



控制与决策

CONTROL AND DECISION



多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性

王志超, 刘开恩, 纪志坚, 赵美林

引用本文:

王志超, 刘开恩, 纪志坚, 赵美林. 多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3289–3296.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0575>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid
控制与决策. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty
控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability
控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

一类非线性大系统分散自适应预设性能有限时间跟踪控制

Decentralized adaptive prescribed performance finite-time tracking control for a class of large-scale nonlinear systems
控制与决策. 2020, 35(12): 3045–3052 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0623>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems
控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性

王志超¹, 刘开恩^{1†}, 纪志坚², 赵美林¹

(1. 青岛大学 数学与统计学院, 山东 青岛 266071; 2. 青岛大学 自动化学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 研究带有不确定扰动的一阶非线性多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性问题, 其中领导者具有所有跟随者都未知的外部输入. 基于全局有限时间稳定性理论、代数图论和变量变换, 提出并分析一种静态分布式非光滑协议, 证明在含扰动的非线性多智能体系统中, 所有跟随者能在有限时间内快速地跟踪上时变的期望状态. 该协议的局限性是控制增益会依赖于某些全局信息, 如 Laplacian 矩阵的谱. 为了消除这一限制, 进一步设计一种自适应分布式协议. 理论分析表明, 所考虑的多智能体系统在控制增益不依赖于全局信息的前提下同样能够实现快速有限时间二分跟踪一致性. 最后通过两个仿真实例验证所提算法的可行性和有效性.

关键词: 二分一致性; 非线性多智能体系统; 自适应控制; 动态领导者; 有限时间控制; 不确定扰动

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0575

引用格式: 王志超, 刘开恩, 纪志坚, 等. 多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3289-3296.

Distributed fast finite-time bipartite tracking consensus for multi-agent systems

WANG Zhi-chao¹, LIU Kai-en^{1†}, JI Zhi-jian², ZHAO Mei-lin¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, China; 2. School of Automation, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: A distributed fast finite-time bipartite tracking consensus problem for first-order nonlinear multi-agent systems with uncertain disturbances is studied, where the leader has an external input unknown to all followers. Based on global finite-time stability theory, algebraic graph theory and variable transformation, a static distributed non-smooth protocol is proposed and analyzed. It is proved that in a nonlinear multi-agent system with disturbance, all the followers can track the time-varying expected state rapidly in a finite time. The limitation of this protocol is that the control gains depend on some global information, such as the spectrum of the Laplacian matrix. In order to eliminate this limitation, an adaptive distributed protocol is further designed. Theoretical analysis shows that the multi-agent system can achieve fast finite-time bipartite tracking consensus on the premise that the control gain does not depend on global information. Finally, two simulation examples are used to verify the feasibility and effectiveness of the proposed algorithms.

Keywords: bipartite consensus; nonlinear multi-agent systems; adaptive control; dynamic leader; finite-time control; uncertain disturbances

0 引言

近年来, 由于网络科学和控制理论的快速发展, 多智能体系统在许多领域均受到广泛关注^[1-2]. 一致性问题作为智能体之间合作协调控制的基础, 具有重要的现实意义和理论价值. 所谓一致性是指随着时间的演化, 多智能体系统中所有智能体的某一个状态趋于相同. 由于其在传感器网络、控制工程、编队、优化和无人机技术等领域的广泛应用, 多智能体系统一

致性问题的研究备受关注^[3-6].

在一致性问题研究中, 通常需要考虑 3 个关键因素: 系统动态、通信网络和控制协议. 根据所考虑的多智能体系统中是否至少存在一个领导者, 一致性问题可以分为无领导者一致性和领导跟随一致性问题, 其中领导跟随一致性问题又可以称为跟踪一致性问题. 迄今为止, 许多研究都集中在跟踪一致性问题, 因此产生了许多重要的研究成果^[7-8]. 文献 [7]

收稿日期: 2023-04-28; 录用日期: 2023-09-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62033007, 61873136); 山东省自然科学基金项目(ZR2021MF089).

责任编辑: 王燕舞.

[†]通讯作者. E-mail: kaienliu@aliyun.com.

研究了一类具有未知干扰的高阶多智能体系统的跟踪一致性问题;文献[8]研究了在一般有向图下分布式的二阶时变非线性多智能体系统的跟踪一致性问题.特别地,领导者具有外部控制输入意味着每个跟随者可以跟踪时变的期望状态,这具有更广泛的应用价值.目前,具有动态领导者的跟踪一致性的研究已经获得了许多重要的成果^[9-12].文献[9-10]研究了具有动态领导者的多智能体系统的跟踪一致性问题;文献[11-12]分别研究了具有动态领导者的非线性多智能体系统的自适应跟踪一致性.

值得注意的是,上述文献所研究的智能体之间的关系是合作的.但是,在更加实际的情况下,智能体之间不可避免地存在竞争关系,故用符号图表示同时存在合作关系和竞争关系的通信网络,其中符号图中的正边和负边分别表示智能体之间的合作关系和竞争关系.对此,文献[13]考虑了存在合作竞争关系的多智能体系统的二分一致性问题.至今,二分一致性的研究已经具有许多重要成果^[14-16].文献[14-15]分别研究了符号图下含扰动和自适应事件触发机制下的多智能体系统的二分一致性;文献[16]研究了带有动态领导者的一般线性多智能体系统的二分跟踪一致性.

从收敛速度的角度,一致性问题可以分为渐近一致性和有限时间一致性问题.上述文献中讨论的都是渐近收敛,然而,在许多实际应用中常常会用到有限时间收敛.文献[17]提出了有限时间一致性问题.因有限时间收敛相比于渐近收敛具有更好的抗扰动鲁棒性和更快的收敛速度,有限时间一致性问题在工程系统中发挥着更重要的作用,已产生大量的研究成果^[18-21].文献[18]研究了带有干扰的非线性多智能体系统的有限时间二分一致性问题;文献[19]研究了非线性多智能体系统的完全分布式有限时间一致性问题;文献[20]研究了基于事件触发机制的离散非线性多智能体系统的二分跟踪一致性;文献[21]研究了非线性多智能体系统的分布式快速有限时间跟踪一致性.

基于上述成果,本文研究非线性多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性问题,其中领导者具有未知的外部控制输入,且系统存在不确定扰动.基于全局有限时间稳定性理论,提出并分析两种分布式的二分跟踪协议.不同于文献[19,21]中关于无符号网络下的跟踪一致性的研究,本文考虑的多智能体系统中既存在合作关系又存在竞争关系,因此本文研究的通信网络更具有一般性和实用价

值.相对于文献[14,16]所研究的都是符号网络下的渐近收敛,本文考虑的是快速有限时间收敛,使得控制系统对内在的非线性动力学和有界不确定扰动具有鲁棒性.与文献[18,20]相比,所提出的自适应控制协议可消除对全局信息的依赖,更适合于实际应用.

1 预备知识和问题陈述

1.1 预备知识

多智能体系统的通信网络可以描述为一个无向符号图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$.其中: $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为节点集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为无向边的集合, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为系统的邻接矩阵.如果 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$,则 $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$,否则 $a_{ij} = 0$. a_{ij} 的符号反映了节点 v_i 与节点 v_j 之间的关系,其中 $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} < 0$)表示节点 v_i 与节点 v_j 之间存在合作(竞争)关系.如果边 (v_j, v_i) 存在,则 v_i, v_j 互为邻居.本文考虑不含自环的图,即 $a_{ii} = 0$.符号图 \mathcal{G} 的度矩阵定义为 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{NN}\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$.其中: $d_{ii} = \sum_{j=1}^N |a_{ij}|, i \in I \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$.符号图 \mathcal{G} 的Laplacian矩阵定义为 $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$.其中: $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|, l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j, i, j \in I$.根据上述内容可以得到 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$,且 \mathcal{L} 是对称的.

图 \mathcal{G} 中节点 v_i 与节点 v_j 之间的一条路径是由图 \mathcal{G} 中不同节点 $v_{ik}(k = 1, 2, \dots, l)$ 组成的边序列 $(v_i, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), \dots, (v_{il}, v_j)$.若无向图 \mathcal{G} 中任意两个不同节点 v_i 与 v_j 之间都存在一条路径,则称图 \mathcal{G} 是连通的.

符号说明: $\mathbf{R}_{\geq 0}, \mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^{p \times q}$ 分别表示非负实数集、 p 维实向量和 $p \times q$ 维实矩阵构成的集合.对于任意实矩阵 $A \in \mathbf{R}^{p \times p}$,其转置记为 A^T .若 A 为对称矩阵,则 $A > 0$ ($A \geq 0$)意味着 A 是正定(半正定)的. $\lambda_{\min}(A)$ 表示矩阵 A 的最小特征值, $\lambda_{\max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大特征值. $\mathbf{0}$ 表示所有元素都是0的列向量, $\mathbf{1}_N \in \mathbf{R}^N$ 表示所有元素都是1的 N 维列向量.对于任意 $q = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T \in \mathbf{R}^N$ 和常数 $\alpha > 0$,定义 $\text{sgn}(q) = [\text{sgn}(q_1), \text{sgn}(q_2), \dots, \text{sgn}(q_N)]^T, \langle q \rangle^\alpha = [\langle q_1 \rangle^\alpha, \langle q_2 \rangle^\alpha, \dots, \langle q_N \rangle^\alpha]^T, \langle q_i \rangle^\alpha = \text{sgn}(q_i)|q_i|^\alpha, i \in I$,其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数.

定义1^[13] 如果节点集 \mathcal{V} 存在一个二部划分 \mathcal{V}_1 和 \mathcal{V}_2 ,其中 \mathcal{V}_1 和 \mathcal{V}_2 是非空子集, $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}, \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$,且满足当 $v_i, v_j \in \mathcal{V}_k, k \in \{1, 2\}$ 时, $a_{ij} \geq 0$,当 $v_i \in \mathcal{V}_k, v_j \in \mathcal{V}_{3-k}$ 时, $a_{ij} \leq 0$,则称符号图 \mathcal{G} 是结构平衡的.

引理1^[13] 如果符号图 \mathcal{G} 是结构平衡的,则存在对角矩阵 $\mathcal{S} = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_N\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$,其中 $s_i \in \{\pm 1\}, i \in I$,使得 $\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{S}$ 所有元素非负.

1.2 问题陈述

考虑由 N 个跟随者与一个领导者组成的多智能体系统,其中领导者标记为0, N 个跟随者标记为 $1 \sim N$,每个智能体的动态方程描述如下:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(t, x_i(t)) + d_i(t, x_i(t)), i \in I_0. \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbf{R}^n, u_i(t) \in \mathbf{R}^n, f(t, x_i(t)): \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $d_i(t, x_i(t)): \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 分别为智能体 i 的状态、控制输入、非线性项和不确定的干扰项; $I_0 \triangleq I \cup \{0\}$. 在本文中假设 $n = 1$,利用Kronecker积可以将结果推广到高维多智能体系统.

为了刻画 N 个跟随者与一个领导者之间的相互作用,定义一个扩展图 $\hat{\mathcal{G}}$,它由图 \mathcal{G} 、领导者以及领导者与其通信的跟随者之间的边组成. 定义 $|\mathcal{B}| = \text{diag}\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_N|\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$. 其中:如果智能体 i 可以接收到领导者的信息,则 $|b_i| > 0$;否则 $|b_i| = 0$.

假设1 符号图 \mathcal{G} 是连通的、无向的和结构平衡的,并且至少有一个跟随者与领导者有边. 若多个跟随者与领导者有边,应满足:当 $v_i, v_j \in \mathcal{V}_k$ 时, $b_i b_j \leq 0$;当 $v_i \in \mathcal{V}_k, v_j \in \mathcal{V}_{3-k}$ 时, $b_i b_j \geq 0$. 其中 $k \in \{1, 2\}$.

由引理1和假设1可得存在 $\mathcal{S} \in \mathbf{R}^{N \times N}$,使得 $\mathcal{S}\mathcal{L}\mathcal{S}$ 的对角线元素均非负,非对角线元素均非正. 定义 $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{L}} + |\mathcal{B}|$,其中 $\mathcal{L} = \mathcal{S}\mathcal{L}\mathcal{S}$,由假设1可知 \mathcal{H} 是正定的,即 $\mathcal{H} > 0$ ^[21],当 $|b_i| > 0$ 时,由于 $\text{sgn}(b_i) = \pm s_i$ 都满足假设1,本文中不妨令 $\text{sgn}(b_i) = s_i$.

引理2^[12] 设图 \mathcal{G} 为一个无符号的无向连通图,图 $\hat{\mathcal{G}}$ 为至少有一个跟随者与领导者有边的相应扩展图, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为图 \mathcal{G} 的邻接矩阵, $\mathcal{B} = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ 表示领导者与跟随者之间的通信关系. 其中:如果智能体 i 可以接收到领导者的信息,则 $b_i > 0$;否则 $b_i = 0$. 定义 $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}$,其中 \mathcal{L} 为与图 \mathcal{G} 相关联的Laplacian矩阵,则对于任意向量 $z = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T \in \mathbf{R}^N$,有

$$z^T \mathcal{H} z = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} (z_i - z_j)^2.$$

其中: $z_0 = 0, a_{i0} = a_{0i} = b_i \geq 0, i \in I$.

定义2 考虑多智能体系统(1),如果对于任意初始值 $x_i(0), i \in I_0$,存在依赖于控制输入 $u_i(t)$ 和初始值的稳定时间 $T > 0$,使得下式成立:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} s_i x_i(t) = x_0(t), \\ s_i x_i(t) = x_0(t), \forall t \geq T, i \in I. \end{cases} \quad (2)$$

则称式(1)能实现具有动态领导者的有限时间二分跟

踪一致性.

为了研究带有动态领导者和不确定干扰的快速有限时间二分跟踪一致性问题,列出一些有用的假设和引理.

假设2(全局利普希兹条件) 存在正常数 θ ,使得对于任意的 $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}$,有

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \theta |x_1 - x_2|.$$

此外, $f(t, x)$ 是关于 x 的奇函数.

假设3 干扰项 $d_i(t, x_i(t))$ 是连续有界的,即存在 $d_m > 0$,使得 $|d_i(t, x_i(t))| \leq d_m$.

假设4 存在正常数 ω_0 ,使得对于任意的 $t \geq 0$ 都有 $|u_0(t)| \leq \omega_0$,即 $u_0(t)$ 一致有界.

引理3^[21] 考虑微分方程

$$\dot{p}(t) = f(p(t)), p(t_0) = p_0. \quad (3)$$

其中: $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, p(t) \in \mathbf{R}^N$. 若存在一个正定连续函数 $V(p): \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ 满足 $\dot{V}(p) + a_1 V(p) + a_2 (V(p))^\rho \leq 0$,其中 $a_1 > 0, a_2 > 0$ 且 $0 < \rho < 1$,则系统(3)是全局快速有限时间稳定的,且其稳定时间满足

$$T(p_0) \leq \frac{1}{a_1(1-\rho)} \ln \left(\frac{a_1^{1-\rho} V(p_0) + a_2}{a_2} \right).$$

引理4^[18] 对于 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N \geq 0, h > 1, 0 < k \leq 1$,有

$$\sum_{j=1}^N \delta_j^k \geq \left(\sum_{j=1}^N \delta_j \right)^k, \sum_{j=1}^N \delta_j^h \geq N^{1-h} \left(\sum_{j=1}^N \delta_j \right)^h.$$

引理5^[21] 若 $\mathcal{W} = [w_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是对称矩阵, $f(\cdot)$ 是奇函数,则对于任意的 $x_i, y_i \in \mathbf{R}$,都有

$$2 \sum_{i,j=1}^N w_{ij} x_i f(y_i - y_j) = \sum_{i,j=1}^N w_{ij} (x_i - x_j) f(y_i - y_j).$$

2 主要结果

2.1 静态协议下的快速有限时间二分跟踪一致性

为实现多智能体系统(1)的快速有限时间二分跟踪一致性,对于每个跟随者 i ,提出以下分布式协议:

$$u_i(t) = -\alpha \sum_{j=0}^N |a_{ij}| (x_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) x_j(t))^{\frac{m}{n}} - \beta \sum_{j=0}^N |a_{ij}| (x_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) x_j(t)) - \gamma \sum_{j=0}^N |a_{ij}| \text{sgn}(x_i(t) - \text{sgn}(a_{ij}) x_j(t)). \quad (4)$$

其中: α, β, γ 为待设计的正的控制增益; m, n 为正奇数,且 $m < n$.

定理1 假定假设1~假设4成立,控制增益满足

$$\beta = \frac{2\theta + C}{2\lambda_{\min}(\mathcal{H})}, \gamma = \frac{2\sqrt{2N}d_m + \sqrt{2N}\omega_0}{\sqrt{\lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{H}})}}.$$

其中: $C > 0$ 为常数; $\tilde{\mathcal{H}}$ 与 \mathcal{H} 具有相同的结构, 其元素为将原 \mathcal{H} 中的 $|a_{ij}|$ 替换为 a_{ij}^2 . 那么, 利用控制协议 (4) 可以实现多智能体系统 (1) 的快速有限时间二分跟踪一致性, 并且稳定时间 T_1 满足

$$T_1 \leq \frac{2n}{C(n-m)} \times \ln \left(\frac{CV_1^{\frac{n-m}{2n}}(0) + \alpha 2^{\frac{m}{n}} \lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\tilde{\mathcal{H}})}{\alpha 2^{\frac{m}{n}} \lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\tilde{\mathcal{H}})} \right). \quad (5)$$

其中: $\tilde{\mathcal{H}}$ 与 \mathcal{H} 具有相同的结构, 其元素为将原 \mathcal{H} 中的 $|a_{ij}|$ 替换为 $a_{ij}^{\frac{2n}{n+m}}$.

证明 令 $\hat{x}_i(t) = s_i x_i(t)$, $\hat{u}_i(t) = s_i u_i(t)$, $i \in I$, 以及 $\hat{x}_0(t) = x_0(t)$, $\hat{u}_0(t) = u_0(t)$, 那么由方程 (1) 和假设 2 可得

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{u}_i(t) + f(t, \hat{x}_i(t)) + s_i d_i(t, x_i(t)), \quad i \in I. \quad (6)$$

利用式 (4) 以及 $s_i s_j a_{ij} = |a_{ij}|$, $s_i^{\frac{m}{n}} = s_i$ 和 $s_i^2 = 1$ 可以得到

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(t) = & -\alpha \sum_{j=0}^N \hat{a}_{ij} \langle \hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t) \rangle^{\frac{m}{n}} - \\ & \beta \sum_{j=0}^N \hat{a}_{ij} (\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) - \\ & \gamma \sum_{j=0}^N \hat{a}_{ij} \operatorname{sgn}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\hat{a}_{ij} = |a_{ij}|$. 令 $e_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_0(t)$, $i \in I_0$. 由式 (1) 和 (6) 可得 $e_i(t)$ ($i \in I$) 的动态描述

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & \hat{u}_i(t) + f(t, \hat{x}_i(t)) + s_i d_i(t, x_i(t)) - \\ & u_0(t) - f(t, x_0(t)) - d_0(t, x_0(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

选取 $V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^2(t)$ 为 Lyapunov 候选函数.

由式 (7) 和 (8) 可得 V_1 关于 t 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & \sum_{i=1}^N e_i(t) \dot{e}_i(t) = \\ & \sum_{i=1}^N e_i(t) [\hat{u}_i(t) + f(t, \hat{x}_i(t)) + s_i d_i(t, x_i(t)) - \\ & u_0(t) - f(t, x_0(t)) - d_0(t, x_0(t))] = \\ & \sum_{i=1}^N e_i(t) [f(t, \hat{x}_i(t)) - f(t, x_0(t))] + \\ & \sum_{i=1}^N e_i(t) [s_i d_i(t, x_i(t)) - d_0(t, x_0(t))] + \\ & \sum_{i=1}^N e_i(t) \hat{u}_i(t) - \sum_{i=1}^N e_i(t) u_0(t). \end{aligned} \quad (9)$$

基于假设 2 ~ 假设 4 可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N e_i(t) [f(t, \hat{x}_i(t)) - f(t, x_0(t))] \leq \\ & \theta \sum_{i=1}^N e_i(t) |\hat{x}_i(t) - x_0(t)| \leq 2\theta V_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N e_i(t) [s_i d_i(t, x_i(t)) - d_0(t, x_0(t))] \leq \\ & 2d_m \sum_{i=1}^N |e_i(t)|, \end{aligned} \quad (11)$$

$$-\sum_{i=1}^N e_i(t) u_0(t) \leq \omega_0 \sum_{i=1}^N |e_i(t)|. \quad (12)$$

由式 (7) 和引理 5 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N e_i(t) \hat{u}_i(t) = & -\frac{\alpha}{2} \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|^{\frac{n+m}{n}} - \\ & \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|^2 - \\ & \frac{\gamma}{2} \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|. \end{aligned} \quad (13)$$

结合式 (9) ~ (13) 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & (2d_m + \omega_0) \sum_{i=1}^N |e_i(t)| + 2\theta V_1 - \\ & \frac{\alpha}{2} \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|^{\frac{n+m}{n}} - \\ & \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|^2 - \\ & \frac{\gamma}{2} \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|. \end{aligned}$$

再由引理 4 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & (2d_m + \omega_0) N^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |e_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\theta V_1 - \\ & \frac{\alpha}{2} \left(\sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij}^{\frac{2n}{n+m}} |e_i(t) - e_j(t)|^2 \right)^{\frac{n+m}{2n}} - \\ & \frac{\beta}{2} \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|^2 - \\ & \frac{\gamma}{2} \left(\sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij}^2 |e_i(t) - e_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

再由引理 2 和 $e_0(t) = 0$ 可以进一步得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij}^{\frac{2n}{n+m}} |e_i(t) - e_j(t)|^2 = 2e^T(t) \tilde{\mathcal{H}} e(t) \geq \\ & 4\lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{H}}) V_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij} |e_i(t) - e_j(t)|^2 = 2e^T(t) \mathcal{H} e(t) \geq \\ & 4\lambda_{\min}(\mathcal{H}) V_1, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sum_{i,j=0}^N \hat{a}_{ij}^2 |e_i(t) - e_j(t)|^2 = 2e^T(t)\tilde{\mathcal{H}}e(t) \geq 4\lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{H}})V_1. \quad (17)$$

结合式(14)~(17)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq (2\sqrt{2}d_{\max} + \sqrt{2}\omega_0)N^{\frac{1}{2}}V_1^{\frac{1}{2}} + 2\theta V_1 - \\ &2^{\frac{m}{n}}\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\tilde{\mathcal{H}})V_1^{\frac{n+m}{2n}} - 2\beta\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_1 - \\ &\gamma\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\mathcal{H}})V_1^{\frac{1}{2}} = \\ &-\alpha 2^{\frac{m}{n}}\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\tilde{\mathcal{H}})V_1^{\frac{n+m}{2n}} - CV_1, \end{aligned}$$

上式是基于 β 和 γ 的选定值. 当 $\text{sgn}(b_i) = -s_i$ 时, 同理可以得到相同的结果. 然后根据引理 3 得到系统 (8) 是快速有限时间稳定的, 其稳定时间由式 (5) 估计, 这意味着多智能体系统 (1) 的快速有限时间二分跟踪一致性问题得到了解决. \square

注 1 与文献 [18] 和文献 [21] 等诸多有关有限时间一致性问题研究的成果不同, 本文提出的系统 (1) 既存在非线性项又存在干扰项, 协议 (4) 解决了该系统的快速有限时间二分动态跟踪一致性问题, 使得即便系统存在有界扰动, 每个跟随者仍可以在有限时间内跟踪上时变的期望状态.

2.2 自适应协议下的快速有限时间二分跟踪一致性

定理 1 表明, 在控制增益 β 和 γ 满足一定条件下, 多智能体系统 (1) 的快速有限时间二分跟踪一致性可以通过协议 (4) 实现. 此时, 控制增益依赖于一些全局信息, 如 Laplacian 矩阵的谱、领导者的控制输入和不确定干扰的界. 但是在一些现实的系统中, 这种全局信息很难获取. 为了克服这一不足, 提出一种改进的分布式自适应控制协议

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\alpha \left\langle \sum_{j=0}^N |a_{ij}|(x_i(t) - \text{sgn}(a_{ij})x_j(t)) \right\rangle^{\frac{m}{n}} - \\ &\beta_i(t) \sum_{j=0}^N |a_{ij}|(x_i(t) - \text{sgn}(a_{ij})x_j(t)) - \gamma_i(t) \times \\ &\text{sgn} \left(\sum_{j=0}^N |a_{ij}|(x_i(t) - \text{sgn}(a_{ij})x_j(t)) \right). \quad (18) \end{aligned}$$

其中: $\alpha > 0$; m, n 为正奇数, $m < n$; $\beta_i(t), \gamma_i(t)$ 为自适应控制增益, 分别满足

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_i(t) &= \left(\sum_{j=0}^N |a_{ij}|(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right)^2, \\ \dot{\gamma}_i(t) &= \left| \sum_{j=0}^N |a_{ij}|(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right|, \quad i \in I. \end{aligned}$$

定理 2 假定假设 1~假设 4 成立. 利用控制协议 (18) 可实现多智能体系统 (1) 的自适应快速有限时间二分跟踪一致性.

证明 同定理 1 中的证明, 利用式 (18) 可得

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(t) &= -\alpha \left\langle \sum_{j=0}^N \hat{a}_{ij}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right\rangle^{\frac{m}{n}} - \\ &\beta_i(t) \sum_{j=0}^N \hat{a}_{ij}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) - \\ &\gamma_i(t) \text{sgn} \left(\sum_{j=0}^N \hat{a}_{ij}(\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) \right). \end{aligned}$$

令 $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N]^T$, $e = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T$, $\Lambda = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$, $\Upsilon = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$, $f(t, \hat{x}) = [f(t, \hat{x}_1), f(t, \hat{x}_2), \dots, f(t, \hat{x}_N)]^T$, $\bar{d}(t, x) = [s_1 d_1(t, x_1), s_2 d_2(t, x_2), \dots, s_N d_N(t, x_N)]^T$. 此时, 可以将误差系统描述为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= f(t, \hat{x}) - 1_N f(t, x_0) + \bar{d}(t, x) - 1_N d_0(t, x_0) - \\ &\alpha \langle \mathcal{H}e \rangle^{\frac{m}{n}} - \Lambda \mathcal{H}e - \Upsilon \text{sgn}(\mathcal{H}e) - 1_N u_0(t). \quad (19) \end{aligned}$$

选取 $V_2 = V_3 + V_4 + V_5$ 为 Lyapunov 候选函数. 其中: $V_3 = e^T \mathcal{H}e$, $V_4 = \sum_{i=1}^N (\hat{\gamma} - \gamma_i(t))^2$, $\hat{\gamma} = 2d_m + \omega_0$, $V_5 = \sum_{i=1}^N (\hat{\beta} - \beta_i(t))^2$, $\hat{\beta} = \frac{\theta^2}{2\lambda_{\min}^2(\mathcal{H})} + k_1 + \frac{1}{2}$, $k_1 > 0$. 由式 (19) 可以得到 V_3 关于 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \\ &2e^T \mathcal{H}(f(t, \hat{x}) - 1_N f(t, x_0) - \alpha \langle \mathcal{H}e \rangle^{\frac{m}{n}} - \Lambda \mathcal{H}e + \\ &\bar{d}(t, x) - 1_N d_0(t, x_0) - \Upsilon \text{sgn}(\mathcal{H}e) - 1_N u_0(t)). \end{aligned}$$

定义 $\zeta_i = \sum_{j=0}^N \hat{a}_{ij}(\hat{x}_i - \hat{x}_j)$, 基于假设 2~假设 4 可以得到

$$\begin{aligned} 2e^T \mathcal{H}(f(t, \hat{x}) - 1_N f(t, x_0)) &\leq \\ &\left(1 + \frac{\theta^2}{\lambda_{\min}^2(\mathcal{H})} \right) e^T \mathcal{H} \mathcal{H}^T e, \\ 2e^T \mathcal{H}(\bar{d}(t, x) - 1_N d_0(t, x_0)) &\leq 4d_m \sum_{i=1}^N |\zeta_i|, \\ -2e^T \mathcal{H} 1_N u_0(t) &\leq 2\omega_0 \sum_{i=1}^N |\zeta_i|. \end{aligned}$$

根据引理 4, $k_1 > 0$ 和 $2e^T \mathcal{H} \Lambda \mathcal{H} e = 2k_1 e^T \mathcal{H} \mathcal{H} e + e^T \mathcal{H}(2\Lambda - 2k_1 I) \mathcal{H} e$, 可以得到

$$\begin{aligned} e^T \mathcal{H} \langle \mathcal{H}e \rangle^{\frac{m}{n}} &\geq (e^T \mathcal{H} \mathcal{H} e)^{\frac{n+m}{2n}} \geq \lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H}) V_3^{\frac{n+m}{2n}}, \\ -2e^T \mathcal{H} \Lambda \mathcal{H} e &\leq -e^T \mathcal{H}(2\Lambda - 2k_1 I) \mathcal{H} e - 2k_1 \lambda_{\min}(\mathcal{H}) V_3. \end{aligned}$$

则 V_3 的导数满足

$$\dot{V}_3(t) \leq$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\theta^2}{\lambda_{\min}^2(\mathcal{H})}\right) \sum_{i=1}^N \zeta_i^2 - \sum_{i=1}^N (2\beta_i(t) - 2k_1)\zeta_i^2 + \\ & (4d_m + 2\omega_0) \sum_{i=1}^N |\zeta_i| - 2 \sum_{i=1}^N \gamma_i(t)|\zeta_i| - \\ & 2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3 - 2\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}}. \end{aligned}$$

由于 V_4 和 V_5 关于 t 的导数分别为 $\dot{V}_4 = -2 \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}|\zeta_i| + 2 \sum_{i=1}^N \gamma_i(t)|\zeta_i|$ 和 $\dot{V}_5 = -2 \sum_{i=1}^N \hat{\beta}\zeta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \beta_i(t)\zeta_i^2$, 那么

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) \leq & \left(2k_1 - 2\hat{\beta} + 1 + \frac{\theta^2}{\lambda_2^2(\mathcal{H})}\right) \sum_{i=0}^N \zeta_i^2 + \\ & (4d_m + 2\omega_0 - 2\hat{\gamma}) \sum_{i=0}^N |\zeta_i| - \\ & 2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3 - 2\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}} \leq \\ & -2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3 - 2\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}}. \end{aligned} \tag{20}$$

式(20)说明 $V_2(t)$ 是有界的, 并且 $\beta_i(t)$ 也是有界的, 进而存在一个常数 $\Delta > 0$ 满足 $|\beta_i(t)| < \Delta, i \in I$, 由 $\hat{\gamma}_i(t)$ 的定义可知, $\gamma_i(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 令 $\gamma_i(0) > \hat{\gamma}, i \in I, \Xi = \min\{\gamma_i(0), i \in I\}$, 因此

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = \dot{V}_2(t) - \dot{V}_4(t) - \dot{V}_5(t) \leq & -2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3 - 2\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}} + \\ & (2\hat{\beta} + 2\Delta) \sum_{i=1}^N \zeta_i^2 + (2\hat{\gamma} - 2\Xi) \sum_{i=1}^N |\zeta_i| \leq \\ & -2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3 - 2\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}} + \\ & (2\hat{\beta} + 2\Delta)\lambda_{\max}(\mathcal{H})V_3 \leq \\ & -2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3 - \alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}} + \\ & V_3^{\frac{n+m}{2n}} [(2\hat{\beta} + 2\Delta)\lambda_{\max}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n-m}{2n}} - \\ & \alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})]. \end{aligned} \tag{21}$$

定义 $0 < \tau \leq [\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H}) / (2\hat{\beta} + 2\Delta)\lambda_{\max}(\mathcal{H})]^{\frac{2n}{n-m}}$ 和集合 $\varphi = \{e(0) | e^T(0)\mathcal{H}e(0) \leq \tau\}$, 下面讨论两种情况.

情况1 如果 $e(0) \in \varphi$, 则

$$(2\hat{\beta} + 2\Delta)\lambda_{\max}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n-m}{2n}} \leq \alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H}),$$

进而由式(21)可以得到

$$\dot{V}_3(t) \leq -2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3 - \alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}}. \tag{22}$$

又因 $f(V_3) \triangleq (2\hat{\beta} + 2\Delta)\lambda_{\max}(\mathcal{H})V_3^{(n-m)/2n}$ 是关于 V_3 的增函数且满足 $f(0) = 0$, 从而保证(22)在 $e(0) \in \varphi$ 的条件下始终成立. 由引理3可知, $V_3(t)$ 可以在有限时间内收敛到0. 从而, 多智能体系统(1)的自适应快

速有限时间二分跟踪一致性可以实现, 并且稳定时间为

$$T_2 \leq \frac{n}{k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})(n-m)} \times \ln\left(\frac{2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n-m}{2n}}(0) + \alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})}{\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})}\right),$$

其中 $k_1 > 0$ 为常数.

情况2 如果 $e(0) \notin \varphi$, 则 $V_3(0) > \tau$. 下面证明存在时间 $T_3 > 0$, 使得 $V_3(t) \leq \tau, t > T_3$. 否则, 对于任意的 $\mu > 0$, 有 $V_3(\mu) > \tau$. 因为式(20)成立, 所以

$$\begin{aligned} V_2(0) \geq V_2(0) - V_2(\mu) \geq & \int_0^\mu (2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3(s) + \\ & 2\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n+m}{2n}}(s))ds > \\ & 2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})\tau\mu + 2\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})\tau^{\frac{n+m}{2n}}\mu. \end{aligned}$$

这与 $V_2(0)$ 是有界的相矛盾. 因此, 对于 $t > T_3 = V_2(0) / (2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})\tau + 2\alpha\lambda_{\min}^{(n+m)/(2n)}(\mathcal{H})\tau^{(n+m)/(2n)})$, 有 $V_3(t) \leq \tau$. 再由情况1可知, 经 T_3 之后系统(1)的稳定时间为

$$T_4 \leq \frac{n}{k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})(n-m)} \times \ln\left(\frac{2k_1\lambda_{\min}(\mathcal{H})V_3^{\frac{n-m}{2n}}(T_3) + \alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})}{\alpha\lambda_{\min}^{\frac{n+m}{2n}}(\mathcal{H})}\right).$$

根据以上分析可以得到 $V_3(t)$ 在有限时间内收敛到0, 这表明多智能体系统(1)的自适应快速有限时间二分跟踪一致性是可以实现的. 进一步, 当 $V_3(0) > \tau \geq V_3(T_3)$ 时, $T = T_4 + T_3$, 否则 $T = T_2$.

再由 V_2 单调递减且有界可知 V_2 将收敛到一个常数, 从而 V_4 和 V_5 也将分别收敛到一个常数, 即自适应控制增益 $\beta_i(t), \gamma_i(t)$ 将分别收敛到一个常数. \square

注2 相较于文献[21], 定理2解决了带有扰动的非线性多智能体系统的自适应有限时间二分跟踪一致问题, 所提出的自适应控制协议同时消除了控制增益对Laplacian矩阵的谱、领导者控制输入和不确定干扰的界的依赖.

3 仿真实验

本节给出一些仿真实例来验证理论结果. 考虑由单个领导者(标记为0)和5个跟随者(标记为1~5)组成的多智能体系统(1), 其通信网络如图1所示.

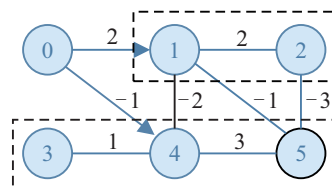


图1 通信网络

从图1中可以看出,所有智能体被划分为两个子群 $\mathcal{V}_1 = \{v_1, v_2\}$ 和 $\mathcal{V}_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$. 只有智能体1和智能体4可以接收到领导者的信息,令 $\mathcal{B} = \text{diag}\{2, 0, 0, -1, 0\}$, 则

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

令 $d_i(t, x_i(t)) = \sin(x_i(t))$, $f(t, x_i(t)) = \sin(x_i(t)) + 1.5 \arctan(x_i(t))$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. 选择初始值为 $x(0) = [8, -5, 3, -8, -1, 1]^T$, $\alpha = 45$, $C = 0.1$, $\theta, m = 1$, $n = 25$, 领导者的控制输入 $u_0(t) = \cos(x_0(t))$, 则 $|u_0(t)| \leq 1$. 经过计算可以得到 $\lambda_{\min}(\mathcal{H}) = 0.4506$, $\lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{H}}) = 0.5230$.

例1 考虑跟随智能体采用控制协议(4)的多智能体系统(1).

由定理1可得 $\beta = 2.3300$, $\gamma = 13.1182$. 智能体的状态轨迹如图2所示.

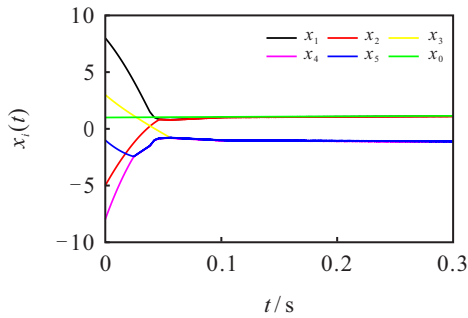


图2 控制协议(4)下的状态 x_i 轨迹

从图2中可以看出,跟随者可以在0.1s左右的时间跟踪到领导者,其中智能体1和智能体2收敛到与领导者相同的状态,而智能体3~智能体5收敛到与领导者相反的状态.

例2 考虑跟随智能体采用控制协议(18)的多智能体系统(1). 取 $\beta_1(0) = 1$, $\beta_2(0) = 6$, $\beta_3(0) = 15$, $\beta_4(0) = 3$, $\beta_5(0) = 9$, $\gamma_1(0) = 3$, $\gamma_2(0) = 5$, $\gamma_3(0) = 4$, $\gamma_4(0) = 7$, $\gamma_5(0) = 6$, $\alpha = 3$. 它的状态轨迹和两个自适应增益轨迹如图3~图5所示.

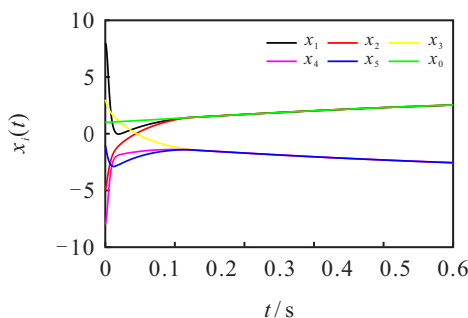


图3 控制协议(18)下的状态 x_i 轨迹

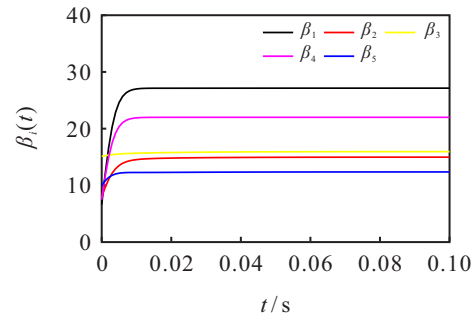


图4 控制协议(18)下的自适应增益 β_i 轨迹

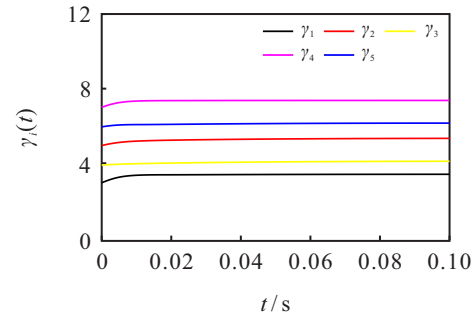


图5 控制协议(18)下的自适应增益 γ_i 轨迹

从图3中可以看出,跟随者能在0.13s左右跟踪到领导者,其中智能体1和智能体2收敛到与领导者相同的状态,而智能体3~智能体5收敛到与领导者相反的状态. 从图4和图5中可以看出,自适应增益随着时间的变化,最终收敛到某一常数.

4 结论

本文研究了具有动态领导者和不确定扰动的一阶非线性多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性. 基于全局有限时间稳定性理论,分别提出并分析了静态分布式协议和自适应分布式协议,后者在前者的基础上消除了控制增益对全局信息的依赖,这具有更实用的价值. 最后,通过两个仿真实例验证了理论结果的有效性. 未来工作将考虑具有矩阵加权网络或二阶多智能体系统的有限时间二分跟踪一致性问题.

参考文献(References)

[1] 杨光红, 张志慧. 基于区间观测器的动态系统故障诊断技术综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 769-781. (Yang G H, Zhang Z H. Review of interval observer based fault diagnosis techniques for dynamic systems[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 769-781.)

[2] 董新民, 丁超, 陈勇, 等. 完全分布式异构多智能体系统有限时间跟踪[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 870-876. (Dong X M, Ding C, Chen Y, et al. Fully distributed finite-time tracking of heterogeneous multi-agent systems[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 870-876.)

- 870-876.)
- [3] 王祥科, 李迅, 郑志强. 多智能体系统编队控制相关问题研究综述[J]. 控制与决策, 2013, 28(11): 1601-1613. (Wang X K, Li X, Zheng Z Q. Survey of developments on multi-agent formation control related problems[J]. Control and Decision, 2013, 28(11): 1601-1613.)
- [4] Ren W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state[J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(7/8): 474-483.
- [5] Zhang C F, Wu H, He J, et al. Consensus tracking for multi-motor system via observer based variable structure approach[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(8): 3366-3377.
- [6] Liu K E, Ji Z J, Ren W. Necessary and sufficient conditions for consensus of second-order multiagent systems under directed topologies without global gain dependency[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2089-2098.
- [7] Sun C, Hu G Q, Xie L H. Robust consensus tracking for a class of high-order multi-agent systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(3): 578-598.
- [8] Li Z X, Ji H B. Distributed consensus and tracking control of second-order time-varying nonlinear multi-agent systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(17): 3549-3563.
- [9] Ma Z G, Liu Z X, Chen Z Q. Leader-following consensus of multi-agent system with a smart leader[J]. Neurocomputing, 2016, 214: 401-408.
- [10] 周托, 刘全利, 王东, 等. 积分事件触发策略下的线性多智能体系统领导跟随一致性[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1258-1266. (Zhou T, Liu Q L, Wang D, et al. Leader-following consensus for linear multi-agent systems based on integral-type event-triggered strategy[J]. Control and Decision, 2022, 37(5): 1258-1266.)
- [11] Yu W W, Ren W, Zheng W X, et al. Distributed control gains design for consensus in multi-agent systems with second-order nonlinear dynamics[J]. Automatica, 2013, 49(7): 2107-2115.
- [12] Sharifi A, Pourgholi M. Adaptive controller design for fixed-time leader-following consensus of multi-agent systems with discontinuous dynamics[J]. International Journal of Control, 2022, 95(3): 830-839.
- [13] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(4): 935-946.
- [14] 马小陆, 谭毅波, 梅宏. 符号图下含扰动的多智能体系统预定时间二分一致性[J]. 控制与决策, 2024, 39(5): 1517-1526. (Ma X L, Tan Y B, Mei H. Predefined-time bipartite consensus of multi-agent systems with disturbances under signed graph[J]. Control and Decision, 2024, 39(5): 1517-1526.)
- [15] Xu H C, Su H S, Wang Q M, et al. Semi-global adaptive bipartite output consensus of multi-agent systems subject to input saturation and external disturbance under switching network[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2021, 19(9): 3037-3048.
- [16] Wen G H, Wang H, Yu X H, et al. Bipartite tracking consensus of linear multi-agent systems with a dynamic leader[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2018, 65(9): 1204-1208.
- [17] Cortés J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1993-2000.
- [18] Han T, Guan Z H, Xiao B, et al. Bipartite average tracking for multi-agent systems with disturbances: Finite-time and fixed-time convergence[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2021, 68(10): 4393-4402.
- [19] Zhao L, Liu Y G, Li F Z, et al. Fully distributed adaptive finite-time consensus for uncertain nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(7): 6972-6983.
- [20] Sharifi A, Pourgholi M. Fixed-time bipartite consensus of nonlinear multi-agent systems using event-triggered control design[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(17): 9178-9198.
- [21] He S L, Wang H, Yu W W. Distributed fast finite-time tracking consensus of multi-agent systems with a dynamic leader[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(4): 2176-2180.

作者简介

王志超(1998—), 男, 硕士生, 从事多智能体系统控制与应用的研究, E-mail: 2021020271@qdu.edu.cn;

刘开恩(1974—), 男, 副教授, 博士, 从事方程稳定性理论、多智能体系统分布式协作控制等研究, E-mail: kaienliu@aliyun.com;

纪志坚(1973—), 男, 教授, 博士, 从事多智能体网络系统、多机器人系统的分布式协调控制、复杂网络的分析与控制等研究, E-mail: jizhijian@pku.org.cn;

赵美林(1998—), 女, 硕士生, 从事多智能体系统控制与应用的研究, E-mail: 2021020274@qdu.edu.cn.