



控制与决策

CONTROL AND DECISION



切换网络演化博弈的同步

王元华, 张秋童, 臧文科

引用本文:

王元华,张秋童,臧文科. 切换网络演化博弈的同步[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3313–3318.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0847>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

布尔控制网络的集成集可控

Ensemble set controllability of Boolean control networks

控制与决策. 2021, 36(9): 2187–2194 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1837>

基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 H_∞ 控制

Non-fragile H_∞ control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制

Group attitude coordinated control of multi-spacecraft with directed switching topologies

控制与决策. 2021, 36(10): 2389–2398 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0311>

基于反馈无源化的切换非线性系统 H_∞ 跟踪控制

Passification-based H_∞ tracking control for a class of switched nonlinear systems

控制与决策. 2021, 36(11): 2729–2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

切换网络演化博弈的同步

王元华^{1,2†}, 张秋童¹, 臧文科¹

(1. 山东师范大学 商学院, 济南 250014; 2. 山东师范大学 动力学与控制科学研究中心, 济南 250014)

摘要: 研究带有切换网络结构的网络演化博弈同步问题. 首先, 利用矩阵半张量积方法, 给出局势演化方程的代数化表达式, 并得到一个充分必要的代数条件来验证切换网络演化博弈是否与一个静态网络演化博弈达到同步; 然后, 通过构造一个辅助系统并使用最大不变子集的方法, 将切换网络演化博弈的同步问题转化为辅助系统的集合稳定性, 提出一个易于验证的充分必要条件, 并给出达到同步时最短时间的计算公式; 此外, 将所得结果推广到局势受限的情况, 提出局部同步的概念, 并讨论切换网络演化博弈的局部同步问题; 最后, 通过实例验证理论结果的有效性.

关键词: 切换网络演化博弈; 同步; 矩阵半张量积; 集合稳定性; 不变子集; 受限局势

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0847

引用格式: 王元华, 张秋童, 臧文科. 切换网络演化博弈的同步 [J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3313-3318.

Synchronization of switched networked evolutionary games

WANG Yuan-hua^{1,2†}, ZHANG Qiu-tong¹, ZANG Wen-ke¹

(1. Business School, Shandong Normal University, Ji'nan 250014, China; 2. Institute of Dynamics and Control Science, Shandong Normal University, Ji'nan 250014, China)

Abstract: This paper investigates the synchronization problem of networked evolutionary games (NEGs) with switched networked structures. Firstly, the algebraic expression of the strategy profile dynamics is given by using the semi-tensor product (STP) of matrices, and a necessary and sufficient algebraic condition is presented to verify whether a switched NEG is synchronized to a static NEG. Then by constructing an auxiliary system and using the invariant subset-based method, the synchronization problem of switched NEGs can be converted into set stability of the auxiliary system with respect to a given nonempty subset. An easily verifiable necessary and sufficient condition is proposed and the formula is provided to calculate the shortest time. In addition, we extend the obtained results to local synchronization of incomplete-profile switched NEGs. Finally, an illustrative example is given to show the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: switched networked evolutionary games; synchronization; semi-tensor product of matrices; set stability; invariant subset; incomplete-profile

0 引言

演化博弈理论最早是由生物学家提出的, 主要用来描述基因决定的社会行为的进化, 近年来被广泛应用到许多实际领域, 如人口动力学、经济学、工程科学等^[1]. 在现实情况中, 每个玩家并不是与其他所有玩家进行博弈, 而是仅仅和他们相邻的玩家发生博弈行为, 这些相邻的玩家被称作邻居, 他们可以是朋友、亲戚或者合作伙伴, 他们之间的博弈关系可以用一个网络图来刻画. 受此启发, 学者们提出了一类新的演化博弈, 称为网络演化博弈^[2]. 在网络图中, 节点代表玩家, 边代表玩家之间的关系. 近几年来, 随着复杂网络

的快速发展, 对网络演化博弈的研究已成为一个热门问题.

在传统的网络演化博弈中, 玩家通常是在固定的网络拓扑上进行博弈. 然而在现实世界中, 由于环境变化或外部干预, 新的关系会随着网络拓扑结构的不同而出现. 例如, 在许多经济活动中, 随着博弈的进行, 每个玩家为了使自己的收益更大, 会不断地选择和抛弃他们的对手和伙伴. 因此, 引入切换网络演化博弈是有必要的, 这样玩家可以选择多个可行的网络来使自己的利润更大. 同时, 演化动力学会受到不同网络拓扑结构的影响^[3-4]. 其中, Zhao 等^[3]研究了

收稿日期: 2023-06-16; 录用日期: 2023-10-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62373230, 61903236, 62073202).

责任编辑: 冯俊娥.

[†]通讯作者. E-mail: wyh_1005@163.com.

切换网络演化博弈的代数模型和策略优化方法;Zhu等^[4]提出了一种具有切换拓扑结构的加权网络演化博弈,并给出了状态反馈控制的设计方法.但是,目前对切换网络演化博弈的同步研究结果还很少见.

最近,一种称为矩阵半张量积的新型矩阵乘积^[5-6],已成功应用于逻辑网^[7-10]、图^[11]、有限博弈的分析和控制设计^[12-14]中.此外,半张量积理论也被用来研究网络演化博弈的代数建模和分析设计^[3,4,15].

同步现象在自然界中无处不在,在复杂网络的分析和控制中得到了广泛关注.学者们研究了不同类型的布尔网络的同步问题,得到了若干结果^[16-17].而在许多生物系统或者社交网络中,某些状态对应的实际情形是禁止出现的,这便产生了受限布尔网络的概念.冯俊娥等^[18]对受限布尔网络的现有结果进行了梳理和总结.Liu等^[19]考虑了受限布尔网络的集合稳定性.类似地,如果博弈中玩家的局势受到限制,那么需要引入局势受限博弈的概念^[20].受此启发,本文将局势受限博弈的同步性称为局部同步.

基于上述讨论,本文考虑带有切换网络拓扑结构的网络演化博弈的同步问题.通过构造辅助系统,将同步问题转化为辅助系统的集合稳定性,其中目标集合是某个等价子集的最大不变子集,从而提出一个易于验证的充分必要同步条件,并将得到的理论结果推广到局部同步问题.

1 预备知识

1.1 矩阵半张量积

首先给出一些符号说明.

- 1) $\mathcal{M}_{m \times n}$: $m \times n$ 维实矩阵的集合;
- 2) $\text{Col}(M)$ ($\text{Row}(M)$): 矩阵 M 的列(行)集合;
- 3) $\text{Col}_i(M)$ ($\text{Row}_i(M)$): 矩阵 M 的第 i 列(行);
- 4) $|\mathcal{M}|$: 集合 \mathcal{M} 的基数;
- 5) $\mathcal{B}_{m \times n}$: 维数为 $m \times n$ 的布尔矩阵的集合;
- 6) $M +_{\mathcal{B}} N = A$: $M \in \mathcal{B}_{m \times n}$ 和 $N \in \mathcal{B}_{m \times n}$ 的布尔和,其中 $a_{i,j} = m_{i,j} \vee n_{i,j}$;
- 7) $\sum_{i=1}^s \text{Row}_i(M)$: 矩阵 M 的行的布尔和;
- 8) $\mathcal{D}_k := \{1, 2, \dots, k\}$, $k \geq 2$;
- 9) $\Delta_k := \{\delta_k^i | i = 1, 2, \dots, k\}$, 其中 δ_n^i 为单位矩阵 I_n 的第 i 列;

10) 矩阵 $L \in \mathcal{M}_{m \times n}$ 称为一个逻辑矩阵,如果 $\text{Col}(L) \subset \Delta_m$, 那么 $L = [\delta_m^{i_1}, \delta_m^{i_2}, \dots, \delta_m^{i_n}]$, 简记为 $L = \delta_m[i_1, i_2, \dots, i_n]$;

11) $\mathbf{1}_k := \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_k^T$;

12) 换位矩阵 $W_{[m,n]} := [I_n \otimes \delta_m^1, \dots, I_n \otimes \delta_m^m]$.

定义 1^[5] 令 $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $N \in \mathcal{M}_{p \times q}$, $t = \text{lcm}\{n, p\}$ 是 n 和 p 的最小公倍数, 则 M 和 N 的矩阵半张量积定义为

$$M \times N := (M \otimes I_{t/n})(N \otimes I_{t/p}), \quad (1)$$

其中 \otimes 表示 Kronecker 积.

命题 1 设 $X \in R^n$ 是一个 n 维列向量, M 是一个矩阵, 那么 $X \times M = (I_n \otimes M)X$.

命题 2 设 $X \in \Delta_{k^n}$, 定义降阶矩阵 $\Phi_n^k := \delta_{k^{2n}}[1, k^n + 2, 2k^n + 3, \dots, k^{2n}] \in \mathcal{L}_{k^{2n} \times k^n}$, 则有

$$x^2 = \Phi_n^k x. \quad (2)$$

如果 $x \in \mathcal{D}_k$, 定义 $i \sim \delta_k^i$, $i = 1, 2, \dots, k$, 则有 $x \in \Delta_k$, 称作 x 的向量形式.

命题 3 设 $D_r^{[p,q]} = I_p \otimes \mathbf{1}_q^T$ 和 $D_f^{[p,q]} = \mathbf{1}_p^T \otimes I_q$ 分别为后删除算子和前删除算子, 则有 $D_r^{[p,q]}XY = X$, $D_f^{[p,q]}XY = Y$, 其中 X 和 Y 分别是 p 维和 q 维列向量.

定理 1^[6] 设 $x_i \in \mathcal{D}_k$, $i = 1, 2, \dots, n$, $f: \mathcal{D}_k^n \rightarrow \mathcal{D}_k$ 是一个 k 值逻辑函数, 则存在唯一的矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{k \times k^n}$, 称作 f 的结构矩阵, 使得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_f \times_{i=1}^n x_i. \quad (3)$$

推论 1 令 $c: \mathcal{D}_k^n \rightarrow R$ 是一个 k 值伪逻辑函数, 则存在唯一的行向量 $V^c \in R^{k^n}$, 使得

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = V^c \times_{i=1}^n x_i, \quad (4)$$

其中 V^c 称作 c 的结构向量.

定义 2 设矩阵 $M \in \mathcal{M}_{p \times m}$, $N \in \mathcal{M}_{q \times m}$, 那么 Khatri-Rao 积定义为

$$M * N = [\text{Col}_1(M) \times \text{Col}_1(N), \dots, \text{Col}_m(M) \times \text{Col}_m(N)].$$

1.2 标准式有限博弈和网络演化博弈

定义 3^[21] 考虑一个标准式有限博弈 $G = (N, S, C)$, 它由如下 3 个要素构成:

1) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 是玩家集合.

2) 策略局势 $S = \prod_{i=1}^n S_i$, 其中第 i 个玩家的策略集表示为 $S_i = \{1, 2, \dots, k_i\}$; S_{-i} 定义为 $S_{-i} := \prod_{j \neq i} S_j$.

3) 支付函数 $C = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$, 玩家 i 的支付函数 $c_i: S \rightarrow R$ 可表示为

$$c_i := c_i(x_1, \dots, x_n) = V_i^c \times_{j=1}^n x_j, \quad x_j \in S_j. \quad (5)$$

接下来对网络演化博弈的模型进行描述.

定义 4^[15] 一个网络演化博弈记为 $\mathcal{G} = ((N, E), G, \Pi)$, 由以下 3 个部分构成:

1) 网络图 (N, E) , $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 为节点集合, $E \subset N \times N$ 为边集;

2) G 称为基本网络博弈, 它只包含 2 个玩家且收益矩阵是对称的;

3) Π 是策略更新规则.

将玩家 i 的邻域记作 $U(i)$, 并假设 $i \in U(i)$. 每个玩家利用邻域信息进行策略更新, 因此策略演化方程可表示为

$$x_i(t+1) = f_i(\{x_j(t), c_j(t) | j \in U(i)\}), \quad i \in N. \quad (6)$$

称式(6)为玩家 i 的基本演化方程. 在 t 时刻的收益可表示为

$$c_i(t) = \sum_{j \in U(i) \setminus \{i\}} c(x_i(t), x_j(t)), \quad i \in N. \quad (7)$$

本文采用的策略更新规则是确定型无条件模仿^[15], 即玩家 i 在所有邻居中选择 t 时刻收益最好的玩家, 取其策略作为自己 $t+1$ 时刻的策略, 有

$$x_i(t+1) = x_{j^*}(t), \quad (8)$$

其中 $j^* \in \arg \max_{j \in U(i)} c_j(x(t))$. 当最优玩家不唯一时, 选取指标最大的玩家.

2 主要结果

2.1 问题描述

本文主要讨论两个网络演化博弈 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 的同步问题, 其中 \mathcal{G}_1 是静态网络演化博弈, 而 \mathcal{G}_2 代表切换网络演化博弈.

定义 5 一个切换网络演化博弈是由 4 部分构成的, 分别是:

1) 网络集合: $\Omega = \{1, 2, \dots, w\}$ 是一个有限集. 当 $\sigma \in \Omega$ 时, 网络 σ 可称作 Ω 的子网络. 每个子网络均为无向图 (N, E^σ) , 玩家 i 在子网络 σ 中的邻域表示为 $U^\sigma(i)$.

2) 基本网络博弈: 如果 $(i, j) \in E^\sigma$, 则玩家 i 和玩家 j 在子网络 σ 上进行基本网络博弈. 玩家 i 和玩家 j 在 t 时刻的策略分别用 $y_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 表示.

3) 策略更新规则: 玩家 i 在 $t+1$ 时刻的策略表示为

$$y_i(t+1) = f_i^{\sigma(t)}(\{y_j(t), c_j(t) | j \in U^{\sigma(t)}(i)\}). \quad (9)$$

4) 网络更新规则: 网络更新规则用于选择下一时刻所有玩家都参与的子网络. 本文假设网络切换信号 $\sigma(t)$ 是与局势相关的, 即

$$\sigma(t) = g(y(t)). \quad (10)$$

其中: $g: S \rightarrow \Omega$ 由网络更新规则决定, $y(t)$ 代表 t 时刻的局势. 本文引入了多数投票系统的思想来设计网络更新规则^[3], 也就是说, 通过局势 $y(t)$, 可以得

到 $t+1$ 时刻的玩家 i 在不同网络上的期望收益函数 $ER_{i,\sigma}(x(t))$, 且

$$ER_{i,\sigma}(x(t)) = c_{i,\sigma}(x_{-i}(t), x_i(t+1)),$$

其中 $c_{i,\sigma}$ 代表玩家 i 在子网络 σ 上的收益. 下一时刻每个玩家倾向于选择使自己收益最大的网络, 则网络选择器将会选择出最多数量的玩家想参与的子网络.

根据方程(6), 利用矩阵半张量积, 静态网络演化博弈的局势演化方程可表示为

$$x(t+1) = Fx(t). \quad (11)$$

其中: $F \in \mathcal{L}_{k^n \times k^n}$ 为转移矩阵, $x(t)$ 为 t 时刻的局势.

对于切换网络演化博弈, 假定方程(9)中 $f_i^{\sigma(t)}$ 的结构矩阵为 $L_i^{\sigma(t)}$, 则方程(9)的代数形式为

$$y_i(t+1) = L_i^{\sigma(t)} y(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

将式(12)两边相乘, 可以得到局势演化方程

$$y(t+1) = L^{\sigma(t)} y(t), \quad (13)$$

这里称 $L^{\sigma(t)} = L_1^{\sigma(t)} \times L_2^{\sigma(t)} \times \dots \times L_n^{\sigma(t)} \in \mathcal{L}_{k^n \times k^n}$ 为方程(13)的转移矩阵. 定义 $\sigma = i \sim \delta_w^i, i \in \Omega$. 利用矩阵半张量积, 可将方程(10)转化为

$$\sigma(t) = Gy(t), \quad (14)$$

其中 $G \in \mathcal{L}_{w \times k^n}$. 定义 $L = [L_1, L_2, \dots, L_w]$, 那么方程(13)可转化为

$$\begin{aligned} y(t+1) &= L^{\sigma(t)} y(t) = \\ &[L_1, L_2, \dots, L_w] \sigma(t) y(t) = \\ &[L_1, L_2, \dots, L_w] G \Phi_n y(t) := \tilde{L} y(t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\tilde{L} = LG\Phi_n \in \mathcal{L}_{k^n \times k^n}$.

假设静态网络演化博弈 \mathcal{G}_1 和切换网络演化博弈 \mathcal{G}_2 有相同的策略局势, 式(11)和(15)分别是局势演化方程的代数形式.

定义 6 称切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)是同步的, 如果对于任意的初始局势 $x(0) = \times_{i=1}^n x_i(0)$ 和 $y(0) = \times_{i=1}^n y_i(0)$, 存在正整数 $h \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $t \geq h$ 时, 两个网络演化博弈的局势轨迹相同.

注 1 在定义 6 中, 切换信号的选择是与策略局势相关的. 然而, 当 $\sigma(t)$ 是一个任意切换信号时, 还需要寻找合适的切换信号序列 $\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(t)\}$ 来实现同步.

2.2 切换网络演化博弈的同步

基于代数形式(11)和(15), 分析实现同步的一些充分必要条件.

定理 2 令式(11)和(15)分别为静态网络演化博弈 \mathcal{G}_1 和切换网络演化博弈 \mathcal{G}_2 的代数化局势演化方

程,则 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 能够达到同步,当且仅当,存在 $h \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$F^{h+1}D_r^{[k^n, k^n]} = \tilde{L}^{h+1}D_f^{[k^n, k^n]}. \quad (16)$$

证明 必要性. 使用矩阵半张量积,有

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) = F^{t+1}x(0) = \\ &= F^{t+1}D_r^{[k^n, k^n]}x(0)y(0), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \tilde{L}y(t) = \tilde{L}^{t+1}y(0) = \\ &= \tilde{L}^{t+1}D_f^{[k^n, k^n]}x(0)y(0). \end{aligned} \quad (18)$$

因此,对于任意初始局势 $x(0)$ 和 $y(0)$, 存在正整数 $h_{(x(0), y(0))}$, 当 $t \geq h_{(x(0), y(0))}$ 时, $x(t+1) = y(t+1)$ 成立. 定义 $h = \max_{x(0), y(0) \in S} h_{(x(0), y(0))}$, 因为策略集 S 是一个有限集合, 所以 $h < +\infty$. 当 $t \geq h$ 时, $x(t+1) = y(t+1)$ 成立, 即

$$F^{t+1}D_r^{[k^n, k^n]} = \tilde{L}^{t+1}D_f^{[k^n, k^n]}. \quad (19)$$

将 $t = h$ 代入到方程(19)中, 即可得到式(16).

充分性. 将式(16)分别代入(17)和(18)中, 得到 $x(h+1) = y(h+1)$. 此外, 当用 $x(i)$ 和 $y(i)$ 替代 $x(0)$ 和 $y(0)$ 时, $x(h+1+i) = y(h+1+i)$ 成立. \square

注2 定理2给出了判断一个切换网络演化博弈是否与静态网络演化博弈能够同步的充分必要条件. 针对条件(16), 需要计算使其成立的有限值 h . 考虑到 F 和 \tilde{L} 均为 $k^n \times k^n$ 维逻辑矩阵, 实际情况下这个判断条件仅适用于小型网络. 接下来本文将从另一个角度来考虑切换网络演化博弈的同步问题.

定义 $w(t) = x(t)y(t)$, 得到一个辅助系统

$$\begin{aligned} w(t+1) &= Fx(t)\tilde{L}y(t) = \\ &= F(I_{k^n} \otimes \tilde{L})x(t)y(t) := Hw(t), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $H = F(I_{k^n} \otimes \tilde{L}) \in \mathcal{L}_{k^{2n} \times k^{2n}}$ 是辅助系统(20)的结构矩阵.

如果切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)是同步的, 那么当 $t > h$ 时, 有 $x(t+1) = y(t+1) = \delta_{k^n}^i$, 于是定义集合

$$\begin{aligned} \Theta = \\ \{ \delta_{k^{2n}}^j = \delta_{k^n}^i \times \delta_{k^n}^i \mid j = (i-1)k^n + i, 1 \leq i \leq k^n \}. \end{aligned}$$

切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)能够达到同步, 当且仅当, 辅助系统(20)在有限步之后能稳定到集合 Θ . 因此, 可以得到以下结果.

命题4 切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)能够达到同步, 当且仅当, $\text{Col}(H^{k^{2n}}) \subseteq \Theta$, 且 $h = \min_{s \in \mathbb{Z}^+} \{s \mid \text{Col}(H^s) \subseteq \Theta\}$.

利用以上结论, 并不容易计算出在不同初始局势

下实现同步的最短时间 $h_{(w(0))}$. 接下来利用最大不变子集的方法来计算 $h_{(w(0))}$.

定义7 1) 设 $\Lambda \subseteq \Theta \subseteq \Delta_{k^{2n}}$ 是一个给定的状态集合, 如果对于每一个状态 $w_0 \in \Lambda$, 当 $t \geq 0$ 时, 都有 $w(t, w_0) \in \Lambda$, 那么称 Λ 为 Θ 的不变子集.

2) I_m^Θ 称为集合 Θ 的最大不变子集, 如果它是 Θ 的不变子集, 同时 Θ 的每个不变子集 Λ 均为 I_m^Θ 的真子集, 即 $\Lambda \subset I_m^\Theta, \forall \Lambda$.

通过定义7可以得到, Λ 是系统(20)的不变子集, 当且仅当 $H(\Lambda) \subseteq \Lambda$, 这里 $H(\Lambda) := \{Hw \mid w \in \Lambda\}$.

基于文献[22], 下面给出一个简单方法来计算任意初始局势 $w(0) = w_0$ 下达到同步的最短时间 h . 首先构造一个布尔矩阵 $M \in \mathcal{B}_{k^{2n} \times k^{2n}}$, 当 $\delta_{k^{2n}}^s \notin \Theta$ 时, $\text{Col}_s(M) = \mathbf{0}_{k^{2n}}$.

命题5 切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)能够达到同步, 当且仅当

$$\sum_{\mathcal{B}}^{k^{2n}} \text{Row}_i[(MH)^q MH^p] = \mathbf{1}_{k^{2n}}. \quad (21)$$

其中: $q = |I_m^\Theta|, p = k^{2n} - q$. 令 h_j 是从 $w_0 = \delta_{k^{2n}}^j$ 出发到达集合 I_m^Θ 的最短时间, 计算公式为

$$h_j = \min_{s \in \mathbb{Z}^+} \{s \mid (MH)^s M \text{Col}_j(H^s) \neq \mathbf{0}\},$$

那么

$$h = \max_{1 \leq j \leq k^{2n}} h_j.$$

注3 与已有结果进行比较, 文献[17]使用了 k 步切换可达集来研究切换布尔网络的同步问题, 但是只给出了达到同步所需最短时间的上限是 $2^{2n} - 1$. 命题5通过构造辅助系统(20)的最大不变子集, 之后利用式(21)就可以直接得到任意初始状态下达到同步的最短时间, 验证过程简洁有效. 此外, 命题5计算最大不变子集的复杂度是 $|\Theta|k^{3n}$, 目前当节点数超过30个时可能无法进行仿真实验.

2.3 切换网络演化博弈的局部同步

在许多实际的博弈中, 一些局势是禁止出现的, 称这种博弈为局势受限博弈. 比如在国际象棋中^[20], 白方棋手和黑方棋手不能同时选择某种策略等. 下面考虑局势受限网络演化博弈的同步问题.

设 $\mathcal{C} = \{\delta_{k^n}^{i_1}, \dots, \delta_{k^n}^{i_s}\} (1 \leq i_j \leq k^n, j = 1, 2, \dots, s)$ 是可行局势集合, 定义 $\mathcal{D} = \{(\delta_{k^n}^{i_p}, \delta_{k^n}^{i_q}) \mid \delta_{k^n}^{i_p}, \delta_{k^n}^{i_q} \in \mathcal{C}\} \subset \Delta_{k^n} \times \Delta_{k^n}$.

定义8 给定一个非空集合 $\mathcal{C} \subset S$, 假设 $x(t) \in \mathcal{C}, y(t) \in \mathcal{C}, \forall t$. 称切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)能够达到局部同步, 如果存在一个 $h \in \mathbb{Z}^+$, 对于任意初始局势 $x(0) \in \mathcal{C}, y(0) \in \mathcal{C}$, 当

$t \geq h$ 时, $x(t, x_0) = y(t, y_0)$ 成立.

需要特殊说明的是, 如果 $C = S$, 那么定义8中的局部同步就退化为定义6中的完全同步.

将方程(20)中矩阵 H 的第 i_z 行和第 i_z 列所对应的元素全部替换为0, 其中 $i_z \neq (i_p - 1)k^n + i_q$, 替换后的矩阵记为 H^D , 那么方程(20)可以转化成

$$w(t+1) = H^D w(t), \quad (22)$$

这里 $H^D \in \mathcal{B}_{k^{2n} \times k^{2n}}$. 定义

$$\Theta_C = \{\delta_{k^{2n}}^j = \delta_{k^n}^i \times \delta_{k^n}^i \mid j = (i-1)k^n + i, \delta_{k^n}^i \in C\}.$$

与命题4类似, 得出以下结果.

命题6 给定一个可行的局势集合 $C = \{\delta_{k^n}^{i_1}, \dots, \delta_{k^n}^{i_s}\}$. 切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)能够达到局部同步, 当且仅当, $\text{Col}((H^D)^{k^{2n}}) \subseteq \Theta_C \cup \mathbf{0}_{k^{2n}}$, 且 $h = \min_{s \in \mathbb{Z}^+} \{s \mid \text{Col}(H^s) \subseteq \Theta_C \cup \mathbf{0}_{k^{2n}}\}$.

针对 Θ_C , 计算出它的最大不变子集 $I_m^{\Theta_C}$. 之后构造布尔矩阵 $M^D \in \mathcal{B}_{k^{2n} \times k^{2n}}$, 这里对于 $\delta_{k^{2n}}^s \notin \Theta_C$, 令 $\text{Col}_s(M^D) = \mathbf{0}_{k^{2n}}$.

假设 $\Xi = \{(i_p - 1)k^n + i_q \mid \delta_{k^n}^{i_p}, \delta_{k^n}^{i_q} \in C\}$ 是 D 的指数集. 与命题5类似, 得出以下结果.

命题7 给定一个可行的局势集合 $C = \{\delta_{k^n}^{i_1}, \dots, \delta_{k^n}^{i_s}\}$. 切换网络演化博弈(15)和静态网络演化博弈(11)能够达到局部同步, 当且仅当

$$\sum_{i=1}^{k^{2n}} [(M^D H^D)^q M^D (H^D)^p]_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in \Xi; \\ 0, & j \notin \Xi. \end{cases} \quad (23)$$

其中: $q = |I_m^{\Theta_C}|, p = k^{2n} - q$. 从 $w(0) = \delta_{k^{2n}}^j (j \in \Xi)$ 出发达到同步的最短时间为 $h = \max_{j \in \Xi} h_j$, 其中 h_j 是使得 $w_0 = \delta_{k^{2n}}^j$ 达到 $I_m^{\Theta_C}$ 的最短时间, 其计算公式为

$$h_j = \min_{s \in \mathbb{Z}^+} \{s \mid (M^D H^D)^s M^D \text{Col}_j[(H^D)^s] \neq 0\}.$$

3 数值例子

情况1 完全同步问题.

1) 考虑一个静态网络演化博弈 \mathcal{G}_1 , 该博弈包含4个玩家, 网络如图1所示.

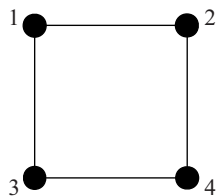


图1 静态网络图

2) 考虑一个包含3个子网络的切换网络演化博

弈 \mathcal{G}_2 , 即 $\Omega = \{1, 2, 3\}$, 具体网络如图2所示.

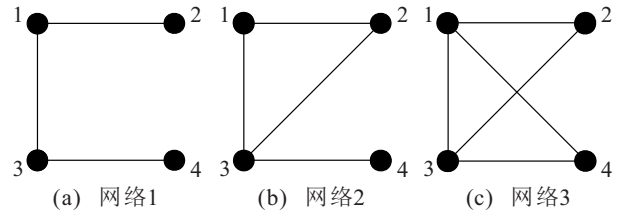


图2 切换网络图

3) 基本网络博弈是囚徒困境, 支付矩阵见表1. 其中: 1代表否认, 2代表坦白.

表1 支付矩阵

$P_1 \backslash P_2$	1	2
1	(4, 4)	(0, 6)
2	(6, 0)	(1, 1)

4) 策略更新规则是无条件模仿.

5) 网络更新规则是大多数投票系统.

对于静态网络演化博弈 \mathcal{G}_1 , 可以通过策略更新规则, 从每组局势 (x_1, x_2, x_3, x_4) 中得到 $f_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 结果如表2所示.

表2 从支付到更新策略

$c \backslash s$	1111	1112	1211	1122	...	2221	2222
c_1	8	8	4	4	...	2	2
c_2	8	4	8	4	...	7	2
c_3	8	4	12	7	...	7	2
c_4	8	12	4	7	...	0	2
f_1	1	1	2	2	...	2	2
f_2	1	2	1	2	...	2	2
f_3	1	2	2	2	...	2	2
f_4	1	2	2	2	...	2	2

定义策略 $1 \sim \delta_2^1$, 策略 $2 \sim \delta_2^2$. 由式(11)可以得到静态网络演化博弈 \mathcal{G}_1 的转移矩阵

$$F = \delta_{16}[1, 8, 12, 16, 14, 16, 16, 16, 15, \dots, 16].$$

在切换网络演化博弈 \mathcal{G}_2 中, 令网络1 $\sim \delta_3^1$, 网络2 $\sim \delta_3^2$, 网络3 $\sim \delta_3^3$. 对于每一个子网络 $j \in \Omega$, 分别得到对应的 $f_i^j (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3)$. 由式(15)可以计算出

$$\tilde{L} = \delta_{16}[1, 12, 16, 16, 15, 16, 16, \dots, 16].$$

利用式(20)构造一个辅助系统, 很容易得到

$$H = F(I_{k^n} \otimes \tilde{L}) =$$

$$\delta_{256}[1, 12, 16, 16, \dots, 256, 256, 256].$$

根据定义5, 得到 $\Theta = \{\delta_{256}^1, \delta_{256}^{188}, \delta_{256}^{239}, \delta_{256}^{256}\}$, 且 $I_m^\Theta = \{\delta_{256}^1, \delta_{256}^{256}\}$, 因此 $|I_m^\Theta| = 2$. 之后通过计算容易验证式(21)不成立. 也就是说, 静态网络演化博弈 \mathcal{G}_1 和切换

网络演化博弈 \mathcal{G}_2 不能达到完全同步.

情况2 局部同步问题.

假设禁止所有玩家同时选择策略1. 根据定义8, 局势 δ_{16}^1 是禁止出现的, 于是有 $\Theta_C = \{\delta_{256}^{188}, \delta_{256}^{239}, \delta_{256}^{256}\}$, $I_m^{\Theta_C} = \{\delta_{256}^{256}\}$. 将矩阵 H 的第 i_z 行第 i_z 列全部替换成0, 从而得到 $H^D \in \mathcal{L}_{256 \times 256}$. 根据命题7, 容易验证式(23)成立. 另外, 当 $t \geq h = 2$ 时, 即经过两步更新之后, 所有玩家都选择策略 $2 \sim \delta_2^2$, 此时 $w(t) = \delta_{256}^{256} \in I_m^{\Theta_C}$, 且对于所有 $j \in \Xi$, $(M^D H^D)^q M^D \text{Col}_j[(H^D)^s] \neq 0$ 均成立. 也就是说, 当 $t \geq 2$ 时, 静态网络演化博弈 \mathcal{G}_1 和切换网络演化博弈 \mathcal{G}_2 可以达到局部同步.

4 结论

本文旨在考虑切换网络演化博弈的同步问题. 首先, 给出了切换网络演化博弈的代数表示; 其次, 得到了静态网络演化博弈和切换网络演化博弈能够达到同步的充要条件; 然后, 通过构造辅助系统并使用不变子集的方法分析同步问题, 并将结果推广到局势受限的切换网络演化博弈; 最后, 通过数值例子对结果可行性进行了验证.

参考文献(References)

[1] Madoo D, Mocenni C. Game interactions and dynamics on networked populations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(7): 1801-1810.

[2] Nowak M A, May R M. Evolutionary games and spatial chaos[J]. Nature, 1992, 359: 826-829.

[3] Zhao G D, Wang Y Z. Formulation and optimization control of a class of networked evolutionary games with switched topologies[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2016, 22: 98-107.

[4] Zhu R, Chen Z Q, Zhang J L, et al. Strategy optimization of weighted networked evolutionary games with switched topologies and threshold[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 235: 107644.

[5] Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. Analysis and control of boolean networks: A semi-tensor product approach[M]. London: Springer, 2011.

[6] Cheng D Z, Qi H S, Zhao Y. An introduction to semi-tensor product of matrices and its applications[M]. Hackensack: World Scientific, 2012.

[7] 冯俊娥, 李怡靓, 赵荣. 基于矩阵半张量积的有限值动态系统的最新进展[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 267-277.
(Feng J E, Li Y L, Zhao R. Recent developments of finite-valued dynamic systems based on semi-tensor product of matrices[J]. Control and Decision, 2022, 37(2): 267-277.)

[8] Wang L, Li Y F, Zhu J D. On block-decoupling of Boolean control networks[J]. International Journal of

Control, Automation and Systems, 2023, 21(1): 40-51.

[9] Li H T, Wang Y Z, Xie L H. Output tracking control of Boolean control networks via state feedback[J]. Automatica: Journal of IFAC, 2015, 59(C): 54-59.

[10] Zhong J, Liu Y, Lu J Q, et al. Pinning control for stabilization of Boolean networks under knock-out perturbation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(3): 1550-1557.

[11] Wang Y Z, Zhang C H, Liu Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems[J]. Automatica: Journal of IFAC, 2012, 48(7): 1227-1236.

[12] Liu X Y, Zhu J D. On potential equations of finite games[J]. Automatica, 2016, 68: 245-253.

[13] Cheng D Z. On finite potential games[J]. Automatica: Journal of IFAC, 2014, 50(7): 1793-1801.

[14] Wang Y H, Liu T, Cheng D Z. From weighted potential game to weighted harmonic game[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2161-2169.

[15] Cheng D Z, He F H, Qi H S, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9): 2402-2415.

[16] Li R, Yang M, Chu T G. Synchronization of Boolean networks with time delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(3): 917-927.

[17] Chen H W, Liang J L, Huang T W, et al. Synchronization of arbitrarily switched Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 28(3): 612-619.

[18] 冯俊娥, 于永渊, 李海涛. 受限布尔网络发展现状[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 960-968.
(Feng J E, Yu Y Y, Li H T. Recent development of Boolean networks with constraints[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 960-968.)

[19] Liu W, Fu S H, Zhao J L. Set stability and set stabilization of Boolean control networks avoiding undesirable set[J]. Mathematics, 2021, 9(22): 2864.

[20] Zhang X, Hao Y Q, Cheng D Z. Incomplete-profile potential games[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(2): 862-877.

[21] Rasmusen E. Games and information: An introduction to game theory[M]. New Jersey: Wiley-Blackwell, 2006.

[22] Guo Y Q, Wang P, Gui W H, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets[J]. Automatica: Journal of IFAC, 2015, 61(C): 106-112.

作者简介

王元华(1981—), 女, 副教授, 硕士生导师, 从事逻辑动态系统与演化博弈等研究, E-mail: wyh_1005@163.com;

张秋童(1999—), 女, 硕士生, 从事网络演化博弈的研究, E-mail: zqtong978@163.com;

臧文科(1978—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能计算与机器学习等研究, E-mail: wink@sdnu.edu.cn.