quad (35)$$

式(35)可进一步简化为

$$\bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{a} = \bar{\mathbf{G}}. \quad (36)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{C}} = \bar{\Phi}^T \mathbf{C}(\mathbf{T}) \bar{\Phi}, \\ \bar{\mathbf{K}} = \bar{\Phi}^T \mathbf{K}(\mathbf{T}) \bar{\Phi}, \\ \bar{\mathbf{G}} = \bar{\Phi}^T \mathbf{G}(t). \end{cases} \quad (37)$$

$\bar{\mathbf{C}}$ 和 $\bar{\mathbf{K}}$ 都是 $r \times r$.

初始条件为

$$\mathbf{a}(0) = \bar{\Phi}^T \mathbf{T}_0. \quad (38)$$

式(36)~(38)即为降阶后微波加热模型,与原有限元模型相比,未知变量 \mathbf{T} 转化成了 \mathbf{a} ,非线性微分方程组维数由原有限元模型的 n_{node} 维降成了 r 维,大大降低了模型的计算复杂度,提高了求解速度.将初始条件(38)代入方程(34)可求解出各个时刻的系数矩阵 \mathbf{a} ,将其代入式(33)求解得到原有限元模型所有

网格节点的全局温度值.

3 仿真分析及验证

3.1 构建耗散功率表达式

TE₁₀波在矩形波导中的矢量分量^[22]可表示为

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right), \quad (39)$$

$$H_x = E_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon'}{\mu_0}} \sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right). \quad (40)$$

其中: E_0 表示入射端的最大电场强度; x_0 表示矩形波导的宽度; λ_0 表示微波在自由空间的波长,其定量表示为

$$\lambda_0 = c/f. \quad (41)$$

式中: f 表示微波频率; c 表示在真空中电磁波的传播速度, $c = 3.0 \times 10^8$ m/s; λ_g 表示被加热媒质中的波长,其定量表示为

$$\begin{aligned} \lambda_g &= \frac{\lambda'_g}{\sqrt{1 - (\lambda'_g/2x_0)^2}}, \\ \lambda'_g &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon'/2} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \delta} + 1}. \end{aligned} \quad (42)$$

根据Poynting定理,被加热媒质的入射截面功率可表示为

$$P_{\text{in}} = \frac{1}{2} \iint (E_y \times H_x) dx dy. \quad (43)$$

将矢量分量式(39)、(40)代入(43)可得

$$P_{\text{in}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon' \varepsilon_0}{\mu_0}} \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{2x_0}\right)^2\right) \left(E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{x_0}\right)\right)^2 x_0 z_0, \quad (44)$$

其中 z_0 表示被加热媒质的长度.

TE₁₀波在宽平面方向上没有变化,因此仅分析 x - z 平面上的电磁场.根据波导馈入口中心位置处的最大耗散功率值 Q_{max} ,再结合功率分布特点式(44),可得 x - z 平面上的耗散功率显性表达式

$$\begin{aligned} Q_{\text{abs}} &= \\ &Q_{\text{max}} \cdot [e^{-2\beta z} + \Gamma^2 \cdot e^{-4\beta z_0 + 2\beta z} + \\ &2\Gamma \cdot e^{-2\beta z_0} \cos(\varphi_A - \varphi_B + 2\alpha z)] \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{x_0}\right). \end{aligned} \quad (45)$$

其中: Γ 为反射系数; φ_A 和 φ_B 分别为电磁波的入射相位和反射相位; α 和 β 分别为传播常数 k 的实部和虚部, $k = \alpha + j\beta$,

$$\alpha = \frac{w}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon'(\sqrt{1 + \tan^2 \delta} + 1)}{2}}, \quad (46)$$

$$\beta = \frac{w}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon'(\sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1)}{2}}. \quad (47)$$

当媒质长度大于等于两倍趋肤深度 D_p 时,反射的电磁波近似为零,因此反射系数 $\Gamma \approx 0$,耗散功率表达式(45)可进一步表示为

$$Q_{\text{abs}} = Q_{\text{max}} \cdot e^{-2\beta z} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{x_0}\right) = Q_{\text{max}} \cdot e^{-\frac{2z}{D_p}} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{x_0}\right). \quad (48)$$

式(48)符合 Lambert 定理,趋肤深度 D_p 表示入射电磁场衰减到 $1/e$ (大约37%) 的距离,可表示为

$$D_p = \frac{1}{\beta} = \frac{c}{w} \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon'(\sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1)}{2}}}. \quad (49)$$

3.2 数值计算结果及分析

去离子水和土豆因其热力学参数准确,受到研究人员的青睐,它们的具体参数如表1所示.

表1 去离子水和土豆的热力学系数及介电常数

材料类型	$\rho / (\text{kg}/\text{m}^3)$	$C_p / (\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}))$	$\kappa / (\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}))$	ε'	ε''
去离子水 ^[22]	1000	4200	0.52	72.8	6.5
土豆 ^[23]	1050	3640	0.55	65.0	20.0

矩形波导中加热两种媒质的示意图如图1所示,假设被加热媒质充满整个波导.

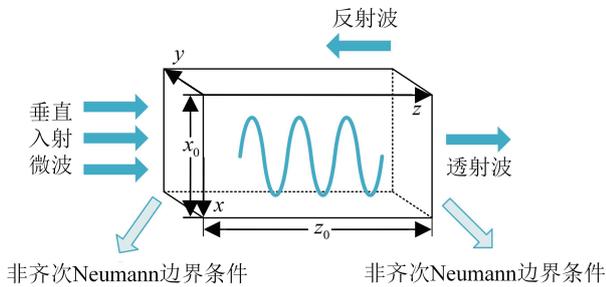


图1 矩形波导加热媒质示意图

对微波加热去离子水过程进行求解分析. 馈入的微波频率为 2.45 GHz, x_0 取 14.30 mm, 根据式(42)计算可得微波在去离子水中传播的波长为 16.68 mm. z_0 取 16.68 mm, 此时微波在右侧分界面入射相位等于反射相位, 产生全反射. 透射波等于零, 反射波不等于零. 考虑非齐次 Neumann 边界条件下, 对流换热系数 h_c 取 $10 \text{ W}/\text{m}^2$, 初始温度为 20.0°C , 加热时间为 20 s, 时间步长为 0.1 s, 左侧馈入口处中心局部最大耗散功率为 $1.50 \times 10^7 \text{ W}$. 采用三角形单元对求解域进行网格划分, 为了选择合适的网格大小, 使计算精度与时间之间取得良好的平衡, 对参考点 A (4.17, 7.15)、B (8.34, 7.15)、C (12.51, 7.15) 加热到 20 s 时刻的温度值随网格数量的变化趋势进行分析, 如图2所示.

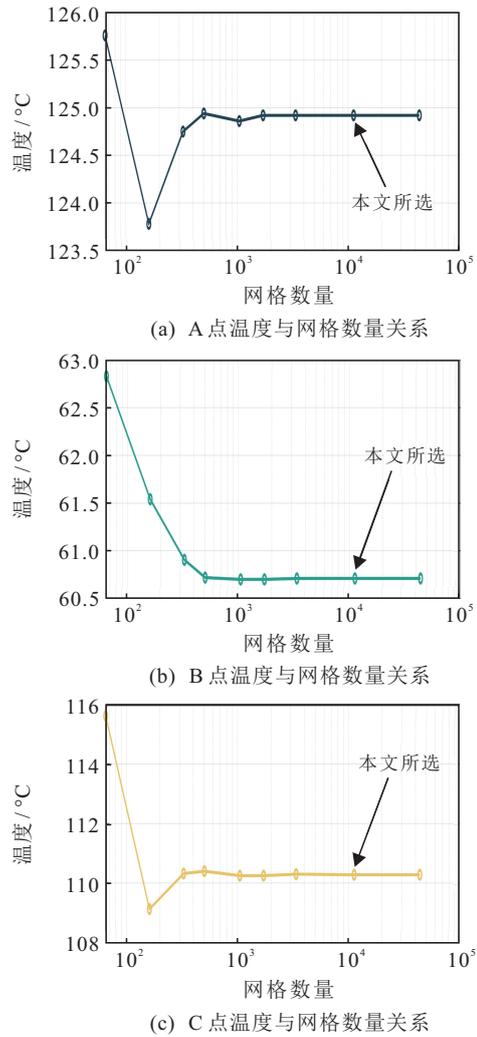


图2 20 s时刻参考点温度随网格数量变化趋势

从图2可以看出,随着网格数量的增加,A、B、C三点的温度趋于稳定. 本文所选的网格数量为11 213个,共2 851个节点,此时参考点温度值不随网格数量增加而变化,表明网格数量划分具有较高的计算精度.

为采用 POD 方法构建微波加热的降阶模型, 本文运用数值求解结果组集成瞬态矩阵. 通过 FEM 计算 0~20 s 去离子水的全局温度分布, 选取参考点 A 的温度序列进行相关性分析. 当采样间隔为 0.4 s 时相关系数为 0.33, 采样间隔为 0.5 s 时相关系数为 0.29,

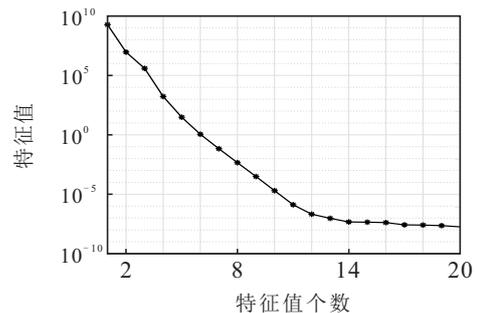


图3 前20个模态对应的特征值

因此采样间隔为0.5 s时大于温度的自相关时间, 满足条件. 选取 $t = 0.5, 1.0, \dots, 19.5, 20.0$ s, 共40个时刻的温度场构造瞬像矩阵 S . 通过式(26)~(28)求解 POD基底, 前20个特征值分布如图3所示.

从图3可以看出特征值呈快速衰减趋势, 截取前6个特征值, 即 $r = 6, I(r) = 99.9992\% > 99.9900\%$. 前6个特征值对应的POD模态如图4所示.

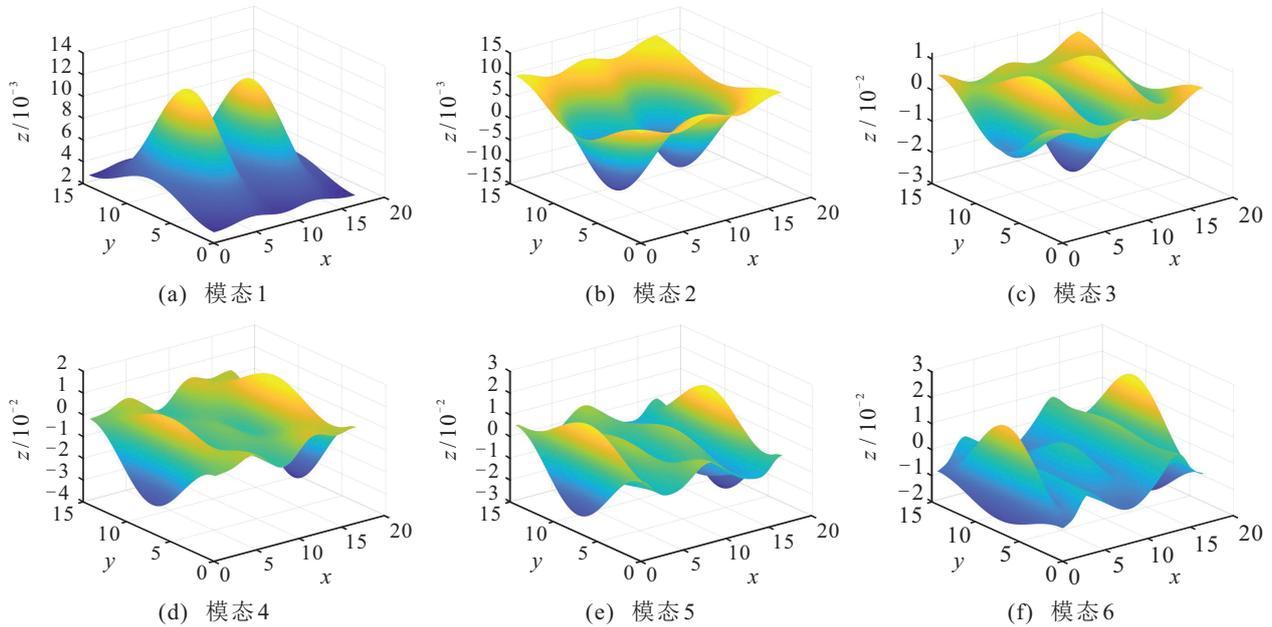


图4 前6个特征值对应的POD模态

通过式(36)~(38)构建仅为6维的微波加热降阶模型, 维数远小于降阶前的2851, 大大降低了非线性方程组规模. 图5为去离子水加热到20 s时刻的温度分布, 图5(a)为FEM的计算结果, 图5(b)为POD的计算结果.

从图5可以看出, 降维前后的计算结果十分相似. 微波在右侧分界面发生全反射, 去离子水内部形成驻波, 在波峰和波谷位置产生大量能量聚集, 使得这两个位置的温度急剧上升, 形成了图中所示的两个高温点. 为定量分析降维前后两种方法的计算结果, 将3个参考点的温度变化进行比较, 如图6所示.

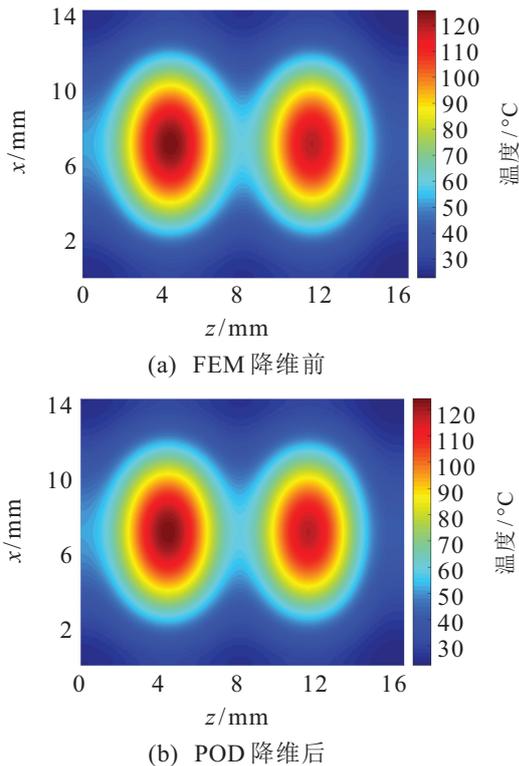


图5 去离子水加热到20 s时刻两种方法的计算结果

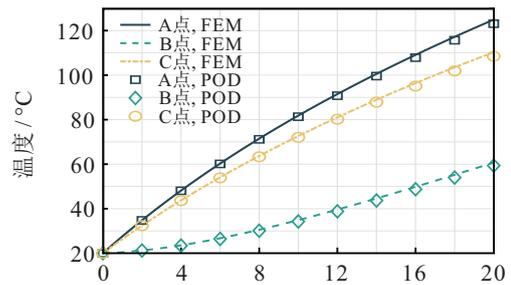


图6 去离子水A、B、C三点温度随时间变化曲线

从图6可以看出, 降维后模型的计算误差随着加热时间增加有略微的增大, 但整体温度变化趋势仍能较好地跟随降维前的模型计算结果. 为进一步定量分析降阶模型的计算精度, 选取4 s、8 s、12 s、16 s、20 s共5个时刻的温度值, 求解其相对误差, 如表2所示, 计算公式为

$$\text{error} = \frac{|T_{\text{POD}} - T_{\text{FEM}}|}{T_{\text{FEM}}} \quad (50)$$

其中: T_{POD} 表示采用 POD 方法降维后求解的温度值; T_{FEM} 表示降维前采用 FEM 方法计算的温度值, 并

以此温度作为基准值.

表2 去离子水参考点计算温度及相对误差

时间/s	A		B		C	
	T/°C	error	T/°C	error	T/°C	error
4	48.0	0.0018	23.4	0.0058	43.6	0.0024
8	71.2	0.0044	30.1	0.0149	63.3	0.0060
12	90.8	0.0079	38.8	0.0199	80.2	0.0101
16	107.8	0.0114	48.8	0.0218	95.1	0.0137
20	123.1	0.0145	59.4	0.0221	108.5	0.0165

从表2可以看出,随着加热时间增加降阶模型的相对误差有略微的增加,但最大仅为0.0221,仍能保证较高的精度,这表明所提出的基于POD的微波加热过程快速求解方法具有较高的计算精度.

对微波加热土豆过程进行求解分析. x_0 取82.0 mm,根据式(49)计算可得趋肤深度 $D_p \approx 15.9$ mm. z_0 取40.0 mm,此时 $z_0 > 2D_p$,微波在右侧分界面透射波和反射波近似为零.其他输入参数与加热去离子水时相同.同样,将求解域采用三角形单元进行网格划分,共1619个节点.为方便后期分析处理,取A(10,41)、B(20,41)、C(30,41)三点作为参考点.与加热去离子水时相同,选取40个时刻构造瞬像矩阵,根据特征值分布,选取前5个特征值,即 $r = 5$,此时 $I(r) = 99.9942\% > 99.9900\%$,符合精度要求.构建仅为5维的微波加热降阶模型,维数远小于降阶前的1619.降维前后模型计算微波加热土豆20 s时刻的温度分布如图7所示.

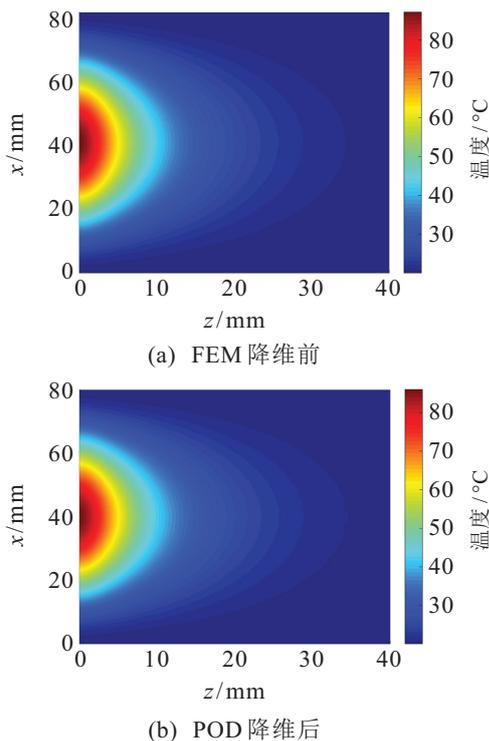


图7 土豆加热到20 s时刻两种方法的计算结果

从图7可以看出,降维前FEM的数值计算结果与降维后POD的计算结果十分相似.短时间内馈入较大能量,且媒质深度大于两倍趋肤深度 D_p ,因此在馈入口处产生大量能量聚集,使得温度急剧上升.温度分布沿 z 轴呈快速衰减趋势,符合 Lambert 定理.3个参考点的温度曲线如图8所示,同样选取4 s、8 s、12 s、16 s、20 s共5个时刻的温度值,求解其相对误差,如表3所示.

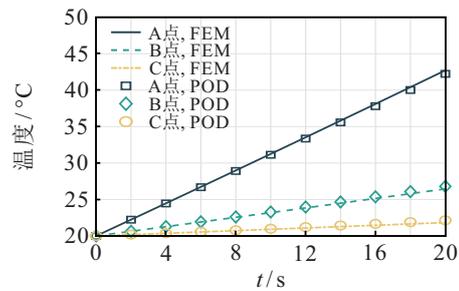


图8 土豆A, B, C三点温度随时间变化曲线

表3 土豆参考点计算温度及相对误差

时间/s	A		B		C	
	T/°C	error	T/°C	error	T/°C	error
4	24.5	0.0007	21.3	0.0006	20.4	0.0006
8	28.9	0.0026	22.6	0.0024	20.8	0.0024
12	33.4	0.0051	24.0	0.0052	21.2	0.0053
16	37.8	0.0080	25.4	0.0088	21.7	0.0093
20	42.2	0.0112	26.8	0.0131	22.1	0.0141

从图8可以看出,降维前后求解的温度变化趋势十分一致,虽然随着加热时间推进,计算误差有所增加,但从表3可以看出,最大误差仅为0.0141,表明所提降维方法能保证较高的求解精度.

为进一步分析降维前后模型的求解效率,将初始温度条件为20.0 °C时模型计算一次的时间进行比较.同时,将100组不同初始温度条件(20.0 °C~29.9 °C,间隔为0.1 °C)的降维前后模型计算平均时间进行了比较,其中降维后模型计算平均时间包括第1次计算POD基底的时间.计算时间对比如图9所示.

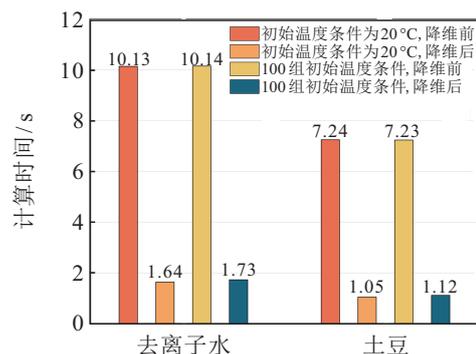


图9 计算时间对比

从图9可以看出,采用POD方法能够大大缩减模型的计算时间.当初始温度条件为 20.0°C 时,加热去离子水和土豆的计算速度分别提升了83.8%、85.5%.当初始温度条件为100组不同温度时,加热去离子水和土豆的平均计算速度分别提升了82.9%、84.5%.由此可见,本文所提基于POD的微波加热过程求解方法具有较快的求解速度.

4 结论

本文针对微波加热媒质过程中求解媒质温度分布问题,提出了一种基于POD的快速求解方法.通过构造瞬像矩阵,从而得到全阶POD基底.在满足求解精度的条件下,截取较低维的POD模态,代入原始高阶的加热模型,得到降维后的微波加热非线性微分方程组.通过对 TE_{10} 波在矩形波导中的传播特点进行分析,从而得到具有显性表达式的耗散功率表达式,并通过求解去离子水和土豆在加热过程中的温度分布,对所提降维方法的准确性进行了验证.仿真结果表明,与原始高阶模型相比,在求解去离子水的加热过程中,降维后模型的最大相对误差仅为0.0221,初始温度条件为 20.0°C 和100组不同温度时计算速度分别提升了83.8%、82.9%.当被加热媒质为土豆时,最大相对误差仅为0.0141,初始温度条件为 20.0°C 和100组不同温度时计算速度分别提升了85.5%、84.5%.两例数值计算结果表明,本文所提求解方法能够在提高求解速度的同时保证较高的计算精度.在后续的研究中,可与广泛应用且具有较高计算精度的FEM软件结合进行开发,对微波加热媒质过程温度分布的快速计算和实时控制具有较高的工程应用价值.

参考文献(References)

- [1] Li W X, Ye J H, Yang Y, et al. Double-ridged waveguide for efficiently heating ultrafine filament fibers[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2023, 200: 123543.
- [2] Zhang L T, Zhang Z H, Yu W X, et al. Review of the application of microwave heating technology in asphalt pavement self-healing and de-icing[J]. *Polymers*, 2023, 15(7): 1696.
- [3] Guo Q S, Sun D W, Cheng J H, et al. Microwave processing techniques and their recent applications in the food industry[J]. *Trends in Food Science & Technology*, 2017, 67: 236-247.
- [4] Wojnarowicz J, Chudoba T, Lojowski W. A review of microwave synthesis of zinc oxide nanomaterials: Reactants, process parameters and morphologies[J]. *Nanomaterials*, 2020, 10(6): 1086.
- [5] Yang B, Huang H B, Ma H T, et al. Calculation of microwave heating temperature distribution based on SVD truncation[J]. *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, 2022, 56(4): 238-258.
- [6] Campañone L A, Zaritzky N E. Mathematical analysis of microwave heating process[J]. *Journal of Food Engineering*, 2005, 69(3): 359-368.
- [7] Wäppling-Raaholt B, Scheerhawk N, Galt S, et al. A combined electromagnetic and heat transfer model for heating of foods in microwave combination ovens[J]. *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, 2002, 37(2): 97-111.
- [8] de Almeida S O, Zitha P L J, Chapiro G. A method for analyzing electromagnetic heating assisted water flooding process for heavy oil recovery[J]. *Transport in Porous Media*, 2022, 144(1): 89-110.
- [9] Zhong J Q, Liang S, Yuan Y P, et al. Coupled electromagnetic and heat transfer ODE model for microwave heating with temperature-dependent permittivity[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2016, 64(8): 2467-2477.
- [10] Vilayannur R S, Puri V M, Anantheswaran R C. Size and shape effect on nonuniformity of temperature and moisture distributions in microwave heated food materials: Part I simulation[J]. *Journal of Food Process Engineering*, 1998, 21(3): 209-233.
- [11] Wu W F, Zhang J K, Lu J S, et al. Temperature field distribution analysis for cargo oil on microwave heating process[J]. *Thermal Science*, 2020, 24(5): 3413-3421.
- [12] Wang C R, Yao W, Zhu H C, et al. Uniform and highly efficient microwave heating based on dual-port phase-difference-shifting method[J]. *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, 2021, 31(9): e22784.
- [13] Bhoi N K, Patel D K, Singh H, et al. Multi-physics simulation study of microwave hybrid sintering of aluminium and mechanical characteristics[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 2022, 236(5): 1779-1789.
- [14] Liang Y, Gao X W, Xu B B, et al. A new alternating iteration strategy based on the proper orthogonal decomposition for solving large-scaled transient nonlinear heat conduction problems[J]. *Journal of Computational Science*, 2020, 45: 101206.
- [15] Liu J C, Li H, Liu Y, et al. Reduced-order finite element method based on POD for fractional Tricomi-type equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(5): 647-658.

- [16] 郑保敬, 梁钰, 高效伟, 等. 功能梯度材料动力学问题的POD模型降阶分析[J]. 力学学报, 2018, 50(4): 787-797.
(Zheng B J, Liang Y, Gao X W, et al. Analysis for dynamic response of functionally graded materials using pod based reduced order model[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(4): 787-797.)
- [17] 朱强华, 杨恺, 梁钰, 等. 基于特征正交分解的一类瞬态非线性热传导问题的新型快速分析方法[J]. 力学学报, 2020, 52(1): 124-138.
(Zhu Q H, Yang K, Liang Y, et al. A novel fast algorithm based on model order reduction for one class of transient nonlinear heat conduction problem[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(1): 124-138.)
- [18] Dehghan M, Hooshyarfarzin B, Abbaszadeh M. Numerical simulation based on a combination of finite-element method and proper orthogonal decomposition to prevent the groundwater contamination[J]. Engineering with Computers, 2022, 38(4): 3445-3461.
- [19] 杨彪, 高皓, 李鑫培, 等. 基于一致性理论的多源微波加热温度均匀性优化[J]. 控制与决策, 2023, 38(4): 989-998.
(Yang B, Gao H, Li X P, et al. Temperature uniformity optimization of multi-source microwave heating based on consistency theory[J]. Control and Decision, 2023, 38(4): 989-998.)
- [20] 钟佳岐, 梁山, 熊庆宇. 德拜媒质微波加热过程的 H_∞ 保性能温度跟踪控制[J]. 自动化学报, 2018, 44(8): 1518-1527.
(Zhong J Q, Liang S, Xiong Q Y. H_∞ guaranteed cost temperature tracking control for microwave heating Debye media process[J]. Acta Automatica Sinica, 2018, 44(8): 1518-1527.)
- [21] Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. III. Dynamics and scaling[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, 45(3): 583-590.
- [22] Zhong J Q, Liang S, Xiong Q Y, et al. Approximate microwave heating models for global temperature profile in rectangular medium with TE_{10} mode[J]. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2015, 122(1): 487-495.
- [23] Meng Q, Lan J Q, Hong T, et al. Effect of the rotating metal patch on microwave heating uniformity[J]. Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy, 2018, 52(2): 94-108.

作者简介

杨彪(1974—), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 从事复杂过程的优化和控制、多智能体的协调输出与分布式协同控制等研究, E-mail: ybiaocn@163.com;

黄宏彬(1997—), 男, 硕士生, 从事冶金多物理场耦合分析及数值计算、微波加热温度模型降维等研究, E-mail: huanghongbin86@163.com;

杜庆治(1977—), 男, 高级实验师, 硕士, 从事微波加热模型建立与仿真等研究, E-mail: 5796048@qq.com;

吴照刚(1997—), 男, 硕士生, 从事微波加热控制系统的数值计算与研发、多智能体的协调输出与分布式协同控制等研究, E-mail: 1778775592@qq.com;

彭飞云(1997—), 男, 硕士生, 从事冶金多物理场耦合分析、微波冶金过程智能控制等研究, E-mail: 2663019546@qq.com;

韩泽民(1998—), 男, 硕士生, 从事微波加热控制系统的数值计算与研发、微波冶金过程智能控制等研究, E-mail: 1585356273@qq.com.