



# 控制与决策

CONTROL AND DECISION



## 基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的高维多目标进化算法

曾亮, 向思颖, 曾维钧, 王嘉诚, 王珊珊, 李维刚

### 引用本文:

曾亮, 向思颖, 曾维钧, 王嘉诚, 王珊珊, 李维刚. 基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3199–3206.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0786>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for many-objective optimization

控制与决策. 2021, 36(8): 1804–1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

#### 基于向量角分解的高维多目标进化算法

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

#### 一种求解约束多目标问题的协作进化算法

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems

控制与决策. 2021, 36(11): 2656–2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

#### 基于多种群分解预测的动态多目标引力搜索算法

Dynamic multi-objective gravitational searching algorithm based on multi-population decomposition prediction

控制与决策. 2021, 36(12): 2910–2918 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1002>

#### 一种基于MOEA/D的组合权重方法

A combination weight method based on MOEA/D

控制与决策. 2021, 36(12): 3056–3062 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0592>

# 基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的 高维多目标进化算法

曾亮<sup>1,2</sup>, 向思颖<sup>1</sup>, 曾维钧<sup>1</sup>, 王嘉诚<sup>1</sup>, 王珊珊<sup>1,2†</sup>, 李维刚<sup>3</sup>

(1. 湖北工业大学 电气与工程学院, 武汉 430068; 2. 湖北工业大学 太阳能高效利用及储能运行控制  
湖北省重点实验室, 武汉 430068; 3. 武汉科技大学 信息科学与工程学院, 武汉 430081)

**摘要:** 为了解决现有多目标进化算法难以处理复杂帕累托前沿的问题, 提出一种基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的高维多目标进化算法(improved angle penalized distance and adaptive reference vector based many-objective evolutionary algorithm, PDAREA). 算法中采用改进的角度惩罚距离策略进行个体选择, 有效减少种群中个体收敛性与分布性的冲突. 自适应参考向量策略能够根据目标函数的变化动态调整参考向量的分布, 可有效改善个体在帕累托前沿上分布不均的问题. 通过参考向量再生策略, 提高算法处理带有不规则帕累托前沿问题的能力和效率. 最后, 将所提出算法与7个主流算法进行仿真实验对比, 并应用于两个实际问题中. 结果表明, 所提出算法在求解带有复杂帕累托前沿的高维多目标优化问题上具有较强的竞争力, 能有效平衡种群收敛性与分布性.

**关键词:** 高维多目标优化; 进化算法; 角度惩罚距离; 自适应参考向量; 帕累托前沿; 收敛性; 分布性

中图分类号: TP18 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyj.2023.0786

引用格式: 曾亮, 向思颖, 曾维钧, 等. 基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3199-3206.

## Improved angle penalized distance and adaptive reference vector based many-objective evolutionary algorithm

ZENG Liang<sup>1,2</sup>, XIANG Si-ying<sup>1</sup>, ZENG Wei-jun<sup>1</sup>, WANG Jia-cheng<sup>1</sup>, WANG Shan-shan<sup>1,2†</sup>, LI Wei-gang<sup>3</sup>

(1. School of Electrical and Electronic Engineering, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China; 2. Hubei Key Laboratory for High-efficiency Utilization of Solar Energy and Operation Control of Energy Storage System, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China; 3. School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that the existing multi-objective evolutionary algorithm is difficult to deal with the complex Pareto front (PF), an improved angle penalized distance and adaptive reference vector based multi-objective evolutionary algorithm (PDAREA) is proposed. An improved angle penalty distance strategy is used for individual selection to efficiently reduce the conflict between individual convergence and distribution in the population. The adaptive reference vector strategy can dynamically adjust the distribution of reference vectors according to the change of the objective function, which effectively improves the problem of uneven distribution of individuals on PF. Through the reference vector regeneration strategy, the ability and efficiency of the algorithm to deal with problems with irregular Pareto fronts is promoted. Finally, the proposed algorithm is compared with seven mainstream algorithms in simulation experiments, and applied to two practical applications. The results show that the proposed algorithm is highly competitive in solving many-objective optimization problems with complex Pareto fronts, which can effectively balance the convergence and distribution of the population.

**Keywords:** many-objective optimization; evolutionary algorithm; angle penalized distance; adaptive reference vector; Pareto front; convergence; distribution

收稿日期: 2023-06-07; 录用日期: 2023-10-16.

基金项目: 国家重点研发计划项目(2018YFC0116100); 湖北省重点研发计划项目(2020BAB114, 2023BAB094); 湖北省教育厅科学研究计划重点项目(D20211402); 太阳能高效利用及储能运行控制湖北省重点实验室2023年度开放研究基金项目(HBSEES202309).

责任编委: 张国山.

†通讯作者. E-mail: wangshanshan@hbut.edu.cn.

\*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

## 0 引言

在现实世界中,多种目标冲突的优化问题被称为多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOPs),其通常需要找到一个 Pareto 最优解集或非支配解集<sup>[1]</sup>.具有超过3个优化目标的高维多目标优化问题(many-objective optimization problems, MaOPs)<sup>[2]</sup>更为普遍.常见的多目标优化问题包括物资分配管理<sup>[3]</sup>、路径规划问题<sup>[4]</sup>等,因此,对于多目标优化问题的研究愈发重要.

多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithms, MOEAs)具有更好的适应性和解决 MOPs 的能力.尽管 NSGA-II<sup>[5]</sup>和 MOEA-PPF<sup>[6]</sup>在解决 MOPs 时具有影响力,但在处理 MaOPs 时获得的 Pareto 最优解集的收敛性和多样性并不理想<sup>[7-8]</sup>.主要原因是:随着目标数量的增加,非支配个体的比重呈现指数增长的趋势,导致算法的选择压力不足.为解决以上难题,研究人员从不同切入点提出了多种性能卓越的高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithms, MaOEAs),按照算法的特点大致可归类为3种类型.

第1类是基于松弛支配关系的 MaOEAs.该类算法体现了新的支配关系或修正支配关系,通过调整参数扩大支配范围并增强了选择压力.常用的方法有:模糊支配<sup>[9]</sup>、网格支配<sup>[10]</sup>、角度支配<sup>[11]</sup>以及动态角度向量支配<sup>[12]</sup>.

第2类是基于性能指标的 MaOEAs.其在环境选择过程中利用性能指标值来选择个体,从而引导种群进化.常见的性能指标有:超体积 HV<sup>[13]</sup>、IGD 指标<sup>[14-15]</sup>、GD 指标<sup>[16]</sup>以及修改的反世代距离 IGD+ 指标<sup>[17]</sup>.

第3类是基于分解的 MaOEAs.基于聚合函数和参考向量设计的 MaOEAs 都是基于分解的 MaOEAs.分解的思想主要是将多目标问题拆解成若干个目标数更低的子问题,然后在进化框架下同时优化每个子问题.文献[18]对传统的切比雪夫聚合函数进行分析,得知其没有考虑权重向量与候选解间的关系,进而提出一种改进的切比雪夫聚合函数.此外,均匀分布参考向量提高了算法在规则前沿问题上的性能,但在不规则前沿问题上表现不佳.

针对以上问题,本文提出基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的多目标进化算法 PDAREA.通过对具有复杂 PF 的多目标优化问题的研究,设计一种改进的角度惩罚距离策略,以保证种群进化过程中的收敛性与分布性平衡,确保更加优秀的个体进

入下一代.为了提升种群个体在 PF 上的分布性,采用一种自适应参考向量策略,以适应不同目标问题的量纲.面对具有不规则 PF 的多目标问题,采取参考向量再生策略,提升算法 Pareto 最优解在 PF 上的密度,从而提升处理带有复杂不规则 PF 问题的能力.实验结果表明,PDAREA 在处理复杂 PF 前沿问题上具有一定的优势.

## 1 相关研究

### 1.1 多目标优化问题

一般情况下,以最小化为例,多目标优化问题的数学表达式为

$$\begin{aligned} \min F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)); \\ \text{s.t. } x &\in \Omega, \Omega \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为决策向量,  $\Omega$  为决策空间,  $F(x)$  由  $M$  个目标向量组成,  $f_i(x)$  为第  $i$  个目标向量.

### 1.2 角度惩罚距离

角度惩罚距离策略(APD)能够缓解高维多目标优化过程中算法收敛性与分布性的冲突<sup>[19]</sup>.该方法既考虑了个体在进化过程中的收敛性,也考虑了种群个体在目标空间中的分布性.具体表达式如下:

$$d_{t,i,j} = \left[ 1 + M \cdot \left( \frac{t}{t_{\max}} \right)^\alpha \cdot \frac{\theta_{t,i,j}}{\gamma_{v_{t,j}}} \right] \cdot \|f'_{t,j}\|. \quad (2)$$

其中:  $M$  为目标数;  $t$  和  $t_{\max}$  分别为当前进化代数和最大进化代数;  $\alpha$  为预设的参数;  $\theta_{t,i,j}$  为目标向量与参考向量的夹角,用作为多样性准则;  $\gamma_{v_{t,j}}$  为参考向量  $v_{t,j}$  与其他参考向量夹角的最小值;  $\|f'_{t,j}\|$  为欧几里德距离,用于评价个体的收敛性. APD 值越小,表示个体的综合性能越优.

## 2 基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的多目标进化算法

### 2.1 算法整体框架

**算法1** PDAREA 整体框架.

输入: 种群规模  $N$ , 目标维数  $M$ , 最大迭代次数  $t_{\max}$ , 参考向量集  $V_0$ ;

输出: 种群  $P_{t_{\max}}$ .

step 1:  $P_0 = \text{random initialize}(N)$ ;

step 2:  $t = 1$ ;

step 3: while  $t < t_{\max}$  do;

step 4:  $Q_t = \text{genetic operation}(P_t)$ ;

step 5:  $P_t = P_t \cup Q_t$ ;

step 6:  $P_{t+1} = \text{environmental selection}(t, P_t, V_t)$ ;

step 7:  $V_{t+1} =$

reference vector adaption( $t, P_t + 1, V_t, V_0$ );  
 step 8:  $V_{t+1}^* =$   
 reference regeneration strategy( $t, P_t, V^*$ );  
 step 9:  $t = t + 1$ ;  
 step 10: end while;  
 step 11: return  $P_t$ .

### 2.2 改进角度惩罚距离策略

虽然角度惩罚距离策略可在一定程度上解决高维目标下算法的收敛性与分布性不平衡现象,但其仍然存在不足之处. 例如在迭代过程的后期,该策略会不可避免地选择被支配的个体进入下一代,导致算法收敛性变差. 另外,该策略会淘汰父代中性能优越的个体,导致种群出现退化的现象.

如图 1 所示,在目标空间中设  $F_4$ 、 $F_5$  和  $F_6$  为父代个体,经过交叉变异操作后生成子代  $F_1$ 、 $F_2$  和  $F_3$ ,再经过种群划分后得到子种群  $P_1 = \{F_1, F_4\}$ ,  $P_2 = \{F_2, F_5\}$  和  $P_3 = \{F_3, F_6\}$ . 根据角度惩罚距离策略,部分个体因为其较小的 APD 值而被选入下一代,但从 Pareto 支配关系来分析,该个体为支配解,应当被淘汰. 如图 1 中个体  $F_1$  优于  $F_4$ ,  $F_2$  优于  $F_5$ ,但从支配关系得出的结论为  $F_4$  支配  $F_1$ ,  $F_5$  支配  $F_2$ . 由此可知,APD 策略可能选中被支配个体进入下一代.

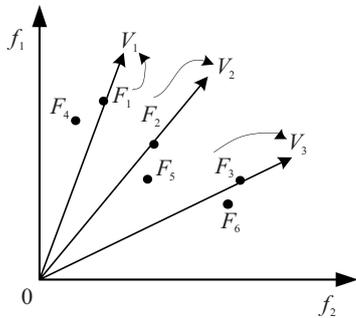


图 1 改进角度惩罚距离策略示意

为了改善以上所述的劣势,对角度惩罚距离策略进行以下改进:

1) 首先,利用 Pareto 非支配排序对各子种群的个体进行分类,仅选择其中的非支配个体;然后,根据角度惩罚距离选出其中距离较小的个体进入新的种群中.

2) 另外,由于进化开始阶段的个体随机分布在目标空间中,如果通过种群分解得出的部分子种群为空集,则可能会导致初始种群个体的规模小于选中的个体数目. 在使用 Pareto 非支配排序法时,为了达到设定的种群规模,可能需要更多的迭代次数,这会导致算法收敛速度放缓. 因此,本文设置参数阈值与种群规模的大小一致,此时采用非支配排序法将个体分

层.

改进后的角度惩罚距离策略的具体步骤如算法 2 所示.

### 算法 2 改进角度惩罚距离策略.

输入: 合并种群  $Q_t$ , 单位参考向量集  $V_t$ ;

输出: 种群  $P_{t+1}$ .

step 1: for  $j = 1$  to  $N$ ;  
 step 2: if  $N = n$ ;  
 step 3:  $P_{i,j} = ND - \text{sort}(P_t)$  /\*选择非支配的个体\*/;  
 step 4: end if;  
 step 5: end for;  
 step 6: for  $i = 1$  to  $|P_t|$  do;  
 step 7:  $f'_{t,i} = f_{t,i} - z_t^{\min}$  /\*目标值转换\*/;  
 step 8: end for;  
 step 9: for  $i = 1$  to  $|P_t|$  do;  
 step 10:  $k = \text{argmax} \cos\theta_{t,i,j}$ ;  
 step 11:  $P_{t,k} = I_{t,j} | k = \text{argmax} \cos\theta_{t,i,j}$  /\*种群分解操作\*/;  
 step 12: end for;  
 step 13:  $d_{t,i,j} = \left[ 1 + M \cdot \left( \frac{t}{t_{\max}} \right)^\alpha \cdot \frac{\theta_{t,i,j}}{\gamma_{v_{t,j}}} \right] \cdot \|f'_{t,j}\|$   
 /\*角度惩罚距离计算\*/;  
 step 14: for  $j = 1$  to  $N$ ;  
 step 15:  $k = \text{argmin} d_{t,i,j}, i = 1, \dots, |\bar{P}_{t,j}|$ ;  
 step 16:  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup I_{t,k}$  /\*精英选择策略\*/;  
 step 17: end for;  
 step 18: return  $P_{t+1}$ .

### 2.3 自适应参考向量策略

在高维多目标优化问题中,不同的目标会被缩放至不同的范围,但均匀分布的参考向量不会产生均匀分布的解. 因此,采取一种自适应参考向量策略. 关于自适应参考向量的具体内容可参见文献[19].

### 2.4 参考向量再生策略

对于现实应用问题而言,PF 的几何结构几乎不可能非常规则,即有着退化、不可分解和多模态等特点. 在这种情况下,预定义的参考向量不能均匀划分 PF 前沿,导致算法的性能下降. 为了化解以上由不规则 PF 前沿引起的难题,本文将采用一种参考向量再生策略,该策略主要是生成新的参考向量,并替代那些未使用的参考向量.

参考向量再生表达式如下:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{u_r}{\|u_r\|}, & P_{t,j} == \emptyset; \\ V_{t,j}^*, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

算法3为参考向量再生策略的详细步骤.

**算法3** 参考向量再生策略.

输入: 种群  $P_t$ , 参考向量集  $V_t^*$ ;

输出: 新的参考向量集  $V_{t+1}^*$ .

step 1: for  $i = 1$  to  $|V_t^*|$  do;

step 2: if  $P_{t,i} == \emptyset$  then;

step 3: for  $j = 1$  to  $N$  do;

step 4:  $u_{r,j} \leftarrow$  从  $[0, z_{t,j}^{\max}]$  上随机选择一个值

step 5: /\* 其中  $z_{t,j}^{\max}$  为最大的目标值 \*/;

step 6: end for;

step 7:  $V_{t+1,i}^* = \frac{u_r}{\|u_r\|}$ ;

step 8: else;

step 9:  $V_{t+1,i}^* = V_{t,i}^*$ ;

step 10: end if;

step 11: end for.

首先,对各目标进行目标值转换和种群分解操作.然后,根据种群划分的结果确定参考向量:如果子种群为空子种群,则采用一个单位参考向量代替关联的参考向量;如果子种群为非空集,则相关联的参考向量维持不变.

### 2.5 算法复杂度分析

本文算法的时间复杂度来源于算法1的主循环部分.除了产生参考向量以及产生后代的遗传操作,时间复杂度主要表现在改进角度惩罚距离策略和自适应参考向量策略上.对于大小为  $N$ 、目标数为  $M$  的合并种群,在最坏的情况下,种群空间划分的时间复杂度为  $O(MN^2)$ .改进角度惩罚距离选择的时间复杂度为  $O(MN^2)$ ,精英选择策略的时间复杂度为  $O(N^2)$ ,参考点自适应化的时间复杂度为  $O(MN/f_r \cdot t_{\max})$ .算法3参考向量再生策略的复杂度体现在种群与参考向量的关联上,大小为  $O(MNK)$ .考虑以上所有的计算,算法PDAREA运行一代所需的最大计算复杂度为  $O(MN^2)$ .

## 3 实验与分析

将PDAREA与7个性能较优的多目标进化算法MOEAAAD<sup>[20]</sup>、CMOEA\_MS<sup>[21]</sup>、KnEA<sup>[22]</sup>、RVEA<sup>[23]</sup>、GrEA<sup>[24]</sup>、MOEAD<sup>[18]</sup>和SPEA-R<sup>[25]</sup>进行仿真实验对比,以验证PDAREA的综合性能.

### 3.1 测试问题

本文选用DTLZ<sup>[26]</sup>、WFG<sup>[27]</sup>和MaF<sup>[28]</sup>中的部分测试函数.其中,MaF测试问题有着多种不同类型的帕累托前沿,这要求算法在高维多目标空间中具有维持种群收敛性和分布性的能力.它们有着规则形状帕累托前沿和不规则形状帕累托前沿.

### 3.2 实验设置

1) 种群规模.种群规模与预设的权重向量有关,为保证实验的公平性,各个算法的种群大小保持一致,算法的种群规模与均匀分布的权重向量有关.目标个数为{3, 5, 8, 10}分别对应的种群规模为{91, 210, 156, 275}.

2) 算法参数设置.对于模拟二进制交叉算子,其交叉概率和交叉分布指数分别为  $P_c = 1$  和  $\eta_c = 30$ ;对于多项式变异算子,其变异概率和变异指数分别为  $\eta_m = 20$  和  $P_m = 1/D$ ,  $D$  为决策变量数.除了以上的通用设置以外,其他对比算法的设置均遵循原文的设置.其中:KnEA的拐点频率  $T = 0.5$ ;PDAREA和RVEA有着相同的参数  $\alpha$  和  $f_r$ ,分别用于平衡算法的收敛性与分布性以及控制参考点的更新频率,设置  $\alpha = 2$ ,  $f_r = 0.2$ ;GrEA中的目标空间分解数设为  $\text{div} = 10$ .

3) 决策变量设置.对于DTLZ和WFG系列测试函数,问题的维数设为  $D = M + K - 1$ ,DTLZ2~DTLZ6和WFG1~WFG7中  $K = 10$ ,DTLZ7中  $K = 20$ ;对于MaF系列测试函数,问题的维数设为  $D = M + K - 1$ ,MaF2、MaF4和MaF5的测试问题中  $K = 10$ ,MaF7中  $K = 20$ ,MaF8和MaF9测试问题中  $D = 2$ .

4) 算法终止条件.各算法在测试问题上均独立运行20次,记录平均值和标准差.当目标数为{3, 5, 8, 10}分别达到最大评价次数(MFE){60 000, 100 000, 140 000, 200 000}时,算法停止运行,运行代数为  $T = \text{MFE}/N$ .

### 3.3 实验结果分析

#### 3.3.1 规则形状前沿测试问题的结果分析

将本文的PDAREA与MOEAAAD、CMOEA\_MS、KnEA、RVEA、GrEA、MOEAD、SPEA-R在具有规则形状PF的8个测试问题上进行实验比较,综合评价PDAREA的性能优劣.经过20次独立运行获得的HV均值和标准差的对比统计结果如表1所示.为了区分不同算法的性能差异,采用显著性差异水平为5%的Wilcoxon秩和检验.

由表1可见,本文算法PDAREA在DTLZ2、WFG4~WFG6上获得了较优的实验结果.对于DTLZ2测试问题,在5和8目标中,PDAREA均获得了最优结果;在3目标中,PDAREA与效果最好的MOEAD相似.对于DTLZ4问题,PDAREA在5和10目标问题上表现最好.WFG4测试问题的特点为多模态,在3和5目标中,PDAREA的优势突出.WFG5

表 1 8 种算法在规则前沿问题上的 HV 平均值与标准差

问题	M	MOEAAAD	CMOEA_MS	KnEA	RVEA	GrEA	MOEAD	SPEA-R	PDAREA
DTLZ2	3	5.541 5e-1 (1.39e-3)	5.540 3e-1 (1.27e-3)	5.387 9e-1 (5.30e-3)	5.595 9e-1 (2.88e-5)	5.4399 e-1 (6.94e-4)	<b>5.596 1e-1 (4.87e-6)</b>	5.572 4e-1 (1.39e-3)	5.595 8e-1 (4.02e-5)
	5	8.122 4e-1 (4.97e-4)	7.832 9e-1 (2.81e-3)	7.908 7e-1 (2.42e-3)	8.124 4e-1 (3.93e-4)	8.120 6e-1 (9.35e-4)	8.122 1e-1 (3.46e-4)	8.092 4e-1 (9.81e-4)	<b>8.125 1e-1 (3.18e-4)</b>
	8	9.230 5e-1 (1.65e-3)	8.514 7e-1 (1.04e-2)	8.888 5e-1 (6.76e-3)	9.239 9e-1 (1.90e-4)	9.064 3e-1 (4.85e-4)	9.241 3e-1 (3.16e-4)	9.190 0e-1 (1.26e-3)	<b>9.249 4e-1 (3.28e-4)</b>
	10	9.693 0e-1 (1.51e-3)	<b>9.921 5e-1 (1.04e-2)</b>	9.222 4e-1 (8.46e-2)	9.697 4e-1 (1.27e-4)	9.633 5e-1 (7.98e-4)	9.697 4e-1 (1.94e-4)	9.649 3e-1 (6.66e-4)	9.697 1e-1 (1.56e-4)
DTLZ4	3	5.580 7e-1 (2.91e-4)	5.117 0e-1 (8.46e-2)	4.968 1e-1 (1.39e-1)	<b>5.595 8e-1 (3.19e-5)</b>	4.431 7e-1 (1.55e-1)	4.145 4e-1 (1.53e-1)	5.552 3e-1 (1.73e-3)	5.595 8e-1 (2.85e-5)
	5	8.113 8e-1 (1.21e-3)	7.832 0e-1 (2.61e-3)	7.946 4e-1 (2.13e-3)	8.123 9e-1 (2.93e-4)	8.123 2e-1 (8.36e-4)	7.136 3e-1 (9.73e-2)	8.080 2e-1 (1.36e-3)	<b>8.124 2e-1 (4.49e-4)</b>
	8	9.236 0e-1 (2.31e-3)	8.318 9e-1 (1.70e-2)	9.026 7e-1 (4.60e-3)	9.239 4e-1 (2.62e-4)	<b>9.272 3e-1 (7.36e-4)</b>	8.458 3e-1 (5.29e-2)	9.166 5e-1 (1.40e-3)	9.228 9e-1 (4.92e-3)
	10	9.666 0e-1 (2.17e-3)	8.822 2e-1 (1.71e-2)	9.587 5e-1 (5.03e-3)	9.698 0e-1 (1.31e-4)	9.651 4e-1 (7.50e-4)	9.180 6e-1 (2.85e-2)	9.630 0e-1 (8.78e-4)	<b>9.698 7e-1 (1.90e-4)</b>
WFG4	3	5.180 8e-1 (2.04e-4)	5.289 0e-1 (3.77e-3)	5.379 3e-1 (3.02e-3)	5.508 4e-1 (1.44e-3)	5.453 9e-1 (5.54e-4)	5.395 4e-1 (1.80e-3)	5.555 1e-1 (1.43e-3)	<b>5.584 2e-1 (1.53e-3)</b>
	5	8.035 8e-1 (1.14e-3)	7.055 0e-1 (8.16e-3)	7.859 4e-1 (2.04e-3)	7.993 9e-1 (1.67e-3)	7.949 2e-1 (2.08e-3)	7.098 8e-1 (1.57e-2)	8.018 6e-1 (1.36e-3)	<b>8.088 9e-1 (1.28e-3)</b>
	8	<b>9.183 2e-1 (9.84e-4)</b>	7.09 83e-1 (1.14e-2)	9.092 7e-1 (2.37e-3)	9.122 8e-1 (2.76e-3)	9.114 5e-1 (1.84e-3)	4.700 5e-1 (6.50e-2)	9.182 5e-1 (1.31e-3)	9.133 3e-1 (1.80e-3)
	10	9.586 0e-1 (1.59e-3)	7.651 2e-1 (1.34e-2)	9.590 3e-1 (1.30e-3)	9.520 7e-1 (3.07e-3)	9.203 9e-1 (3.70e-3)	4.690 8e-1 (6.94e-2)	<b>9.610 2e-1 (1.59e-3)</b>	9.541 6e-1 (3.05e-3)
WFG5	3	<b>5.180 8e-1 (2.04e-4)</b>	5.006 8e-1 (2.43e-3)	5.013 8e-1 (3.26e-3)	5.161 9e-1 (5.73e-4)	5.034 3e-1 (4.79e-4)	5.012 3e-1 (5.03e-3)	5.159 2e-1 (1.49e-3)	5.165 9e-1 (4.38e-4)
	5	7.605 4e-1 (4.72e-4)	6.817 9e-1 (5.86e-3)	7.431 2e-1 (1.47e-3)	7.595 1e-1 (7.29e-4)	7.550 7e-1 (1.98e-3)	6.746 4e-1 (1.53e-2)	7.595 7e-1 (8.70e-4)	<b>7.687 3e-1 (1.54e-3)</b>
	8	8.626 5e-1 (2.91e-4)	7.201 6e-1 (8.60e-3)	8.462 6e-1 (3.48e-3)	8.615 0e-1 (3.52e-4)	8.617 7e-1 (9.54e-4)	5.293 7e-1 (1.58e-2)	8.623 7e-1 (5.66e-4)	<b>8.631 8e-1 (4.64e-4)</b>
	10	9.025 0e-1 (2.90e-4)	7.657 4e-1 (1.26e-2)	8.975 5e-1 (9.02e-4)	9.011 8e-1 (5.83e-4)	8.794 3e-1 (3.23e-3)	5.364 7e-1 (1.67e-2)	<b>9.033 5e-1 (3.07e-4)</b>	9.010 7e-1 (8.33e-4)
WFG6	3	4.711 9e-1 (1.18e-2)	4.865 6e-1 (1.26e-2)	4.791 4e-1 (1.56e-2)	5.022 6e-1 (1.28e-2)	4.921 1e-1 (1.12e-2)	4.861 5e-1 (1.92e-2)	5.011 3e-1 (1.18e-2)	<b>5.064 4e-1 (1.25e-2)</b>
	5	7.358 8e-1 (1.01e-2)	6.697 0e-1 (1.72e-2)	7.165 8e-1 (1.45e-2)	7.360 2e-1 (1.01e-2)	7.404 8e-1 (1.33e-2)	6.070 5e-1 (2.32e-2)	<b>7.417 6e-1 (9.48e-3)</b>	7.322 1e-1 (1.14e-2)
	8	8.395 9e-1 (1.74e-2)	6.605 2e-1 (2.53e-2)	8.098 0e-1 (2.14e-2)	8.342 2e-1 (1.76e-2)	8.454 3e-1 (1.55e-2)	2.865 7e-1 (2.50e-2)	<b>8.538 8e-1 (1.06e-2)</b>	8.364 8e-1 (1.89e-2)
	10	8.761 2e-1 (1.58e-2)	6.996 7e-1 (1.79e-2)	8.772 3e-1 (1.52e-2)	8.695 4e-1 (1.56e-2)	8.589 4e-1 (1.55e-2)	2.822 4e-1 (1.57e-2)	8.773 2e-1 (1.30e-2)	<b>8.827 5e-1 (1.74e-2)</b>
WFG7	3	5.568 7e-1 (4.06e-4)	5.569 6e-1 (3.34e-3)	5.417 9e-1 (3.59e-3)	5.520 2e-1 (8.21e-4)	5.439 9e-1 (6.41e-4)	5.249 3e-1 (6.64e-3)	5.540 1e-1 (9.03e-4)	<b>5.578 7e-1 (9.35e-4)</b>
	5	8.070 0e-1 (6.27e-4)	7.208 4e-1 (1.18e-2)	7.956 9e-1 (2.15e-3)	8.024 4e-1 (8.21e-4)	<b>8.104 7e-1 (7.65e-4)</b>	6.582 3e-1 (1.63e-2)	8.046 5e-1 (8.38e-4)	8.040 3e-1 (8.24e-4)
	8	9.193 3e-1 (4.37e-4)	7.413 2e-1 (1.60e-2)	8.946 4e-1 (7.02e-3)	9.031 8e-1 (3.15e-3)	<b>9.223 9e-1 (1.11e-3)</b>	3.667 3e-1 (3.35e-2)	9.163 6e-1 (1.17e-3)	9.033 8e-1 (4.35e-3)
	10	9.623 4e-1 (8.67e-4)	8.000 5e-1 (1.06e-2)	<b>9.655 5e-1 (1.55e-3)</b>	9.515 6e-1 (1.88e-3)	9.430 3e-1 (2.60e-3)	3.581 8e-1 (1.26e-2)	9.617 0e-1 (8.87e-4)	9.516 9e-1 (2.02e-3)
MaF2	3	2.377 9e-1 (5.60e-4)	2.410 8e-1 (1.00e-3)	<b>2.432 5e-1 (7.66e-4)</b>	2.289 4e-1 (1.46e-3)	2.369 4e-1 (8.69e-4)	2.380 4e-1 (6.16e-4)	2.353 2e-1 (8.77e-4)	2.345 7e-1 (2.50e-3)
	5	1.806 7e-1 (1.66e-3)	1.913 3e-1 (1.96e-3)	2.017 8e-1 (1.67e-3)	1.752 9e-1 (2.08e-3)	<b>2.032 6e-1 (8.87e-4)</b>	1.867 4e-1 (3.72e-4)	1.695 7e-1 (1.47e-3)	1.927 0e-1 (1.75e-3)
	8	1.911 6e-1 (3.86e-3)	<b>2.377 6e-1 (4.87e-3)</b>	2.093 5e-1 (1.30e-2)	1.684 2e-1 (4.09e-3)	2.355 8e-1 (1.46e-3)	2.070 8e-1 (4.53e-4)	1.776 5e-1 (1.78e-3)	2.030 2e-1 (3.79e-3)
	10	1.921 2e-1 (2.29e-3)	<b>2.231 5e-1 (5.19e-3)</b>	1.828 5e-1 (1.22e-2)	1.673 4e-1 (7.43e-3)	2.181 1e-1 (1.95e-3)	2.107 2e-1 (3.75e-4)	1.820 9e-1 (1.96e-3)	1.929 6e-1 (4.49e-3)
MaF5	3	5.589 5e-1 (2.23e-4)	5.031 7e-1 (6.89e-2)	<b>4.958 9e-1 (1.39e-1)</b>	5.595 5e-1 (4.86e-5)	4.667 7e-1 (1.09e-1)	4.558 1e-1 (1.36e-1)	5.552 6e-1 (1.81e-3)	5.594 9e-1 (3.97e-4)
	5	8.116 9e-1 (8.98e-4)	6.866 9e-1 (1.24e-2)	7.955 3e-1 (3.17e-3)	8.121 8e-1 (3.40e-4)	8.124 2e-1 (9.33e-4)	4.588 9e-1 (1.32e-1)	8.070 8e-1 (1.34e-3)	<b>8.132 1e-1 (2.27e-2)</b>
	8	9.251 1e-1 (4.26e-3)	7.282 2e-1 (2.11e-2)	9.014 6e-1 (4.27e-3)	8.985 7e-1 (2.17e-2)	<b>9.257 2e-1 (6.70e-3)</b>	3.608 5e-1 (9.64e-2)	9.161 6e-1 (1.79e-3)	8.962 3e-1 (3.26e-2)
	10	<b>9.719 6e-1 (2.26e-3)</b>	7.850 0e-1 (1.18e-2)	9.566 8e-1 (2.47e-3)	9.522 1e-1 (2.40e-3)	9.654 4e-1 (1.11e-3)	4.257 0e-1 (4.82e-2)	9.600 9e-1 (1.45e-3)	9.532 7e-1 (2.16e-3)
+/-/=		12/17/3	4/28/2	7/25/0	3/19/10	11/20/1	3/26/3	9/21/2	

问题具有欺骗特性, PDAREA 几乎在所有目标上获得了最好的 HV 值. WFG6 问题具有不可分解的结构, PDAREA 在 3 和 10 目标上表现出极佳的性能. 对于 WFG7, 本文算法在 3 目标上获得了最优解集. 对于 MaF5, PDAREA 在 5 目标上表现最优. 从表 1 中可以看出, PDAREA 在 32 个测试问题中获得 12 个最好结果, 而 MOEAAAD、CMOEA\_MS、KnEA、RVEA、GrEA、MOEAD 和 SPEA-R 的最好结果分别有 3、3、2、2、5、1 和 4 例, 显然 PDAREA 优于对比算法. 综合分析, 在 8 种算法中, PDAREA 的总体性能更佳.

### 3.3.2 不规则形状前沿测试问题的结果分析

将 PDAREA 与 7 种对比算法在不规则形状 PF 的测试问题上进行比较, 经过 20 次独立运行获得的 HV 均值和标准差的对比统计结果如表 2 所示. 可见, PDAREA 在 32 个测试函数中获得 7 个最好结果.

PDAREA 在 DTLZ7 的低维测试问题上表现最佳. DTLZ5 和 MaF9 问题具有退化性质, PDAREA 和 MOEAD 在 DTLZ5 测试问题上获得全部的最优值. PDAREA 获得的结果分别优于对比算法的有 12、18、18、20、18、22 和 22 例, 表明在 8 种算法中, PDAREA 具备较强的处理带有不规则前沿问题的能力.

### 3.3.3 综合分析

由综合实验结果及上述分析可知, 7 种对比算法虽然有着不同的特点, 但在大部分测试问题上展现出的性能不如本文算法 PDAREA. PDAREA 算法在规则和不规则 Pareto 前沿上均具有较为明显的统计意义上的性能优势, 并且在处理非规则高维多目标优化问题时具有较强的竞争力, 具备良好的处理复杂不规则 Pareto 前沿的能力, 从而验证了其能够很好地平衡收敛性与分布性.

表2 8种算法在不规则前沿问题上的HV平均值与标准差

问题	M	MOEAAD	CMOEA_MS	KnEA	RVEA	GrEA	MOEAD	SPEA-R	PDAREA
DTLZ5	3	1.829 1e-1(7.15e-4)-	1.973 8e-1(1.40e-4)-	1.919 1e-1(3.75e-3)-	1.560 4e-1(7.89e-3)-	1.811 1e-1(8.98e-4)-	1.818 7e-1(9.51e-6)-	1.826 0e-1(2.99e-3)-	<b>1.982 9e-1(4.32e-3)</b>
	5	1.134 8e-1(3.58e-3)+	1.396 1e-2(6.14e-3)-	8.755 8e-2(5.89e-3)-	1.051 9e-1(3.05e-3)+	9.898 8e-2(7.54e-3)+	<b>1.272 4e-1(3.11e-4)+</b>	4.390 2e-2(2.35e-2)-	9.376 0e-2(3.46e-3)
	8	9.580 0e-2(1.13e-3)+	0.000 0e+0(0.00e+0)-	7.928 2e-2(1.64e-2)-	9.095 5e-2(2.21e-4)-	6.741 1e-2(1.14e-2)-	<b>1.042 7e-1(4.55e-4)+</b>	7.788 1e-4(1.75e-3)-	9.459 0e-2(2.44e-4)
	10	8.414 2e-2(5.40e-3)-	0.000 0e+0(0.00e+0)-	3.950 4e-2(2.82e-2)-	9.088 1e-2(1.40e-4)+	5.200 0e-2(1.70e-2)-	<b>1.000 7e-1(3.13e-4)+</b>	0.000 0e+0(0.00e+0)-	9.073 8e-2(3.55e-4)
DTLZ7	3	2.700 0e-1(8.29e-4)-	2.730 5e-1(2.01e-3)=	2.730 7e-1(1.10e-2)=	2.639 8e-1(1.63e-3)-	2.615 4e-1(1.45e-3)-	2.535 0e-1(1.21e-2)-	2.692 0e-1(9.08e-4)-	<b>2.747 8e-1(2.35e-3)</b>
	5	2.585 1e-1(1.53e-3)-	2.140 7e-1(5.41e-3)-	2.606 0e-1(3.42e-3)-	2.175 3e-1(3.83e-3)-	2.602 6e-1(1.32e-3)-	1.438 0e-1(1.38e-3)-	2.486 9e-1(2.30e-3)-	<b>2.771 4e-1(1.18e-2)</b>
	8	1.920 4e-1(2.94e-3)-	4.518 7e-2(2.23e-2)-	1.337 5e-1(2.96e-2)-	1.523 5e-1(2.07e-2)-	<b>2.332 0e-1(4.07e-3)+</b>	3.330 5e-3(1.28e-2)-	1.543 2e-1(2.04e-2)-	1.697 9e-1(1.87e-2)
	10	1.751 4e-1(6.13e-3)+	5.670 2e-3(8.11e-3)-	9.185 5e-2(3.15e-2)-	1.408 7e-1(1.84e-2)-	<b>2.207 3e-1(1.58e-3)+</b>	1.280 3e-4(4.39e-4)-	1.445 4e-1(9.14e-3)-	1.617 2e-1(1.23e-2)
WFG1	3	<b>9.401 2e-1(4.84e-3)+</b>	9.276 8e-1(5.63e-3)-	9.287 7e-1(3.87e-3)-	8.390 7e-1(2.87e-1)-	9.103 1e-1(7.00e-3)-	9.025 4e-1(1.30e-2)-	9.301 4e-1(4.19e-3)-	9.366 5e-1(2.20e-2)
	5	9.861 4e-1(2.04e-2)+	9.876 5e-1(1.71e-2)+	9.930 6e-1(1.61e-3)+	9.874 9e-1(2.03e-2)+	9.728 9e-1(5.49e-3)+	9.437 5e-1(1.73e-2)+	<b>9.985 3e-1(1.89e-4)+</b>	9.019 7e-1(4.64e-2)
	8	9.914 1e-1(2.01e-2)-	9.953 5e-1(1.05e-2)-	9.946 8e-1(2.05e-3)-	9.965 4e-1(1.01e-3)=	9.772 3e-1(5.27e-3)+	9.328 2e-1(4.05e-3)-	<b>9.996 6e-1(4.71e-4)+</b>	9.968 4e-1(7.03e-2)
	10	9.962 2e-1(1.57e-3)+	9.771 8e-1(5.03e-2)-	9.979 0e-1(1.04e-3)+	9.970 5e-1(4.84e-4)+	9.879 1e-1(2.75e-3)-	9.371 0e-1(3.17e-3)-	<b>9.999 3e-1(8.35e-5)+</b>	9.928 0e-1(2.11e-2)
WFG2	3	<b>9.349 5e-1(7.76e-4)+</b>	9.106 2e-1(5.75e-3)-	9.267 2e-1(3.31e-3)=	9.269 2e-1(1.33e-3)=	9.208 7e-1(1.86e-3)-	9.091 6e-1(6.43e-3)-	9.288 6e-1(8.17e-4)+	9.251 0e-1(1.58e-3)
	5	9.930 5e-1(7.94e-4)+	9.818 6e-1(1.95e-3)+	9.927 2e-1(1.02e-3)+	9.904 7e-1(1.86e-3)+	9.702 5e-1(2.89e-3)-	9.565 0e-1(3.14e-3)-	<b>9.944 5e-1(7.54e-4)+</b>	9.775 8e-1(2.52e-3)
	8	9.878 4e-1(3.02e-3)+	9.839 3e-1(2.22e-3)-	9.946 2e-1(7.85e-4)+	9.824 3e-1(5.08e-3)-	9.782 6e-1(2.75e-3)-	9.360 8e-1(5.19e-3)-	<b>9.966 2e-1(7.11e-4)+</b>	9.853 9e-1(5.34e-3)
	10	9.903 1e-1(1.86e-3)+	9.878 5e-1(1.54e-3)+	9.957 4e-1(1.14e-3)+	9.831 3e-1(4.45e-3)+	9.868 7e-1(2.18e-3)+	9.370 2e-1(5.38e-3)-	<b>9.961 2e-1(7.55e-4)+</b>	9.725 2e-1(6.17e-3)
MaF4	3	4.758 0e-1(1.12e-1)-	5.058 0e-1(4.88e-3)-	4.942 5e-1(1.90e-2)-	4.731 9e-1(6.09e-2)-	4.787 1e-1(8.35e-2)-	4.833 2e-1(1.02e-2)-	3.072 9e-1(1.58e-1)-	<b>5.170 2e-1(1.11e-1)</b>
	5	9.908 8e-2(5.10e-3)+	6.645 1e-2(7.17e-3)=	1.187 0e-1(4.37e-3)+	3.349 0e-2(1.65e-2)-	<b>1.216 2e-1(2.85e-2)+</b>	7.688 7e-3(1.96e-3)-	2.190 1e-2(1.78e-2)-	9.015 7e-2(3.40e-2)
	8	4.111 3e-4(2.50e-4)+	1.547 6e-4(7.41e-5)+	1.925 8e-3(2.95e-4)+	1.409 5e-5(1.57e-5)+	<b>5.277 0e-3(1.21e-3)+</b>	3.422 9e-6(4.97e-7)-	4.094 6e-4(4.12e-4)+	7.456 9e-6(4.12e-6)
	10	6.016 5e-5(3.12e-5)+	2.876 6e-6(1.36e-6)+	6.663 5e-5(1.91e-5)+	2.972 9e-7(5.88e-7)+	<b>6.023 1e-4(1.88e-5)+</b>	2.945 3e-8(6.32e-9)-	1.110 8e-5(2.26e-5)+	9.499 9e-8(1.87e-7)
MaF7	3	2.684 1e-1(7.19e-3)+	2.687 0e-1(1.18e-2)+	<b>2.744 7e-1(7.77e-3)+</b>	2.631 0e-1(2.32e-3)-	2.603 0e-1(6.22e-3)-	2.535 3e-1(1.21e-2)-	2.690 7e-1(1.17e-3)+	2.667 3e-1(3.16e-3)
	5	2.577 1e-1(1.68e-3)-	2.157 5e-1(5.73e-3)-	2.625 7e-1(3.20e-3)-	2.195 3e-1(2.99e-3)-	2.664 9e-1(1.49e-3)-	1.437 7e-1(1.64e-3)-	2.484 7e-1(2.42e-3)-	<b>2.710 2e-1(1.50e-2)</b>
	8	1.925 9e-1(3.11e-3)+	4.850 8e-2(2.03e-2)-	1.337 5e-1(2.11e-2)-	1.513 5e-1(2.45e-2)-	<b>2.320 5e-1(6.22e-3)+</b>	8.920 7e-4(1.80e-3)-	1.546 8e-1(2.30e-2)-	1.883 3e-1(1.92e-2)
	10	1.775 1e-1(8.45e-3)+	6.097 8e-3(8.13e-3)-	1.006 5e-1(2.16e-2)-	1.534 6e-1(2.02e-2)=	<b>2.211 4e-1(1.30e-3)+</b>	2.786 5e-4(8.41e-4)-	1.463 0e-1(5.40e-3)-	1.542 3e-1(1.27e-2)
MaF8	3	2.460 8e-1(4.52e-3)-	2.726 5e-1(5.82e-4)-	1.734 4e-1(3.47e-2)-	2.378 9e-1(3.06e-3)-	2.597 8e-1(2.06e-3)-	2.525 7e-1(1.90e-2)-	2.731 6e-2(6.83e-2)-	<b>2.742 2e-1(3.26e-3)</b>
	5	8.674 1e-2(3.59e-3)-	<b>1.259 8e-1(3.69e-4)+</b>	1.178 2e-1(4.90e-3)+	7.857 6e-2(5.25e-3)-	1.157 9e-1(8.71e-4)+	1.153 2e-1(1.41e-3)+	1.026 6e-2(2.33e-2)-	9.934 8e-2(4.38e-3)
	8	1.604 2e-2(2.22e-3)+	<b>3.061 4e-2(2.10e-4)+</b>	2.801 5e-2(1.29e-3)+	1.321 0e-2(1.68e-3)-	2.759 6e-2(4.51e-4)+	2.222 7e-2(3.21e-4)+	5.609 8e-3(5.67e-3)-	1.522 5e-2(2.46e-3)
	10	5.352 5e-3(5.47e-4)+	<b>1.113 6e-2(1.04e-4)+</b>	1.045 6e-2(1.42e-4)+	3.865 3e-3(7.43e-4)-	9.623 6e-3(1.33e-4)+	6.957 4e-3(7.37e-5)+	2.408 7e-3(1.70e-3)-	4.825 7e-3(7.80e-4)
MaF9	3	8.342 4e-1(1.48e-3)=	8.308 4e-1(1.97e-3)-	5.518 0e-1(1.10e-1)-	8.263 0e-1(4.00e-2)-	5.553 2e-1(1.72e-1)-	8.098 0e-1(2.10e-2)-	5.031 5e-1(5.40e-2)-	<b>8.348 0e-1(8.58e-3)</b>
	5	2.003 6e-1(4.69e-2)-	<b>3.262 7e-1(7.48e-4)+</b>	2.016 0e-1(4.10e-2)-	2.371 2e-1(7.78e-3)-	5.168 6e-2(3.50e-2)-	3.095 0e-1(5.85e-3)+	7.946 6e-2(3.99e-2)-	2.427 5e-1(1.27e-2)
	8	1.770 0e-2(6.33e-3)-	<b>4.448 7e-2(4.70e-4)+</b>	0.000 0e+0(0.00e+0)-	1.742 2e-2(3.12e-3)-	8.241 8e-3(1.41e-3)-	4.156 2e-2(2.76e-4)+	2.075 9e-4(6.04e-4)-	2.816 8e-2(2.69e-3)
	10	8.378 7e-3(2.75e-3)+	<b>1.732 9e-2(1.23e-4)+</b>	2.060 9e-5(9.22e-5)-	5.489 2e-3(1.43e-3)+	2.570 6e-3(4.83e-4)-	1.423 9e-2(3.35e-3)+	2.261 9e-3(1.53e-3)-	5.321 7e-3(1.05e-3)
+/-/=		19/12/1	12/18/2	12/18/2	9/20/3	14/18/0	10/22/0	10/22/0	

4 实际应用

本文将PDAREA算法应用于四杆平面桁架问题<sup>[29]</sup>和汽车侧面碰撞问题<sup>[30]</sup>,同时与7种算法进行对比,以测试所提出算法在实际应用工程问题上的性能,采用HV指标来衡量各算法取得的实验效果。

两个工程问题的种群规模均设为100,最大评价次数设为50 000,各算法独立运行20次,记录HV的平均值和标准差,加粗字体表示最佳结果。

4.1 四杆平面桁架问题

四杆平面桁架问题(four bar plane truss problem, FBPTP)是工程力学中常见的问题.该问题有6个设计变量,即杆件长度、杆件材料属性、节点位置、支座约束、外部载荷以及内部受力.其两个最小化的目标函数分别为四杆平面桁架的质量和柔度。

表3给出了PDAREA等8种算法在四杆平面桁

架工程问题上的HV平均值和标准差.由实验结果可知,PDAREA获得了第2好的结果,仅次于SPEA-R.总体而言,PDAREA在处理四杆平面桁架问题时具有一定的优势。

表3 8种算法在FBPTP问题上的HV平均值与标准差

算法	HV
MOEAAD	3.837 4e-1(2.64e-4)
CMOEA_MS	4.085 7e-1(3.27e-4)
KnEA	3.698 9e-1(5.53e-3)
RVEA	4.074 9e-1(7.38e-4)
GrEA	4.006 2e-1(2.56e-3)
MOEAD	5.306 5e-2(4.34e-5)
SPEA-R	<b>4.102 2e-1(2.33e-4)</b>
PDAREA	4.096 9e-1(1.45e-4)

4.2 汽车侧面碰撞问题

汽车侧面碰撞问题(car side impact problem, CSIP)的研究广泛应用于汽车行业.该问题有7个设

计变量,即B柱内部厚度、B柱内部加强件、地板侧内部、横梁、门梁、车门安全带线路加强件以及车顶纵梁。其3个最小化的目标函数分别为汽车的重量、乘客受到的公共力和V柱所承受冲击负荷的平均速度。

从表4可以看到,对于汽车侧面碰撞问题,CMOEA\_MS算法获得了最好的实验结果,其次为MOEAAAD,PDAREA排名第3,随后是RVEA、KnEA、SPEA-R、GrEA,MOEAD获得了较差的实验结果。相较于其他对比算法,PDAREA能够有效地解决汽车侧面碰撞问题。

表4 8种算法在CSIP问题上的HV平均值与标准差

算法	HV
MOEAAAD	2.552 1e-2(1.91e-4)
CMOEA_MS	<b>2.619 5e-2(3.01e-5)</b>
KnEA	2.476 9e-2(6.21e-4)
RVEA	2.483 6e-2(3.37e-4)
GrEA	2.274 7e-2(3.13e-4)
MOEAD	1.054 0e-2(2.33e-4)
SPEA-R	2.297 8e-2(2.39e-4)
PDAREA	2.503 3e-2(2.54e-4)

## 5 结论

针对现有多目标进化算法难以处理复杂 Pareto 前沿的问题,本文提出了一种基于改进角度惩罚距离和自适应参考向量的高维多目标进化算法(PDAREA)。该算法在目标空间中生成均匀分布的参考向量,通过种群划分策略将种群中的个体分到与其夹角最小的参考向量上,从而形成子种群。所提出的改进角度惩罚距离策略可以在环境选择中使个体沿参考向量逼近 PF,并能有效地维持高维目标空间中种群个体收敛性与分布性之间的平衡关系,选择综合性能最佳的个体进入下一代。参考点自适应策略与再生策略能够使算法根据实际的问题生成自适应的参考向量,有利于解决 PF 形状不规则的复杂问题,从而提高算法的综合性能。此外,在实际工程应用问题中,PDAREA表现出了良好性能。

本文所提出的算法均在某种程度上依靠参考点或参考向量的设置。对于具有复杂前沿面的问题,选择合适的参考点或参考向量对于个体的选择具有关键作用。因此,在后续工作中,如何根据不同特性的问题设计参考点生成策略将是研究的重点。此外,本文算法中参考向量的更新频率和 Pareto 前沿的动态调整也是后续研究方向之一。

## 参考文献(References)

[1] 王丽萍,任宇,邱启仓,等.多目标进化算法性能评价指标研究综述[J].计算机学报,2021,44(8):1590-1619.

(Wang L P, Ren Y, Qiu Q C, et al. A review of the research on performance evaluation indicators of multi-objective evolutionary algorithms[J]. Chinese Journal of Computers, 2021, 44(8): 1590-1619.)

[2] Farina M, Amato P. On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems[C]. 2002 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society Proceedings. New Orleans, 2002: 233-238.

[3] 张国富,陆淑君,苏兆品,等.化工园区应急物资多目标分配问题建模与求解[J].控制与决策,2022,37(4):962-972.  
(Zhang G F, Lu S J, Su Z P, et al. Modeling and solving multi-objective emergency resource allocation in chemical industrial parks[J]. Control and Decision, 2022, 37(4): 962-972.)

[4] 岳富占,崔平远,崔祐涛.基于改进蚁群算法的星球探测机器人路径规划技术[J].控制与决策,2006,21(12):1437-1440.  
(Yue F Z, Cui P Y, Cui H T. Planetary rover path-planning based on ant colony optimization algorithm[J]. Control and Decision, 2006, 21(12): 1437-1440.)

[5] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.

[6] 封文清,巩敦卫.基于在线感知 Pareto 前沿划分目标空间的多目标进化优化[J].自动化学报,2020,46(8):1628-1643.  
(Feng W Q, Gong D W. Multi-objective evolutionary optimization with objective space partition based on online perception of Pareto front[J]. Acta Automatica Sinica, 2020, 46(8): 1628-1643.)

[7] 梁正平,骆婷婷,王志强,等.一种基于目标空间转换权重求和的超多目标进化算法[J].自动化学报,2022,48(4):1060-1078.  
(Liang Z P, Luo T T, Wang Z Q, et al. A many-objective evolutionary algorithm based on weighted sum of objective space transformation[J]. Acta Automatica Sinica, 2022, 48(4): 1060-1078.)

[8] Zhou J L, Zou J, Yang S X, et al. Niche-based and angle-based selection strategies for many-objective evolutionary optimization[J]. Information Sciences, 2021, 571: 133-153.

[9] 毕晓君,张永建,沈继红.高维多目标多方向协同进化算法[J].控制与决策,2014,29(10):1737-1743.  
(Bi X J, Zhang Y J, Shen J H. High-dimensional multi-objective multi-directional co-evolutionary algorithm[J]. Control and Decision, 2014, 29(10): 1737-1743.)

[10] Li L, Li G P, Chang L. A many-objective particle swarm optimization with grid dominance ranking and clustering[J]. Applied Soft Computing, 2020, 96: 106661.

- [11] Liu Y, Zhu N B, Li K L, et al. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2020, 509: 376-399.
- [12] 谢承旺, 余伟伟, 郭华, 等. DAV-MOEA: 一种采用动态角度向量支配关系的高维多目标进化算法[J]. *计算机学报*, 2022, 45(2): 317-333.  
(Xie C W, Yu W W, Guo H, et al. DAV-MOEA: A many-objective evolutionary algorithm adopting dynamic angle vector based dominance relation[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2022, 45(2): 317-333.)
- [13] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(1): 45-76.
- [14] Li J, Chen G, Li M, et al. An enhanced-indicator based many-objective evolutionary algorithm with adaptive reference point[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2020, 55: 100669.
- [15] Li W H, Zhang T, Wang R, et al. Weighted indicator-based evolutionary algorithm for multimodal multiobjective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(6): 1064-1078.
- [16] Menchaca-Mendez A, Coello C A C. GDE-MOEA: A new MOEA based on the generational distance indicator and  $\epsilon$ -dominance[C]. 2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation(CEC). Sendai, 2015: 947-955.
- [17] Li F, Shang Z K, Shen H, et al. Combining modified inverted generational distance indicator with reference-vector-guided selection for many-objective optimization[J]. *Applied Intelligence*, 2023, 53(10): 12149-12162.
- [18] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731.
- [19] 覃灏, 李军华, 黎明, 等. 基于自适应参考向量和参考点的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(3): 759-767.  
(Qin H, Li J H, Li M, et al. An adaptive reference vector and reference point based many-objective evolutionary algorithm[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(3): 759-767.)
- [20] 曾亮, 曾维钧, 李燕燕, 等. 基于自适应聚合距离的多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(4): 1113-1122.  
(Zeng L, Zeng W J, Li Y Y, et al. A multi-objective evolutionary algorithm based on adaptive aggregation distance[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(4): 1113-1122.)
- [21] Tian Y, Zhang Y J, Su Y S, et al. Balancing objective optimization and constraint satisfaction in constrained evolutionary multi-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(9): 9559-9572.
- [22] Zhang X Y, Tian Y, Jin Y C. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(6): 761-776.
- [23] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [24] Fan R, Wei L X, Sun H, et al. An enhanced reference vectors-based multi-objective evolutionary algorithm with neighborhood-based adaptive adjustment[J]. *Neural Computing and Applications*, 2020, 32(15): 11767-11789.
- [25] Jiang S Y, Yang S X. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 329-346.
- [26] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization[C]. *Advanced Information and Knowledge Processing*. London: Springer-Verlag, 2005: 105-145.
- [27] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506.
- [28] Cheng R, Li M Q, Tian Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3(1): 67-81.
- [29] Cheng F Y, Li X S. Generalized center method for multiobjective engineering optimization[J]. *Engineering Optimization*, 1999, 31(5): 641-661.
- [30] Gu L, Yang R J, Tho C H, et al. Optimisation and robustness for crashworthiness of side impact[J]. *International Journal of Vehicle Design*, 2001, 26(4): 348-360.

## 作者简介

曾亮(1980—), 男, 教授, 博士, 从事智能优化算法、深度学习等研究, E-mail: zengliang@hbut.edu.cn;

向思颖(2000—), 女, 硕士生, 从事智能优化算法的研究, E-mail: 102200245@hbut.edu.cn;

曾维钧(1997—), 男, 硕士生, 从事智能优化算法的研究, E-mail: zengweijun3682@163.com;

王嘉诚(2000—), 男, 硕士生, 从事智能优化算法的研究, E-mail: 102200286@hbut.edu.cn;

王珊珊(1982—), 女, 副教授, 博士, 从事智能优化算法、深度学习等研究, E-mail: wangshanshan@hbut.edu.cn;

李维刚(1977—), 男, 教授, 博士, 从事工业过程控制、人工智能与机器学习算法等研究, E-mail: liweigang@wust.edu.cn.