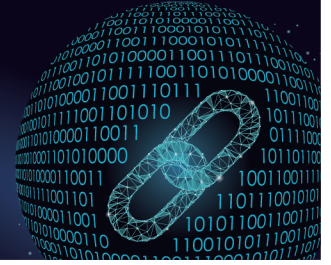




控制与决策

CONTROL AND DECISION



一类具有不稳定子系统的时滞切换非线性正系统指数稳定性

梁孟仟, 田亚州

引用本文:

梁孟仟, 田亚州. 一类具有不稳定子系统的时滞切换非线性正系统指数稳定性[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3297–3304.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0873>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 H_∞ 控制

Non-fragile H_∞ control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

基于反馈无源化的切换非线性系统 H_∞ 跟踪控制

Passification-based H_∞ tracking control for a class of switched nonlinear systems

控制与决策. 2021, 36(11): 2729–2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

基于模型依赖驻留时间的异步切换控制

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time

控制与决策. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制

The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger

控制与决策. 2021, 36(10): 2467–2474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0281>

有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制

Group attitude coordinated control of multi-spacecraft with directed switching topologies

控制与决策. 2021, 36(10): 2389–2398 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0311>

一类具有不稳定子系统的时滞切换非线性正系统 指数稳定性

梁孟仟, 田亚州[†]

(济南大学 数学科学学院, 济南 250022)

摘要: 研究具有不稳定模态的时滞切换非线性正系统的指数稳定问题. 首先, 针对具有不稳定模态的时滞切换非线性正系统, 基于改进的 Halanay 不等式技术结合多重最大分离 Lyapunov 函数, 并设计模态依赖的切换策略, 建立系统指数稳定的充分条件; 其次, 由于不再限制子系统运行的最小驻留时间, 相比已有结果该条件的保守性更低, 并且时滞切换线性正系统指数稳定作为该结果的特殊情况也被得到; 最后, 通过给定的数值实例展示理论结果的有效性.

关键词: 切换非线性正系统; 时滞; 不稳定子系统; 改进的 Halanay 不等式; 模态依赖平均驻留时间; 指数稳定

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0873

引用格式: 梁孟仟, 田亚州. 一类具有不稳定子系统的时滞切换非线性正系统指数稳定性[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3297-3304.

Exponential stability for a class of switched nonlinear positive systems with partial unstable subsystems and time-delay

LIANG Meng-qian, TIAN Ya-zhou[†]

(School of Mathematical Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract: This article investigates exponential stability problems of switched nonlinear positive systems (SNPSs) with partial unstable subsystems and time-delay. Firstly, based on improved Halanay inequality technique combined with multiple max-separable Lyapunov functions, and designing mode dependent average dwell time (MDADT) switching strategies, sufficient conditions of exponential stability of the SNPS are obtained. Then, the conservatism of stability conditions is lower than the previous results due to no restrictions on minimum dwell time of each subsystem, and exponential stability conditions of switched positive linear systems including time-delay, as the special cases, are concluded. Finally, a given example is shown to illustrate the effectiveness of theoretical results.

Keywords: switched nonlinear positive systems; delay; unstable subsystems; improved Halanay inequality; mode dependent average dwell time; exponential stability

0 引言

当系统具有非负的初始状态和控制输入时, 系统的状态变量及控制输出变量总是非负的, 满足上述条件的系统称为正系统, 其在生物、化学及网络等领域中具有广泛应用, 如 TCP 网络拥塞控制^[1]、病毒逃逸问题^[2] 和事件触发输出反馈控制^[3] 等. 切换正系统由一组均为正的子模态和一个用于控制各模态间切换的规则构成, 在多智能体系统^[4] 和有限时间控制^[5] 等研究中具有大量应用.

稳定性问题作为切换正系统研究的一个热点

问题, 有着丰富的研究成果, 其中一个基本的技术路线是构建不同类型的 Lyapunov 函数, 如余正 (co-positive) Lyapunov 函数^[6]、离散化 Lyapunov 函数^[7-8] 和最大分离 Lyapunov 函数^[9-11] 等. 此外, 针对实际系统建模时通常要考虑时滞的影响, 时滞不仅使系统状态行为更加复杂, 也使得稳定性分析更加困难. 针对时滞切换线性系统, 基于 Halanay 不等式, 从岫等^[12] 建立二次型 Lyapunov 函数分析了具有时滞的切换线性系统的指数稳定性问题. 依赖调整稳定和不稳定子系统合理的运行时间比例, 文献^[13] 建立了具

收稿日期: 2023-06-21; 录用日期: 2023-10-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61807015, 61873110).

责任编委: 卢剑权.

[†]通讯作者. E-mail: tianyazhou369@163.com.

有不稳定子系统和时滞的切换线性系统指数稳定的充分条件. 不同于 Halanay 不等式方案, 通过构建一种新的离散化余正 Lyapunov 函数, 文献 [14] 建立了非线性互联切换正系统 l_1 增益下指数稳定的充分条件. 针对由不稳定子组成的时滞切换线性正系统, Liu 等 [15] 构建多重离散化 Lyapunov-Krasovskii 函数, 建立了系统指数稳定条件. Zhou 等 [16] 进一步给出了具有分布时滞的切换线性正系统的指数稳定新判据. 另一方面, 针对切换系统稳定性问题, 切换信号的设计一直是研究系统稳定性的一个重点. 而时间依赖的切换信号设计问题的研究可以分为以下两类: 一类是在任意切换信号下系统稳定问题, 另一类是在约束切换信号下系统稳定问题. 约束的切换信号设计主要有最小驻留时间依赖的切换策略、平均驻留时间 [17] 依赖的切换策略以及模态依赖驻留时间的切换策略等. 模态依赖平均驻留时间切换策略最早在文献 [18] 中被提出, 相较于其他切换信号设计, 该技术因其能显著降低结果的保守性被广泛应用于切换系统.

事实上, 非线性系统相较于线性系统能够描述更复杂的动力学行为, 因此非线性系统稳定性的研究愈发重要. 针对具有时变时滞的切换非线性正系统, 采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析其稳定性通常会导致方程难以求解或者结果的保守性较强. 因此, Feyzmahdavian 等 [19] 基于比较定理提出一种非 Lyapunov 函数法, 用于研究非线性正系统的指数稳定问题, 并得到该系统的指数衰减速度随着时滞的增大而减小. 基于该技术, Dong [20] 将研究结果拓展至包括连续和离散两种情况的切换非线性正系统, 并给出其指数稳定的充分条件. 更进一步, 文献 [21] 针对具有离散和分布时滞的切换非线性系统, 研究了该系统的指数稳定问题. Nguyen 等 [22] 又应用该技术给出了时滞正系统的 α 指数状态估计值.

注意到, 文献 [19-22] 中切换系统的子系统均是稳定的. 当子系统全部为稳定子系统时, 多数文献 [19-22] 采用比较定理的分析方法, 其基本思想是先预设一个公共的收敛速率, 后采用数学归纳法完成证明. 当子系统具有不稳定模态时, 由于不稳定子系统是不收敛的, 致使所有子系统很难寻找到一个公共的收敛速率, 因此该方案不易实施. 最近, 文献 [23] 运用最大分离 Lyapunov 函数技术针对一类切换非线性正系统的实用稳定问题开展了深入研究. 受其启发, 本文运用改进的 Halanay 不等式结合多重最大分离 Lyapunov 函数研究带有不稳定模态和时滞的切换非

线性正系统的指数稳定问题.

1 问题描述

定义 $N_0(R, R^n)$ 为自然数(实数, n 维欧几里得空间), R_+^n 为所有 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in R^n$ 且 \mathbf{x} 各元素均非负的向量的集合. 给定两个 n 维向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$) 当且仅当 $x_i > y_i$ ($x_i \geq y_i$), $i = 1, 2, \dots, n$. 特别地, 向量 \mathbf{x} 的无穷范数 $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. 此外, 如果一个方阵 A 的非对角线元素均是非负的, 则 A 称为 Metzler 矩阵. 考虑如下时滞切换非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t - \tau(t))), & t \geq t_0; \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 表示系统的状态变量; $0 \leq \tau(t) \leq \tau$ 表示系统时滞, $\tau > 0$ 为时滞最大上界. 一个右连续的切换信号 $\sigma(t)$ 被定义在时间序列 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ 上, 并映射到有限集 $\Lambda = \{1, 2, \dots, M\}$, M 为子模态数量. 另外, $\Lambda^s = \{1, 2, \dots, N\}$ ($\Lambda^u = \Lambda \setminus \Lambda^s$) 代表系统所有稳定模态(不稳定模态)的集合, 显然有 $\Lambda = \Lambda^s \cup \Lambda^u$. 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 表示第 $\sigma(t_k)$ 个子系统在运行. $\boldsymbol{\phi}(t)$ 为系统初始函数, 范数为 $\|\boldsymbol{\phi}(t_0)\|_\tau = \sup_{t_0 - \tau \leq t \leq t_0} \|\boldsymbol{\phi}(t)\|$. 对于任意一个 $m \in \Lambda$, \mathbf{f}_m 和 \mathbf{g}_m 为连续的向量值函数, 且有 $\mathbf{f}_m(\mathbf{0}) = \mathbf{g}_m(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

定义 1 [19] 若 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 、 $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ 分别在 R^n 、 $R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上连续, 并对于任意一个向量 $\mathbf{a} \in R_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ 为一个 Metzler 矩阵, 则 $\mathbf{f} : R^n \rightarrow R^n$ 在 R^n 上被定义为一个协作向量域.

定义 2 [19] 如果 $\mathbf{g} : R^n \rightarrow R^n$ 在 R_+^n 上称为一个保序向量域, 则对于任意非负向量 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} , 满足 $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ 即有 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{g}(\mathbf{y})$.

定义 3 [19] 对于任意给定的 $\mathbf{x} \in R^n$ 以及正数 γ , 如果 $\mathbf{f}(\gamma \mathbf{x}) = \gamma \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 成立, 则称 \mathbf{f} 是齐次度为 1 的向量域.

定义 4 [23] $N_\sigma(t, t_0)$ 为系统 (1) 在时间段 $[t_0, t]$ 上的切换次数, 切换信号 $\sigma(t)$ 的平均驻留时间 τ_a 满足下列不等式:

$$N_\sigma(t, t_0) \leq N_0 + \frac{t - t_0}{\tau_a}, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

其中 $N_0 \geq 0$ 为抖振界, 一般地 $N_0 = 0$.

定义 5 [18] 对于任意 $m \in \Lambda$, $N_{\sigma m}(t, t_0)$ 为第 m 个子系统在时间段 $[t_0, t]$ 上的切换次数, 切换信号 $\sigma(t)$ 具有模态依赖平均驻留时间 τ_{am} 并满足如下不

等式:

$$N_{\sigma m}(t, t_0) \leq N_{0m} + \frac{t - t_0}{\tau_{am}}, \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

其中 $N_{0m} \geq 0$ 为第 m 个子系统的抖振界, 称为模态依赖抖振界, 一般地 $N_{0m} = 0$.

引理 1 (改进的 Halanay 不等式) 如果一个连续映射 $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow R_+$ 满足如下时滞微分不等式:

$$D^+ \rho(t) \leq -\alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \sup_{\theta \in [t-\tau, t]} \rho(\theta). \quad (4)$$

其中: D^+ 为右上 Dini 导数算子, $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 均为非负有界分段右连续函数且有 $\alpha(t) - \beta(t) > 0$. 此外, 存在一个正数 λ 对于任意 $t \geq t_0$ 满足不等式

$$-\alpha(t) + \beta(t)e^{\lambda\tau} + \lambda \leq 0. \quad (5)$$

则下述不等式成立:

$$\rho(t) \leq \|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (6)$$

其中 $\|\psi(t_0)\|_\tau = \sup_{\theta \in [t_0-\tau, t_0]} \rho(\theta)$, $\rho(\theta) \geq 0$.

证明 令 $z(t) = \rho(t) - \|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t-t_0)}$. 下面证明当 $t \geq t_0$ 时, $z(t) \leq 0$. 显然, 当 $t = t_0$, 有 $z(t) \leq 0$. 基于反证法, 如果该不等式不恒成立, 则存在一点 $t^* > t_0$ 满足下列不等式:

$$\begin{aligned} z(t) &\leq 0, \quad t \in (t_0, t^*), \\ z(t^*) &= 0, \quad D^+ z(t)|_{t=t^*} > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

根据式(4)、(5)和(7), 有

$$\begin{aligned} 0 &< D^+ z(t)|_{t=t^*} = \\ &D^+(\rho(t) - \|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t-t_0)})|_{t=t^*} \leq \\ &D^+ \rho(t)|_{t=t^*} - D^+(\|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t-t_0)})|_{t=t^*} \leq \\ &-\alpha(t^*)\rho(t^*) + \beta(t^*) \sup_{\theta \in [t^*-\tau, t^*]} \rho(\theta) + \\ &\lambda \|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t^*-t_0)} \leq \\ &-\alpha(t^*) \|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t^*-t_0)} + \\ &\beta(t^*) \sup_{\theta \in [t^*-\tau, t^*]} \|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(\theta-t_0)} + \\ &\lambda \|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t^*-t_0)} \leq \\ &\|\psi(t_0)\|_\tau (-\alpha(t^*)e^{-\lambda(t^*-t_0)} + \lambda e^{-\lambda(t^*-t_0)} + \\ &\sup_{\theta \in [t^*-\tau, t^*]} \beta(t^*)e^{-\lambda(t^*-t_0+\theta-t^*)}) \leq \\ &\|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t^*-t_0)} (-\alpha(t^*) + \lambda + \\ &\sup_{\theta \in [t^*-\tau, t^*]} \beta(t^*)e^{\lambda(t^*-\theta)}) \leq \\ &\|\psi(t_0)\|_\tau e^{-\lambda(t^*-t_0)} (-\alpha(t^*) + \beta(t^*)e^{\lambda\tau} + \lambda) \leq 0, \end{aligned}$$

这显然是不可能的, 因此式(6)成立. \square

引理 2 (改进的 Halanay 不等式) 如果一个连续

映射 $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow R_+$ 满足如下时滞微分不等式:

$$D^+ \rho(t) \leq \alpha(t)\rho(t) + \beta(t) \sup_{\theta \in [t-\tau, t]} \rho(\theta), \quad (8)$$

其中对于任意 $t \geq t_0$, $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 均是非负有界分段右连续函数, 并满足 $\beta(t) > 0$ 以及 $\alpha(t) + \beta(t) > 0$. 则显然存在一个正数 λ , 对于任意 $t \geq t_0$ 满足 $\alpha(t) + \beta(t) \leq \lambda$, 使得如下不等式成立:

$$\rho(t) \leq \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (9)$$

对于任意 $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$, $\rho(\theta) \geq 0$, 并记 $\|\psi(t_0)\|_\tau = \sup_{\theta \in [t_0-\tau, t_0]} \rho(\theta)$.

证明 令 $z(t) = \rho(t) - \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t-t_0)}$. 根据 $\|\psi(t_0)\|_\tau$ 的定义, 当 $t = t_0$ 时, 有 $z(t) \leq 0$. 基于反证法, 若式(9)不恒成立, 则存在一点 $t^* > t_0$ 满足不等式

$$\begin{aligned} z(t) &\leq 0, \quad t \in (t_0, t^*), \\ z(t^*) &= 0, \quad D^+ z(t)|_{t=t^*} > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

结合式(8)、(10)和 λ 的定义, 有

$$\begin{aligned} 0 &< D^+ z(t)|_{t=t^*} = \\ &D^+(\rho(t) - \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t-t_0)})|_{t=t^*} \leq \\ &D^+ \rho(t)|_{t=t^*} - D^+(\|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t-t_0)})|_{t=t^*} \leq \\ &\alpha(t^*)\rho(t^*) + \beta(t^*) \sup_{\theta \in [t^*-\tau, t^*]} \rho(\theta) - \\ &\lambda \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t^*-t_0)} \leq \\ &\alpha(t^*) \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t^*-t_0)} - \lambda \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t^*-t_0)} + \\ &\beta(t^*) \sup_{\theta \in [t^*-\tau, t^*]} \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(\theta-t_0)} \leq \\ &\alpha(t^*) \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t^*-t_0)} - \lambda \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t^*-t_0)} + \\ &\beta(t^*) \|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t^*-t_0)} \leq \\ &\|\psi(t_0)\|_\tau e^{\lambda(t^*-t_0)} (\alpha(t^*) + \beta(t^*) - \lambda) \leq 0. \end{aligned}$$

这显然是矛盾的, 因此式(9)成立. \square

注 1 相较于已有的 Halanay 不等式结果^[12-13], 引理 1 和引理 2 不再要求 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 是连续函数, 仅需要其为分段右连续函数. 通过构建比较系统, 借助文献[21]的理论结果, 不难验证 $\rho(t)$ 的上界不受 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 不连续的影响, 原因在于多数文献^[19-22]使用的证明方法要求其连续仅为证明式(5), 但本文中(5)已作为充分条件给出, 因此本文对 Halanay 不等式的改进是合理的.

2 主要结论

本节设计模态依赖平均驻留时间切换策略, 建立带有不稳定模态和时滞的切换非线性正系统的指数稳定条件. 证明前给出一些必要的假设.

假设 1 对于 $\forall m \in A$, f_m 是一个齐次度为 1 的

协作向量域.

假设2 对于 $\forall m \in \Lambda, g_m$ 是一个齐次度为1的保序向量域.

注2 若系统(1)满足假设1和假设2,则由文献[19]可知,若 $\phi(t) \succeq 0, t \in [t_0 - \tau, t_0]$,则系统(1)的所有状态均非负,即系统(1)为正系统.

定理1 对于 $\forall \theta \in \Lambda^s$ 以及 $\forall h \in \Lambda^u$,如果存在两组正向量 ξ_θ 和 ξ_h 使得下列不等式成立:

$$f_\theta(\xi_\theta) + g_\theta(\xi_\theta) \prec 0, \tag{11}$$

$$f_h(\xi_h) + g_h(\xi_h) \succ 0, \tag{12}$$

且对于 $\forall p, q \in \Lambda$ 和一组正的常数 $\mu_q \geq 1$, 满足

$$\xi_p - \mu_q \xi_q \preceq 0. \tag{13}$$

给定3个正数 $\epsilon, \underline{\epsilon}, \bar{\epsilon} > 0, \epsilon \in (0, \underline{\epsilon})$, 设计如下MDADT切换方案:

$$\frac{\ln \mu_\theta + \lambda_\theta \tau}{\tau_{a\theta}} - \lambda_\theta \leq -\underline{\epsilon}, \frac{\ln \mu_h}{\tau_{ah}} + \lambda_h \leq \bar{\epsilon}, \tag{14}$$

$$\mathcal{T}_s(t_0, t) = \sum_{\theta=1}^N \mathcal{T}_\theta(t_0, t), \tag{15}$$

$$\mathcal{T}_u(t_0, t) = \sum_{h=N+1}^M \mathcal{T}_h(t_0, t), \tag{16}$$

$$\frac{\bar{\epsilon} + \epsilon}{\underline{\epsilon} - \epsilon} \leq \frac{\mathcal{T}_s(t_0, t)}{\mathcal{T}_u(t_0, t)}. \tag{17}$$

则系统(1)的解满足

$$\|\mathbf{x}(t)\|_\infty \leq a e^{-\epsilon(t-t_0)}. \tag{18}$$

其中

$$a = \bar{\alpha} e^{\bar{\lambda}\tau} \|\phi(t_0)\|_\tau \prod_{\theta=1}^N (\mu_\theta e^{\lambda_\theta \tau})^{N_{0\theta}} \prod_{h=N+1}^M \mu_h^{N_{0h}},$$

$$\bar{\alpha} = \max_{p,q \in \Lambda, 1 \leq i, j \leq n} \frac{\xi_{pi}}{\xi_{qj}}, \bar{\lambda} = \max_{\theta \in \Lambda^s} \lambda_\theta; \tag{19}$$

$$j(t) = \operatorname{argmax}_i \frac{x_{\sigma(t)i}(t)}{\xi_{\sigma(t)i}}; \tag{20}$$

$$\alpha_\theta(t) = -\frac{f_{\theta j(t)}(\xi_\theta)}{\xi_{\theta j(t)}}, \beta_\theta(t) = \frac{g_{\theta j(t)}(\xi_\theta)}{\xi_{\theta j(t)}}; \tag{21}$$

$$\alpha_h(t) = \frac{f_{h j(t)}(\xi_h)}{\xi_{h j(t)}}, \beta_h(t) = \frac{g_{h j(t)}(\xi_h)}{\xi_{h j(t)}}; \tag{22}$$

$$-\alpha_\theta(t) + \beta_\theta(t) e^{\lambda_\theta \tau} + \lambda_\theta \leq 0, \alpha_h(t) + \beta_h(t) \leq \lambda_h. \tag{23}$$

这里 $j(t)$ 为时间 t 到有限集 $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个映射.

证明 定义多重最大分离Lyapunov函数

$$V_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t)) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i(t)}{\xi_{\sigma(t)i}}. \tag{24}$$

由式(24)的定义,有

$$\mathbf{x}(t) \preceq V_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t)) \xi_{\sigma(t)},$$

$$\mathbf{x}(t - \tau(t)) \preceq V_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t - \tau(t))) \xi_{\sigma(t)}. \tag{25}$$

根据假设1、假设2以及式(25),如下不等式成立:

$$f_{\sigma(t)j(t)}(\mathbf{x}(t)) \leq V_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t)) f_{\sigma(t)j(t)}(\xi_{\sigma(t)}),$$

$$g_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t - \tau(t))) \preceq V_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t - \tau(t))) g_{\sigma(t)}(\xi_{\sigma(t)}). \tag{26}$$

下文分两种情况考虑.

情况1 针对稳定子系统,若 $t \in [t_k, t_{k+1})$,则一定存在一个 $\theta \in \Lambda^s$ 使得 $\sigma(t_k) = \theta$. 下文为简化书写,令 $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t)) = V_\theta(t)$. 根据式(20)、(21)、(23)~(26),有

$$\begin{aligned} D^+ V_\theta(t) &= \frac{\dot{x}_{j(t)}(t)}{\xi_{\theta j(t)}} = \\ & \frac{f_{\theta j(t)}(\mathbf{x}(t)) + g_{\theta j(t)}(\mathbf{x}(t - \tau(t)))}{\xi_{\theta j(t)}} \leq \\ & \frac{f_{\theta j(t)}(V_\theta(t) \xi_\theta) + g_{\theta j(t)}(V_\theta(t - \tau(t)) \xi_\theta)}{\xi_{\theta j(t)}} = \\ & \frac{V_\theta(t) f_{\theta j(t)}(\xi_\theta)}{\xi_{\theta j(t)}} + \frac{V_\theta(t - \tau(t)) g_{\theta j(t)}(\xi_\theta)}{\xi_{\theta j(t)}} \leq \\ & -\alpha_\theta(t) V_\theta(t) + \beta_\theta(t) \|V_\theta(t)\|_\tau, \end{aligned}$$

其中 $\|V_\theta(t)\|_\tau = \sup_{\chi \in [t-\tau, t]} V_\theta(\chi)$. 根据引理1可得

$$V_\theta(t) \leq \|V_\theta(t_k)\|_\tau e^{-\lambda_\theta(t-t_k)}. \tag{27}$$

情况2 针对不稳定子系统,若 $t \in [t_k, t_{k+1})$,则必定存在 $h \in \Lambda^u$ 满足 $\sigma(t_k) = h$. 类似于情况1的证明,根据式(20)、(22)、(23)和(26),有

$$D^+ V_h(t) \leq \alpha_h(t) V_h(t) + \beta_h(t) \|V_h(t)\|_\tau.$$

结合引理2,有

$$V_h(t) \leq \|V_h(t_k)\|_\tau e^{\lambda_h(t-t_k)}. \tag{28}$$

此外,对于任意 $t \geq t_0$, 存在一个自然数 k , 使得 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 则有

$$\begin{aligned} \|V_{\sigma(t_k)}(t_k)\|_\tau &= \sup_{\theta \in [t_k - \tau, t_k]} V_{\sigma(t_k)}(\theta) = \\ & \max\{ \sup_{\theta \in [t_k - \tau, t_k]} V_{\sigma(t_k)}(\theta), V_{\sigma(t_k)}(t_k) \}. \end{aligned} \tag{29}$$

根据式(13),如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [t_k - \tau, t_k]} V_{\sigma(t_k)}(\theta) &= \sup_{\theta \in [t_k - \tau, t_k]} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i(\theta)}{\xi_{\sigma(t_k)i}} \leq \\ & \sup_{\theta \in [t_k - \tau, t_k]} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i(\theta)}{\xi_{\sigma(\theta)i}} \frac{\xi_{\sigma(\theta)i}}{\xi_{\sigma(t_k)i}} \leq \\ & \mu_{\sigma(t_k)} \sup_{\theta \in [t_k - \tau, t_k]} V_{\sigma(\theta)}(\theta). \end{aligned} \tag{30}$$

此外,有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t_k)}(t_k) &= \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i(t_k)}{\xi_{\sigma(t_k-1)i}} \frac{\xi_{\sigma(t_k-1)i}}{\xi_{\sigma(t_k)i}} \leq \\ & \mu_{\sigma(t_k)} V_{\sigma(t_k-1)}(t_k). \end{aligned} \tag{31}$$

结合式(29)~(31),一定存在一个非负整数 $l < k$ 以及 $t^* \in [t_k - \tau, t_k]$, 满足

$$\|V_{\sigma(t_k)}(t_k)\|_{\tau} \leq \mu_{\sigma(t_k)} V_{\sigma(t_l)}(t^*). \tag{32}$$

针对 $V_{\sigma(t_l)}(t^*)$, 分 3 种情形进行讨论.

1) 如果 $t^* \leq t_0$, 则 $l = 0$, 有

$$V_{\sigma(t_l)}(t^*) \leq \begin{cases} \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)} \tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^s; \\ \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^u. \end{cases}$$

2) 如果 $t^* = t_k$, 则 $l = k - 1$, 有

$$V_{\sigma(t_l)}(t^*) \leq \begin{cases} \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t^*-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^s \\ \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t^*-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^u \end{cases} \leq \begin{cases} \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)} \tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^s; \\ \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^u. \end{cases}$$

3) 如果 $t_0 < t^* < t_k$, 则存在 $l \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, 使得 $t^* \in [t_l, t_{l+1}]$, 若 $\sigma(t_l) \in \Lambda^s$, 则有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t_l)}(t^*) &\leq \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t^*-t_l)} \leq \\ &\|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t^*)} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)} \leq \\ &\|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)} \tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}. \end{aligned}$$

若 $\sigma(t_l) \in \Lambda^u$, 则有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t_l)}(t^*) &\leq \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t^*-t_l)} \leq \\ &\|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t^*-t_{l+1})} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)} \leq \\ &\|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}. \end{aligned}$$

综合上述 3 种情形, 有

$$V_{\sigma(t_l)}(t^*) \leq \begin{cases} \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)} \tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^s; \\ \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^u. \end{cases} \tag{33}$$

由式(27)、(28)、(32)和(33), 对于任意 $t \in [t_k, t_{k+1}]$, 有

$$V_{\sigma(t_k)}(t) \leq \begin{cases} \|V_{\sigma(t_k)}(t_k)\|_{\tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)}, & \sigma(t_k) \in \Lambda^s \\ \|V_{\sigma(t_k)}(t_k)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)}, & \sigma(t_k) \in \Lambda^u \end{cases} \leq$$

$$\mu_{\sigma(t_k)} \begin{cases} V_{\sigma(t_l)}(t^*) e^{-\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)}, & \sigma(t_k) \in \Lambda^s \\ V_{\sigma(t_l)}(t^*) e^{\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)}, & \sigma(t_k) \in \Lambda^u \end{cases} \leq$$

$$\mu_{\sigma(t_k)} \begin{cases} e^{-\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)}, & \sigma(t_k) \in \Lambda^s \\ e^{\lambda_{\sigma(t_k)}(t-t_k)}, & \sigma(t_k) \in \Lambda^u \end{cases} \times$$

$$\begin{cases} \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)} \tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^s \\ \|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^u \end{cases} \leq$$

$$\|V_{\sigma(t_l)}(t_l)\|_{\tau} \prod_{h=N+1}^M \mu_h^{N_h(t_{l+1}, t)} e^{\lambda_h \mathcal{T}_h(t_{l+1}, t)} \times$$

$$\prod_{j=1}^N (\mu_j e^{\lambda_j \tau})^{N_j(t_{l+1}, t)} e^{-\lambda_j \mathcal{T}_j(t_{l+1}, t)} \times \begin{cases} e^{\lambda_{\sigma(t_l)} \tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^s \\ e^{\lambda_{\sigma(t_l)}(t_{l+1}-t_l)}, & \sigma(t_l) \in \Lambda^u \end{cases} \leq$$

$$\|V_{\sigma(t_0)}(t_0)\|_{\tau} \prod_{h=N+1}^M \mu_h^{N_h(t_1, t)} e^{\lambda_h \mathcal{T}_h(t_1, t)} \times$$

$$\prod_{j=1}^N (\mu_j e^{\lambda_j \tau})^{N_j(t_1, t)} e^{-\lambda_j \mathcal{T}_j(t_1, t)} \times \begin{cases} e^{\lambda_{\sigma(t_0)} \tau} e^{-\lambda_{\sigma(t_0)}(t_1-t_0)}, & \sigma(t_0) \in \Lambda^s; \\ e^{\lambda_{\sigma(t_0)}(t_1-t_0)}, & \sigma(t_0) \in \Lambda^u. \end{cases}$$

由式(3)和(14)~(17), 有

$$V_{\sigma(t_k)}(t) \leq e^{\bar{\lambda} \tau} \|V_{\sigma(t_0)}(t_0)\|_{\tau} \prod_{h=N+1}^M \mu_h^{N_h(t_0, t)} e^{\lambda_h \mathcal{T}_h(t_0, t)} \times$$

$$\prod_{j=1}^N (\mu_j e^{\lambda_j \tau})^{N_j(t_0, t)} e^{-\lambda_j \mathcal{T}_j(t_0, t)} \leq$$

$$e^{\bar{\lambda} \tau} \|V_{\sigma(t_0)}(t_0)\|_{\tau} \prod_{h=N+1}^M \mu_h^{N_{0h}} e^{(\lambda_h + \frac{\ln \mu_h}{\tau_h}) \mathcal{T}_h(t_0, t)} \times$$

$$\prod_{j=1}^N (\mu_j e^{\lambda_j \tau})^{N_{0j}} e^{(-\lambda_j + \frac{\ln \mu_j + \lambda_j \tau}{\tau_j}) \mathcal{T}_j(t_0, t)} \leq$$

$$e^{\bar{\lambda} \tau} \|V_{\sigma(t_0)}(t_0)\|_{\tau} \prod_{j=1}^N (\mu_j e^{\lambda_j \tau})^{N_{0j}} \times$$

$$\prod_{h=N+1}^M \mu_h^{N_{0h}} e^{\sum_{j=1}^N -\underline{\epsilon} \mathcal{T}_j(t_0, t) + \sum_{N+1}^M \bar{\epsilon} \mathcal{T}_h(t_0, t)} \leq$$

$$e^{\bar{\lambda} \tau} \|V_{\sigma(t_0)}(t_0)\|_{\tau} \times$$

$$\prod_{j=1}^N (\mu_j e^{\lambda_j \tau})^{N_{0j}} \prod_{h=N+1}^M \mu_h^{N_{0h}} e^{-\epsilon(t-t_0)}. \tag{34}$$

根据 a 的定义, 式(34)可以重写为

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty} \leq a e^{-\epsilon(t-t_0)}. \quad \square$$

注 3 式(20)中 $j(t) \in \{1, 2, \dots, n\}$ 为一个分段函数, 因此对于任意 $m \in \Lambda$, 式(23)中 λ_m 的寻找较为简单. 下面分两种情况说明:

1) 对于任意 $t \geq t_0$ 和 $\theta \in \Lambda^s$, 有

$$(\alpha_{\theta}(t), \beta_{\theta}(t)) \in$$

$$\left\{ \left(\frac{f_{\theta 1}(\xi_{\theta})}{\xi_{\theta 1}}, \frac{g_{\theta 1}(\xi_{\theta})}{\xi_{\theta 1}} \right), \left(\frac{f_{\theta 2}(\xi_{\theta})}{\xi_{\theta 2}}, \frac{g_{\theta 2}(\xi_{\theta})}{\xi_{\theta 2}} \right), \dots, \left(\frac{f_{\theta n}(\xi_{\theta})}{\xi_{\theta n}}, \frac{g_{\theta n}(\xi_{\theta})}{\xi_{\theta n}} \right) \right\};$$

2) 对于任意 $t \geq t_0$ 和 $h \in A^u$, 有

$$\begin{aligned} & (\alpha_h(t), \beta_h(t)) \in \\ & \left\{ \left(\frac{f_{h1}(\xi_h)}{\xi_{h1}}, \frac{g_{h1}(\xi_h)}{\xi_{h1}} \right), \left(\frac{f_{h2}(\xi_h)}{\xi_{h2}}, \frac{g_{h2}(\xi_h)}{\xi_{h2}} \right), \dots, \left(\frac{f_{hn}(\xi_h)}{\xi_{hn}}, \frac{g_{hn}(\xi_h)}{\xi_{hn}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

综上, 对于 $\forall m \in \Lambda$, 式(23)只需验证 n 个式子, 这与文献[19]的计算量是相同的.

注4 文献[20]研究了仅有稳定模态组成的切换正系统的指数稳定问题, 而对于具有不稳定模态的切换正系统, 其分析技术是失效的, 本文采用一种新的分析方法获得了包含一部分不稳定模态和时滞的切换正系统指数稳定的充分条件.

注意到, 切换线性系统是一类特殊的切换齐次系统. 通过设计平均驻留时间的切换策略, 结合定理1给出其指数稳定标准.

推论1 对于 $\forall m \in \Lambda$, A_m 是一个 Metzler 矩阵, 且 B_m 是一个非负阵, 即 $B_m \succeq 0$. 考虑具有不稳定模态和时滞的切换线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}x(t - \tau(t)), & t \geq t_0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases}$$

对于 $\forall \theta \in A^s$ 和 $\forall h \in A^u$, 如果存在两组正向量 ξ_{θ} 和 ξ_h 使得如下不等式成立:

$$(A_{\theta} + B_{\theta})\xi_{\theta} < 0, (A_h + B_h)\xi_h > 0.$$

对于 $\forall p, q \in \Lambda$, 存在一个正数 $\mu \geq 1$ 满足

$$\xi_p - \mu\xi_q \leq 0.$$

设计如下 ADT 切换策略:

$$\frac{\ln \mu + \lambda \tau}{\tau_a} - \lambda < 0.$$

则存在一个正数 $\rho \in \left(0, \lambda - \frac{\ln \mu + \lambda \tau}{\tau_a}\right)$, 使得下式成立:

$$\frac{\ln \mu + \eta \tau_a + \rho \tau_a}{\lambda \tau_a - \ln \mu - \lambda \tau - \rho \tau_a} \leq \frac{T_s(t_0, t)}{T_u(t_0, t)}.$$

系统的解满足

$$\|x(t)\|_{\infty} \leq ae^{-\rho(t-t_0)}.$$

其中

$$a = \bar{\sigma} e^{\bar{\lambda} \tau} \mu^{N_0} \|\phi(t_0)\|_{\tau}, \bar{\sigma} = \max_{p, q \in \Lambda, 1 \leq i, j \leq n} \frac{\xi_{pi}}{\xi_{qj}},$$

$$\lambda = \min_{\theta \in A^s} \lambda_{\theta}, \eta = \max_{h \in A^u} \lambda_h,$$

λ_{θ} 和 λ_h 的定义与定理1一致.

注5 本文提供了一个简单的算法用于设计驻留时间系统的切换规则.

step 1: 针对稳定和不确定子系统, 选择两组正向量 $\xi_{\theta} (\forall \theta \in A^s)$ 以及 $\xi_h (\forall h \in A^u)$.

step 2: 验证上述两组正向量是否满足式(11)和(12), 若满足则转至 step 3; 若不满足则返回 step 1 继续寻找合适的正向量组.

step 3: 根据式(13)、(21)~(23), 计算 $\mu_q \geq 1 (\forall q \in \Lambda)$ 、 $\lambda_{\theta} (\forall \theta \in A^s)$ 和 $\lambda_h (\forall h \in A^u)$.

step 4: 设置两个正数 $\bar{\epsilon}$ 和 $\underline{\epsilon}$, 通过调整每个子模态的平均驻留时间 $\tau_{aq} (\forall q \in \Lambda)$ 使其满足式(14). 选择一个合适的 $\epsilon \in (0, \underline{\epsilon})$, 根据式(17)计算出稳定子系统和不稳定子系统运行时间的比值.

step 5: 结合式(15)和(16), 计算每个子系统的运行时间.

值得注意的是, step 1 中的正向量组可以通过建立非线性规划模型求解, 这不仅能有效寻找合适的正向量组, 而且能够防止该算法陷入 step 1 和 step 2 的循环.

3 数值例子

设系统(1)由两个子系统组成, 其参数为

$$f_1(x(t)) = \begin{bmatrix} -3x_1 + 0.4x_2 + 0.5\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0.5x_1 - 4x_2 + 0.7\sqrt{x_2^2 + 2x_2^2} \end{bmatrix},$$

$$g_1(x(t - \tau_1(t))) =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0.1x_1(t - \tau_1(t)) \\ 0.1x_2(t - \tau_1(t)) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0.1\sqrt{0.1x_1(t - \tau_1(t))^2 + 0.3x_2(t - \tau_1(t))^2} \\ 0.1\sqrt{0.3x_1(t - \tau_1(t))^2 + 0.1x_2(t - \tau_1(t))^2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$f_2(x(t)) =$$

$$\begin{bmatrix} 0.8x_1 + 0.4\sqrt{0.1x_1^2 + 0.3x_2^2} \\ 0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.4\sqrt{0.2x_1^2 + 0.1x_2^2} \end{bmatrix},$$

$$g_2(x(t - \tau_2(t))) =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0.4x_1(t - \tau_2(t)) \\ 0.6x_2(t - \tau_2(t)) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0.3\sqrt{0.2x_1(t - \tau_2(t))^2 + 0.2x_2(t - \tau_2(t))^2} \\ 0.3\sqrt{0.2x_1(t - \tau_2(t))^2 + 0.3x_2(t - \tau_2(t))^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

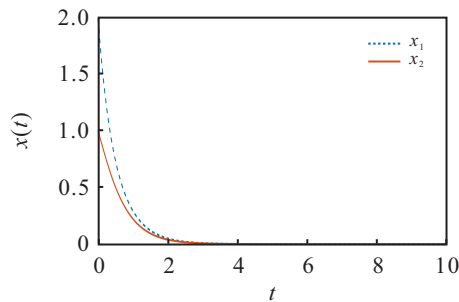
令 $\phi(t) = [2 - 2t \quad 1 + 3t^2]^T$, $\tau_1(t) = 0.4|\sin t|$, $\tau_2(t) = 0.2 + 0.2\cos t$, 则 $\tau = 0.4$. 经检验, f_1 和 f_2 满足假设1, g_1 和 g_2 满足假设2. 另外, 选择两个正的向量 $\xi_1 = [7 \quad 6]^T$, $\xi_2 = [8 \quad 6]^T$, 通过简单计算得到

$$f_1(7, 6) = \begin{bmatrix} -13.9902 \\ -12.8 \end{bmatrix}, g_1(7, 6) = \begin{bmatrix} 1.0962 \\ 1.0278 \end{bmatrix},$$

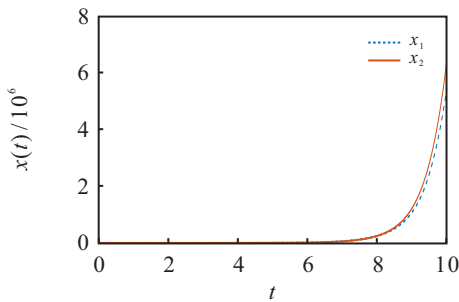
$$f_2(8, 6) = \begin{bmatrix} 8.0589 \\ 6.2199 \end{bmatrix}, g_2(8, 6) = \begin{bmatrix} 4.5416 \\ 5.0574 \end{bmatrix},$$

$$\mu_1 = \frac{8}{7}, \mu_2 = 1.$$

此外,根据图1可知子系统1和子系统2分别是稳定和不安定的.经计算可得 $\lambda_1 = -1.75, \lambda_2 = 1.8795$.分别设置子系统1和子系统2的平均驻留时间 $\tau_{a1} = 2$ 和 $\tau_{a2} = 1$,根据式(14),选择 $\epsilon = 1.3332, \bar{\epsilon} = 1.8795$.令 $\epsilon = 0.25$,根据式(17)计算得到 $\mathcal{T}_s(t_0, t)/\mathcal{T}_u(t_0, t) \geq 1.9659$.令 $\mathcal{T}_s(0, 30) = 20, \mathcal{T}_u(0, 30) = 10$,系统的切换方案如图2所示.状态轨迹如图3所示.因该例子



(a) 子系统1



(b) 子系统2

图1 子系统1和子系统2的状态曲线

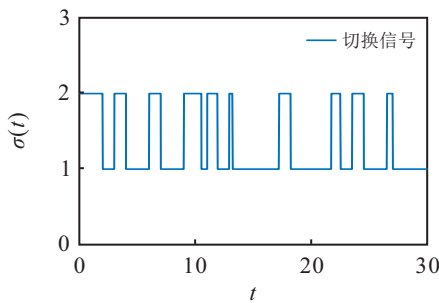


图2 驻留时间 $\tau_1 = 2, \tau_2 = 1$ 时系统的切换规则

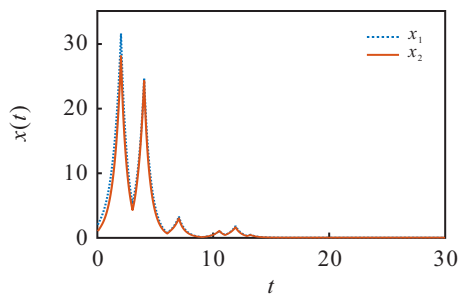


图3 驻留时间 $\tau_1 = 2, \tau_2 = 1$ 时系统的状态曲线

中具有不稳定模态,文献[11,19-21]的结果不能应用到上述系统中.

4 结论

本文基于改进的Halalay不等式技术和设计的模态依赖平均驻留时间切换方案,研究了具有不稳定模态和时滞切换齐次正系统的指数稳定问题.相比已有结果,所做研究不仅将系统推广至切换非线性正系统具有不稳定模态的情形,并且取消了已有文献中最小停留时间的限制条件.最后通过仿真实例表明了理论结果的有效性.系统具有外部扰动时的情形将作为下一步的研究方向.

参考文献(References)

- [1] Shorten R, Wirth F, Leith D. A positive systems model of TCP-like congestion control: Asymptotic results[J]. ACM Transactions on Networking, 2006, 14(3): 616-629.
- [2] Hernandez-Vargas E, Colaneri P, Middleton R, et al. Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(10): 1093-1111.
- [3] Mazenc F, Malisoff M, Barbalata C, et al. Event-triggered control for linear time-varying systems using a positive systems approach[J]. Systems & Control Letters, 2022, 161: 105131.
- [4] Sun Y G, Tian Y Z, Xie X J. Stabilization of positive switched linear systems and its application in consensus of multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(12): 6608-6613.
- [5] 王雪飞, 闻继伟, 栾小丽. 异步时滞切换正系统的有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2022, 37(8): 2077-2084. (Wang X F, Wen J W, Luan X L. Finite-time stabilization for switched positive time-delay systems under asynchronous switching[J]. Control and Decision, 2022, 37(8): 2077-2084.)
- [6] Wang P, Sang H, Niu B. Novel criteria for stability and l_1 -gain analysis of switched positive time-delay systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(1): 592-604.
- [7] Xiang W M, Xiao J. Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching[J]. Automatica, 2014, 50(3): 940-945.
- [8] Zhou Z Y, Wang Y W, Yang W, et al. Exponential stability of switched positive systems with all modes being unstable[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(12): 4600-4610.
- [9] Zou Y, Meng Z Y, Meng D Y. On exponential stability

- of switched homogeneous positive systems of degree one[J]. *Automatica*, 2019, 103: 302-309.
- [10] 刘婷婷, 杨轩, 黄丽琼. 切换非线性正系统的有限时间稳定性[J]. *控制与决策*, 2022, 37(7): 1915-1920.
(Liu T T, Yang X, Huang L Q. Finite-time stability of switched nonlinear positive systems[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(7): 1915-1920.)
- [11] Yang H T, Zhang Y. Impulsive control of continuous-time homogeneous positive delay systems of degree one[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(11): 3341-3362.
- [12] 丛岫, 费树岷, 李涛. 时滞切换系统指数稳定性分析: 多Lyapunov函数方法[J]. *自动化学报*, 2007, 33(9): 985-988.
(Cong S, Fei S M, Li T. Exponential stability of switched systems with delay: A multiple Lyapunov function approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(9): 985-988.)
- [13] Alwan M S, Liu X Z. On stability of linear and weakly nonlinear switched systems with time delay[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, 48(7/8): 1150-1157.
- [14] Li S, Chen Z L, Xiang Z R. Positivity and decentralized L_1 control of nonlinear interconnected switched positive systems under MDDT constraint[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2023, 50: 101410.
- [15] Liu Z, Zhang X F, Lu X D, et al. Stabilization of positive switched delay systems with all modes unstable[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 29: 110-120.
- [16] Zhou Z Y, Wang Y W, Yang W, et al. Exponential stability of switched positive systems with unstable modes and distributed delays[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(1): 66-83.
- [17] 崔萌, 王鑫, 邓超. 基于学习的线性多智能体系统弹性最优协同容错控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(5): 1303-1311.
(Cui M, Wang X, Deng C. Learning-based resilient optimal cooperative fault tolerant control for linear multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(5): 1303-1311.)
- [18] Zhao X D, Zhang L X, Shi P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1809-1815.
- [19] Feyzmahdavian H R, Charalambous T, Johansson M. Exponential stability of homogeneous positive systems of degree one with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(6): 1594-1599.
- [20] Dong J G. Stability of switched positive nonlinear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(14): 3118-3129.
- [21] Tian Y Z, Sun Y G. Exponential stability of switched nonlinear time-varying systems with mixed delays: Comparison principle[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(11): 6918-6931.
- [22] Nguyen T N, Tinh C T, Nam P T. Tighter exponential estimate for positive systems with time delays[J]. *Automatica*, 2022, 146: 110570.
- [23] Liang M Q, Tian Y Z. Practical stability of switched homogeneous positive nonlinear systems: Max-separable Lyapunov function method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 428: 127190.

作者简介

梁孟仟(2000—), 男, 硕士生, 从事切换齐次正系统、时滞正系统稳定性等研究, E-mail: liangmeng7an@163.com;

田亚州(1983—), 男, 副教授, 硕士生导师, 从事切换系统稳定性分析、控制器设计及时滞系统定性理论等研究, E-mail: tianyazhou369@163.com.