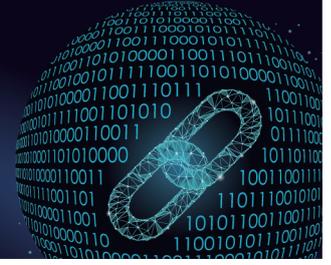




中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



基于图属性拓扑的增量式等势概念计算

张涛, 薛在发, 卢辉斌, 李少泽, 张菁, 刘学君

引用本文:

张涛, 薛在发, 卢辉斌, 李少泽, 张菁, 刘学君. 基于图属性拓扑的增量式等势概念计算[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3328–3336.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0953>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

区间粗糙数信息系统的覆盖分类冗余度与属性约简

Coverage classification redundancy and attribute reduction of interval rough number information system

控制与决策. 2021, 36(3): 677–685 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0744>

双重驱动的果蝇优化算法及其在PID控制器中的应用

Double drive fruit fly optimization algorithm and its application in PID controller

控制与决策. 2021, 36(9): 2225–2233 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0046>

基于知识粒度特征的多目标粗糙集属性约简算法

Multi objective rough set attribute reduction algorithm based on characteristics of knowledge granularity

控制与决策. 2021, 36(1): 196–205 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0490>

基于云模型的煤矿安全大数据多粒度表示方法及应用

Multi-granularity representation method of big data in coal mine safety based on cloud model and its application

控制与决策. 2021, 36(10): 2359–2368 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0325>

乡村旅游开发适宜性等级评价TOPSIS方法

TOPSIS method of suitability grade assessment for rural tourism development

控制与决策. 2020, 35(11): 2619–2625 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1565>

基于图属性拓扑的增量式等势概念计算

张涛^{1†}, 薛在发¹, 卢辉斌¹, 李少泽¹, 张菁¹, 刘学君²

(1. 燕山大学信息科学与工程学院, 河北秦皇岛 066004; 2. 北京石油化工学院
信息工程学院人工智能研究院, 北京 102617)

摘要: 等势概念是形式概念分析和概念认知学习的一个新兴课题, 为社交网络分析提供了新的思路. 现有的等势概念计算方法先搜索所有的形式概念再对其进行过滤, 降低计算效率. 随着增量式计算的发展, 实现增量式等势概念的计算是一项重要的研究课题. 为了解决上述问题, 提出一种基于图属性拓扑的增量式等势概念计算方法. 针对等势概念属性与对象的数量一致性特点, 该方法通过对属性拓扑的结构进行优化, 定义图形式背景下的图属性拓扑, 进而证明图属性拓扑中极大完全多边形与等势概念一一对应的关系, 并将此性质与属性拓扑的形式概念搜索算法相结合, 提出静态图形式背景下直接计算等势概念的方法; 基于此, 进一步研究新增属性和新增对象对图属性拓扑中极大完全多边形的影响, 完成增量式等势概念的直接计算. 实验表明, 直接计算方法能够有效提升等势概念的计算速度, 并验证了所提出增量式等势概念更新计算的可行性和高效性.

关键词: 形式概念分析; 概念认知学习; 等势概念; 增量计算; 属性拓扑; 极大完全多边形

中图分类号: TP18 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0953

引用格式: 张涛, 薛在发, 卢辉斌, 等. 基于图属性拓扑的增量式等势概念计算[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3328-3336.

Incremental equiconcept calculation based on graph attribute topology

ZHANG Tao^{1†}, XUE Zai-fa¹, LU Hui-bin¹, LI Shao-ze¹, ZHANG Jing¹, LIU Xue-jun²

(1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 2. School of Information Engineering and Academy of Artificial Intelligence, Beijing Institute of Petrochemical Technology, Beijing 102617, China)

Abstract: The equiconcept is a new topic in formal concept analysis and concept-cognitive learning, which provides a new idea for social network analysis. However, the existing equiconcept calculation methods first search out all formal concepts and then filter them, which reduces the calculation efficiency. And with the development of incremental computing, it is an important research topic to realize the calculation of the incremental equiconcept. To solve the above problems, this paper proposes an equiconcept calculation method based on incremental graph attribute topology. In view of the quantitative consistency between the attribute and object of the equiconcept, the proposed method defines the graph attribute topology on the graph formal context by optimizing the structure of the attribute topology. Furthermore, the one-to-one correspondence between the maximal complete polygon and the equiconcept in the graph property topology is proved. Combining this property with the formal concept search algorithm of the attribute topology, a method for directly calculating equiconcepts on the static graph formal context is proposed. On this basis, the influence of the new attribute and object on the maximal complete polygon in the graph attribute topology is further studied, and the direct calculation of incremental equiconcepts is completed. Experiments show that the direct calculation method can effectively improve the calculation speed of the equiconcept, and verify the feasibility and effectiveness of the proposed incremental equiconcept updating calculation.

Keywords: formal concept analysis; concept-cognitive learning; equiconcept; incremental calculation; attribute topology; maximal complete polygon

收稿日期: 2023-07-08; 录用日期: 2023-11-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62176229); 河北省重点实验室项目(202250701010046); 河北省在读研究生创新能力培养项目(CXZZBS2023046).

责任编辑: 赵春晖.

[†]通讯作者. E-mail: zhtao@ysu.edu.cn.

0 引言

形式概念分析(formal concept analysis, FCA)^[1]是一种通过对形式背景中的属性、对象及二者间关系进行分析以识别概念结构的数学理论. 概念认知学习^[2]是一种有效的概念学习方法,能够在给定线索中揭示概念学习规律. 作为一种数据分析和知识挖掘的有效工具,形式概念分析与概念认知学习目前已在三支决策^[3]、机器学习^[4]和知识发现^[5-7]等多个领域被应用. 作为一种特殊的形式概念, Hao等^[8]提出的等势概念侧重于将FCA应用在社交网络的图表示中,旨在拓扑层面揭示图网络的结构信息.

等势概念属于形式概念分析、概念认知学习与社交网络的交叉研究,已在社交计算、集体智能、网络挖掘和社交网络等领域^[9-10]得到广泛的关注. 根据对形式背景的分析,等势概念首先被提出用于解决符号社交网络中 k -平衡可信派系的检测问题^[8]. 随后,文献[11]将FCA引入 k -派系社区检测,验证了 k -派系检测与 k -等势概念间的等价关系,最后分别利用 k -等势概念和 k -内涵概念设计了 k -派系和 k -派系社区检测算法. 除了利用FCA分析社交网络中的关联关系,对象和属性的拓扑结构信息对于概念计算和有用信息的挖掘具有重要影响^[12]. Gao等^[13]在统一的FCA框架下实现了基于FCA的社交网络表示和概念生成,并通过量化概念和网络结构间的关系,提出了一种从社会网络中检测关键结构的算法. 文献[14]首先证明了极大团与等势概念间的一一对应关系,进一步提出了基于FCA识别社交物联网中多样化top- k 极大团的方法. 文献[15]则利用等势概念与极大团间的匹配关系,设计了一种在属性社交网络中检测绝对公平极大团的高效算法. 以上方法均先利用概念格搜索全部形式概念,再对形式概念进行过滤完成等势概念的计算,构建效率较低^[16].

为提升等势概念的计算效率,本文提出一种基于图属性拓扑的等势概念的直接计算方法. 属性拓扑(attribute topology, AT)能够直观表示形式背景的结构,该结构可以实现概念的快速计算,且具有良好的可视化特性和强可解释性. 其中,并行计算方法^[17]通过将属性拓扑分解成若干子拓扑分别搜索形式概念,有效地提升了概念的计算效率. 基于属性拓扑的增量^[18]和减量^[19]概念认知方法分别分析了新增节点和耦合节点与原始概念树结构间的关系,模拟了概念认知学习的不同演化过程. 根据属性拓扑和概念结构的内在统一性,动态数据下概念认知学习的稳定性^[20]问题被研究. 基于属性拓扑的因果不对称模

型^[21]被提出,其提升了概念认知的可解释性. 除了概念计算的理论研究,AT已被证明在生物医学信号处理领域具有一定的实用性^[22-23]. 根据等势概念属性和对象的数量一致性特点,本文对属性拓扑的结构进行优化,提出一种新的图形式背景中表示方法,即图属性拓扑(graph context attribute topology, GcAT),为等势概念的快速计算奠定了基础.

在人类认识新事物的过程中,随着时间的推移,原有的知识体系结构将会产生相应的变化^[24]. 因此,在数据信息不全面的情况下,以增量式为基础的概念计算更符合人类的认知过程^[25]. 在增量式概念更新过程中,只需考虑新数据与原有知识结构间能否构成新的概念,有效地避免了原始形式背景中概念的重复计算^[26-27]. 受此启发,本文将增量式引入等势概念的计算以提升在新数据不断累加的过程中计算等势概念的效率并增强其实用价值.

为了降低增量式等势概念的计算时间,本文提出一种基于图属性拓扑的增量式等势概念计算方法. 该方法结合等势概念中属性与对象一致的特点,在结构层面优化属性拓扑,并给出图属性拓扑的定义,提出一种静态的等势概念直接计算方法,可以有效避免非等势概念的计算. 在静态计算方法得到的极大完全多边形的基础上,通过分析新增属性和对象对图属性拓扑结构的影响,完成极大完全多边形和等势概念的更新,从而实现增量式等势概念计算. 最后通过实验验证了所提出静态和增量式等势概念计算方法的可行性和高效性.

1 基本概念

形式背景是形式概念分析的研究对象,由属性和对象及二者间的关系组成,其定义如下.

定义1^[17] 形式背景由三元组 $K = (U, M, I)$ 表示,其中 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 为非空有限对象集合, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ 为非空有限属性集合, $I \subseteq U \times M$ 为对象与属性间的关系, n 为集合中元素的数量.

定义2^[17] 形式背景 $K = (U, M, I)$ 中,对于任意 $A \subseteq U, B \subseteq M$,定义一对算子

$$f(A) = \{m \in M \mid \forall u \in A, (u, m) \in I\}, \quad (1)$$

$$g(B) = \{u \in U \mid \forall m \in B, (u, m) \in I\}. \quad (2)$$

如果二元组 $C = (A, B)$ 满足 $f(A) = B$ 且 $g(B) = A$,则称 C 为一个形式概念,简称概念. 其中: B 为概念 C 的内涵, A 为概念 C 的外延. 本文用 $\mathfrak{B}(K)$ 表示形式背景中所有概念的集合.

在定义1和定义2的基础上,给出属性拓扑的定义.

定义3^[20] 形式背景 $K = (U, M, I)$ 对应的属性拓扑的邻接矩阵定义为一个有序的二元组 $AT = (V_{AT}, Edge)$, $\forall m_i, m_j \in V_{AT}$ 且 $m_i \neq m_j$. 其中: $V_{AT} = M$ 为非空的顶点集合, $Edge$ 为属性拓扑边上的权重, V_{AT} 与 $Edge$ 不相交. $Edge$ 定义为

$$Edge(m_i, m_j) = \begin{cases} \emptyset, & g(m_i) \cap g(m_j) = g(m_i) \neq g(m_j); \\ g(m_i) \cap g(m_j), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

在属性拓扑 $AT = (V_{AT}, Edge)$ 中,概念的内涵为 AT 中的节点集合,外延则是连接节点的边上的权值交集. 属性拓扑和形式背景是一一对应的,且属性拓扑能够直观地描述形式背景中属性间的关联关系.

定义4^[28] 形式背景 $K = (U, M, I)$ 对应的属性拓扑为 $AT = (V_{AT}, Edge)$, AT 中的完全多边形是指每对顶点间都有耦合关系. 将完全多边形记为 $AT_C = (V_C, E_C)$, 其中 $V_C \subset V_{AT}$, $E_C \subset Edge$.

定理1^[28] 除全局形式概念外,形式概念对应 AT 中的完全多边形,其内涵是完全多边形中的节点集合,外延是完全多边形边上权重的交集.

等势概念存在于由网络图生成的图形式背景中,现给出图形式背景的定义.

定义5^[11] 无向图 $G = (V, E)$ 对应的图形式背景定义为三元组 $FC(G) = (V, V, I)$, 其中第1个 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和第2个 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 分别为非空有限对象和属性集合. 为了便于区分,将图形式背景记作 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$, $I_G \subseteq V_U \times V_M$ 表示对象和属性的关系,且 $V_U = V_M = V$. 若 $v_i \in V, \forall i \in [1, n]$, 则有 $v_i = u_i \in V_U, v_i = m_i \in V_M$, 其中 u_i 和 m_i 分别为 v_i 作为对象和属性时的节点表示.

与一般的形式背景相比,图形式背景中对象和属性的数量是严格一致的,这是因为对象和属性为个体的不同表示形式,所以可认为图形式背景是一种单模态形式背景. 表1为图形式背景的示例.

表1 无向图 G 对应的图形式背景

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	0	0	0
b	1	1	1	0	0	0
c	1	1	1	1	0	0
d	0	0	1	1	1	1
e	0	0	0	1	1	0
f	0	0	0	1	0	1

定义6 无向图 $G = (V, E)$ 对应的图形式背景为 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$, 对于任意的 $U = \bigcup_{i=1}^n u_i \subseteq V_U, M = \bigcup_{i=1}^m m_i \subseteq V_M$, 定义算子

$$U = M^\Delta, \quad (4)$$

$$M = U^\Delta. \quad (5)$$

算子 Δ 表示无向图中对象集合 U 与属性集合 M 间不同表达方式的相互转换.

性质1 在图形式背景 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$ 中,对于 $\forall m_i \in V_M$, 有 $m_i^\Delta \in g(m_i)$.

证明 根据定义5,图中的节点作为对象和属性时总有 $(m_i^\Delta, m_i) \in I_G$, 因此 $m_i^\Delta \in g(m_i)$. \square

性质1表明图形式背景中的同一个节点分别作为对象和属性时,该对象一定包含该属性.

性质2 在图形式背景 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$ 中,对于 $\forall m_i, m_j \in V_M$, 如果 $m_i^\Delta \in g(m_j)$, 则 $m_j^\Delta \in g(m_i)$.

证明 若 $m_i^\Delta \in g(m_j)$, 则表明节点 v_i 与 v_j 有连接关系. 由定义5可知, $m_j^\Delta \in g(m_i)$. \square

性质2表明图形式背景中节点间的连接关系是相互的:若两节点相连,则在图形式背景中一个节点对应的对象一定具有另一个节点对应的属性;若两节点没有连接关系,则一个节点对应的对象一定不具有另一个节点对应的属性.

图1为表1图形式背景对应的属性拓扑.可以看出,只要耦合关系两端的属性作为对象出现在权值上,两者定同时出现.因此,属性拓扑能够刻画图形式背景的对称性.

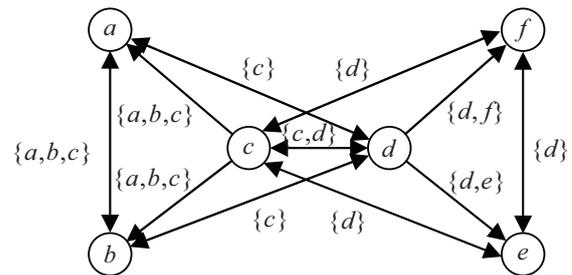


图1 表1对应的属性拓扑

定义7^[11] 等势概念是一种内涵与外延一致的形式概念. 在图形式背景 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$ 中,对于概念 $C = (A, B)$, 若 $A = B$, 则称概念 (A, B) 是一个等势概念, 记作 $C_E = (A_V, B_V)$, 图形式背景中所有等势概念的集合记为 $\mathfrak{B}_G(FC(G))$.

由定义7可知,图1所示属性拓扑中共包括4个等势概念,分别是 $(\{a, b, c\}, \{a, b, c\})$, $(\{c, d\}, \{c, d\})$, $(\{d, f\}, \{d, f\})$ 和 $(\{d, e\}, \{d, e\})$.

2 增量式等势概念计算

2.1 静态图属性拓扑与等势概念计算

通过利用属性拓扑的可视化特性深入研究图形式背景中不同节点间的对称性和同一节点包含自身的性质, 本文提出图属性拓扑 GcAT 表示方法用于简化属性间的耦合关系, 其定义如下.

定义 8 图形式背景 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$ 对应的图属性拓扑的邻接矩阵定义为有序的二元组 $GcAT = (V_M, Edge_G), \forall m_i, m_j \in V_M$ 且 $m_i \neq m_j$. 其中: V_M 为非空的顶点集, $Edge_G$ 为图属性拓扑边的权重, V_M 与 $Edge_G$ 不相交. $Edge_G$ 定义为

$$Edge_G(m_i, m_j) = \begin{cases} \emptyset, & g(m_i) \cap g(m_j) = g(m_i) \neq g(m_j); \\ \emptyset, & m_i^\Delta, m_j^\Delta \notin g(m_i) \cap g(m_j); \\ g(m_i) \cap g(m_j), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

当 $g(m_i) \cap g(m_j) = g(m_i) \neq g(m_j)$ 时, 表明对象集合 $g(m_i)$ 是 $g(m_j)$ 的真子集. 此时在图属性拓扑中, 属性 m_i 与 m_j 之间只存在 m_j 指向 m_i 的单向边, 且耦合关系权值为 $g(m_i)$. 相对于属性拓扑, 图属性拓扑加入了限制条件 $m_i^\Delta, m_j^\Delta \notin g(m_i) \cap g(m_j)$, 其表示属性 $m_i(m_j)$ 不包含作为对象时的 $m_j(m_i)$, 此时该属性对间的耦合关系为空.

根据定义 8, 可将表 1 图形式背景转化为图属性拓扑, 如图 2 所示. 相比图 1 中的属性拓扑, 图 2 中的图属性拓扑减少了耦合关系 $Edge(a, d), Edge(d, a), Edge(c, f), Edge(f, c), Edge(b, d), Edge(d, b), Edge(c, e), Edge(e, c), Edge(f, e), Edge(e, f)$. 因此, GcAT 能够减少属性间的耦合关系, 降低 AT 的规模, 从而有利于缩短搜索等势概念的时间.

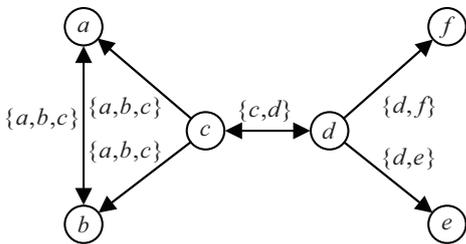


图 2 表 1 对应的图属性拓扑

性质 3 如果 $AT_C = (V_C, E_C)$ 是图属性拓扑中的完全多边形, 则 $V_C^\Delta \subseteq g(V_C)$.

证明 对于 $\forall m_i, m_j \in V_C, m_i \neq m_j$, 由定义 4 可得 $Edge_G(m_i, m_j) \neq \emptyset$. 由定义 8 可得 $g(m_i) \cap g(m_j) = \emptyset$, 即 $m_i^\Delta \in g(m_j)$ 且 $m_j^\Delta \in g(m_i)$. 以此类推, 对象 m_i^Δ 和 m_j^Δ 满足 $m_i^\Delta \subseteq g(V_C), m_j^\Delta \subseteq g(V_C)$, 属性 m_i 和 m_j 满足 $V_C^\Delta \subseteq g(m_i), V_C^\Delta \subseteq g(m_j)$, 因此

$$V_C^\Delta \subseteq g(V_C). \quad \square$$

概念在属性拓扑中可用完全多边形表示. 图属性拓扑中耦合关系减少将导致某些完全多边形不再存在, 这在拓扑层面上能够降低搜索极大完全多边形的难度, 其中极大完全多边形的定义如下.

定义 9 形式背景 $K = (U, M, I)$ 对应的属性拓扑为 $AT = (V_{AT}, Edge)$. $AT_C = (V_C, E_C)$ 是此属性拓扑中的一个完全多边形. 极大完全多边形是指不能通过包含一个或多个属性来扩展的完全多边形, 即一个极大完全多边形不能被一个更大的完全多边形所包含. 对于 AT_C , 如果不存在另一个完全多边形 $AT_{C'}$ 使得 $AT_C \subseteq AT_{C'}$, 则称 AT_C 为一个极大完全多边形, 记为 $AT_{MC} = (V_{MC}, E_{MC})$.

在图 2 所示的图属性拓扑中, 极大完全多边形包括 $(\{a, b, c\}, E_{MC1}), (\{d, f\}, E_{MC2}), (\{d, e\}, E_{MC3}), (\{c, d\}, E_{MC4})$.

定理 2 图形式背景 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$ 对应的图属性拓扑为 $GcAT = (V_M, Edge_G)$. GcAT 中的极大完全多边形与图形式背景 $FC(G)$ 中的等势概念一一对应, 两者的等价关系表示为

$$AT_{MCs}(GcAT) \equiv \mathfrak{B}_G(FC(G)). \quad (7)$$

其中: $AT_{MCs}(GcAT)$ 是由 GcAT 中所有极大完全多边形组成的集合, $\mathfrak{B}_G(FC(G))$ 是由图形式背景 $FC(G)$ 中所有等势概念组成的集合.

证明 从两方面进行证明, 分别是图属性拓扑中的极大完全多边形与等势概念的对应关系 $AT_{MCs}(GcAT) \Rightarrow \mathfrak{B}_G(FC(G))$ 和图形式背景中的等势概念与极大完全多边形的对应关系 $\mathfrak{B}_G(FC(G)) \Rightarrow AT_{MCs}(GcAT)$.

首先证明 $AT_{MCs}(GcAT) \Rightarrow \mathfrak{B}_G(FC(G))$. 在图属性拓扑 $GcAT = (V_M, Edge_G)$ 中, 若对于任意的 $AT_{MC} = (V_{MC}, E_{MC}) \in AT_{MCs}(GcAT)$, 则有等势概念 $(V_{MC}^\Delta, V_{MC}) \in \mathfrak{B}_G(FC(G))$.

由于极大完全多边形是一种特殊的完全多边形, 由性质 3 可得 $V_{MC}^\Delta \subseteq g(V_{MC})$. 假设 (V_{MC}^Δ, V_{MC}) 不是等势概念, 即集合 V_{MC} 满足 $V_{MC}^\Delta \neq g(V_{MC})$, 则 V_{MC} 满足 $V_{MC}^\Delta \subseteq g(V_{MC})$. 取属性 m_i 和 $m_j, \forall m_i^\Delta \in g(V_{MC}) - V_{MC}^\Delta, \forall m_j \in V_{MC}$. 由性质 3 可知 $m_i^\Delta \in g(m_j), m_j^\Delta \in g(m_i)$. 即在 GcAT 中两属性间的耦合关系不为空, $Edge_G(m_i, m_j) \neq \emptyset$ 或 $Edge_G(m_j, m_i) \neq \emptyset$, 因此 AT_{MC} 至少会被一个更大的完全多边形所包含, 即 $AT_{MC} \subseteq AT_{MC'} = (V_{MC} \cup m_i, E_{MC})$, 这与极大完全多边形的定义相矛盾, 因此 $(V_{MC}^\Delta, V_{MC}) \in \mathfrak{B}_G(FC(G))$.

下面证明 $\mathfrak{B}_G(FC(G)) \Rightarrow AT_{MCs}(GcAT)$. 在图形式

式背景 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$ 中, 对于任意的等势概念 $C_E = (A_V, B_V) \in \mathfrak{B}_G(FC(G))$, 可得 $AT_{MC} = (B_V, E_{MC}) \in GcAT$. 已知 C_E 为等势概念, 因此外延与内涵之间的关系满足 $g(B_V) = A_V$. $\forall m_i, m_j \in B_V$, 有 $(m_i m_j)^\Delta \subset A_V$. 因此根据定义8可得 $Edge_G(m_i, m_j) = g(m_i) \cap g(m_j) \neq \emptyset$ 或 $Edge_G(m_j, m_i) = g(m_j) \cap g(m_i) \neq \emptyset$, 即存在完全多边形 $AT_C = (B_V, E_{MC})$.

假设存在一个任意的极大完全多边形 $AT_{MC} = (V_{MC}, E_{MC})$ 使得 AT_C 满足 $AT_C \subset AT_{MC}$. 若存在 $m_k \in V_{MC} - B_V$, 则对于任意 $m_p \in B_V$, 能够使得 $Edge_G(m_k, m_p) \neq \emptyset$ 或 $Edge_G(m_p, m_k) \neq \emptyset$, 即属性 m_k 和 m_p 满足 $m_k^\Delta \in g(m_p), m_p^\Delta \in g(m_k)$. 由性质3可知属性 m_k 与完全多边形的内涵集合满足关系 $(B_V \cup m_k)^\Delta = A_V \cup m_k^\Delta \subset g(B_V \cup m_k)$. 由 $\forall m_k \in V_{MC} - B_V$ 可知 $m_k \notin B_V, m_k^\Delta \notin A_V$, 有 $A_V \subset A_V \cup m_k^\Delta \subset g(B_V \cup m_k) = g(B_V) \cap g(m_k) \subset g(B_V)$. 这与 (A_V, B_V) 是等势概念相矛盾, 因此有极大完全多边形 $AT_{MC} = (B_V, E_{MC}) \in GcAT$. \square

等势概念在图属性拓扑中具有可视化的极大完全多边形结构. 根据定理2可将等势概念的计算转化为极大完全多边形的搜索. 由于等势概念内涵与外延的一致性, 极大完全多边形 $AT_{MC} = (V_{MC}, E_{MC})$ 只需一步转化即可计算出对应的等势概念 (V_{MC}^Δ, V_{MC}) . 结合等势概念的定义、图2和定理2可知, 图属性拓扑不仅能可视化极大完全多边形结构, 而且每个极大完全多边形都有相对应的等势概念.

利用定理2中极大完全多边形与等势概念间的关系, 本文首先提出一种直接计算等势概念的方法处理静态图形式背景以提升等势概念的计算效率. 算法1列出了静态图形式背景下等势概念直接计算的步骤.

算法1 基于静态图形式背景的等势概念的直接计算.

输入: 图形式背景 $FC(G) = (V_U, V_M, I_G)$;

输出: 等势概念集合 $\mathfrak{B}_G(FC(G))$.

step 1: 初始化等势概念集合 $\mathfrak{B}_G(FC(G)) = \emptyset$ 、子拓扑集合 $S_{GcAT} = \emptyset$ 和极大完全多边形集合 $AT_{MCs}(GcAT) = \emptyset$;

step 2: 根据定义8, 构建图属性拓扑 $GcAT$;

step 3: 使用属性的自下而上分解算法BDAT得到排序后的属性集合 $P_G(V_M)$;

step 4: 对属性 $m_i \in P_G$ 构建子拓扑 $GcAT_i$;

step 5: 将子拓扑存储到集合 S_{GcAT} 中, $S_{GcAT} =$

$S_{GcAT} \cup GcAT_i$;

step 6: 重复step 4和step 5, 按次序遍历完集合 P_G 中的所有属性;

step 7: 约简 S_{GcAT} 中的子拓扑 $GcAT_i$;

step 8: 使用可视化方法在约简后的子拓扑中计算极大完全多边形, 并存储到集合 $AT_{MCs}(GcAT)$ 中;

step 9: 重复step 7和step 8, 直至约简完 S_{GcAT} 中的所有子拓扑;

step 10: 对 $AT_{MCs}(GcAT)$ 中每个极大完全多边形, 取属性集合作为等势概念的内涵和外延, 将等势概念存储到 $\mathfrak{B}_G(FC(G))$ 中.

在step 3~step 9中, 分解与约简算法^[17]在图属性拓扑中被应用. 在step 10中, 由定理2可知, 在约简后的子图属性拓扑的基础上分别搜索极大完全多边形可完成等势概念的计算.

2.2 图属性拓扑的增量分析

结合定理2与图属性拓扑的相关性质, 分析新增个体对图属性拓扑中极大完全多边形的影响以及增量式等势概念的变化.

在图形式背景中, 新节点的加入意味着行和列同时增加属性和对象信息. 表2列出了新增节点 g 后新网络 G' 对应的图形式背景. 图3展示了由表2增量图形式背景构建的图属性拓扑.

表2 网络 G' 对应的图形式背景

	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	1	0	0	0	1
b	1	1	1	0	0	0	0
c	1	1	1	1	0	0	1
d	0	0	1	1	1	1	1
e	0	0	0	1	1	0	0
f	0	0	0	1	0	1	0
g	1	0	1	1	0	0	1

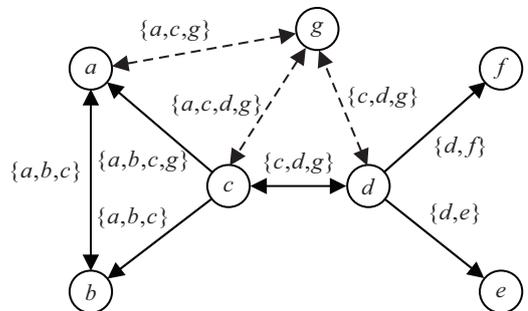


图3 增量图形式背景构建的图属性拓扑

定理3 新节点只能与原图属性拓扑中单独的极大完全多边形生成新极大完全多边形, 不会与多个极大完全多边形生成新的极大完全多边形.

证明 设原图属性拓扑 $GcAT = (V_M, Edge_G)$, 新增节点为 v_i . 由新增节点导致的新增对象为 u_i , 新

增属性为 m_i ,下面利用反证法进行证明。

设存在两个极大完全多边形,第1个为 $AT_{MC1} = (V_{MC1}, E_{MC1})$,第2个为 $AT_{MC2} = (V_{MC2}, E_{MC2}) \in AT_{MCs}(GcAT)$,新的极大完全多边形为 $AT_{MCj} = (V_{MCj}, E_{MCj})$, $V_{MCj} = V_{MC1} \cup V_{MC2} \cup m_i$.根据定义9可知存在完全多边形 $AT_C = (V_C, E_C)$, $V_C = V_{MC1} \cup V_{MC2}$.

由于新节点的引入并未影响原GcAT中 AT_{MC1} 与 AT_{MC2} 之间的连接关系,在原GcAT中也存在完全多边形 AT_C ,使得存在关系 $V_{MC1}, V_{MC2} \subset V_C$,此时在原GcAT中存在完全多边形包含极大完全多边形,这与极大完全多边形的定义相矛盾.因此新节点不会与多个极大完全多边形同时生成新的极大完全多边形.□

引理1 对于 $GcAT = (V_M, Edge_G)$,新增节点为 v_i ,由新增节点导致的新增对象为 u_i ,新增属性为 m_i ,原极大完全多边形为 $AT_{MC1} = (V_{MC1}, E_{MC1})$,新的极大完全多边形记为 $AT_{MC}^* = (V_{MC}^*, E_{MC}^*)$.

若 $u_i \in g(V_{MC1})$,则新极大完全多边形的属性集合 $V_{MC}^* = V_{MC1} \cup m_i$,属性 m_i 与原极大完全多边形共同组合为新的极大完全多边形,此时并不会改变原有极大完全多边形的数量.

若 $u_i \in g(V_{MCx})$, $V_{MCx} \subseteq V_{MC1}$,则新极大完全多边形的属性集合 $V_{MC}^* = V_{MCx} \cup m_i$,属性 m_i 与原极大完全多边形的一部分共同组合为新的极大完全多边形,此时原有极大完全多边形的数量将会增加.

若 $u_i \notin g(m_y), \forall m_y \in V_{MC1}$,则新极大完全多边形的属性集合为 $V_{MC}^* = m_i$,属性 m_i 成为新极大完全多边形中唯一的属性,此时原有极大完全多边形的数量将会增加.

证明 当 $u_i \in g(V_{MC1})$ 时,由式(2)可知,对于 $\forall m_j \in V_{MC1}$,均有 $u_i \in g(m_j)$.由性质2可知, $m_j^\Delta \in g(m_i)$.因此,根据式(6)得到 $Edge(m_i, m_j) \neq \emptyset$ 或者 $Edge(m_j, m_i) \neq \emptyset$,即在更新后的图属性拓扑中, m_i 与 AT_{MC1} 中的所有属性间具有耦合关系.根据定义9, AT_{MC1} 将成为新极大完全多边形 $AT_{MC}^* = (V_{MC1} \cup m_i, E_{MC}^*)$,因此原有极大完全多边形的数量不会改变.

当 $u_i \in g(V_{MCx}), V_{MCx} \subseteq V_{MC1}$ 时,由定义4可知有完全多边形 $AT_{Cx} = (V_{MCx}, E_{Cx})$ 存在.因为 $u_i \in V_{MCx}$,由上个阶段的证明可知,对 $\forall m_j \in V_{MC1}$,有 $Edge(u_i^\Delta, m_j) \neq \emptyset$ 或 $Edge(m_j, u_i^\Delta) \neq \emptyset$,即在更新后的图属性拓扑中, m_i 与 AT_{Cx} 中的所有属性间具有耦合关系.根据定理3可知,此时 m_i 将与 AT_{Cx} 构

成新极大完全多边形 $AT_{MC}^* = (V_{MCx} \cup m_i, E_{MC}^*)$,因此原极大完全多边形的数量将会增多.

当 $u_i \notin g(m_y), \forall m_y \in V_{MC1}$ 时,更新后的图属性拓扑中 m_i 与 V_M 中的所有属性之间均无耦合关系存在,根据定义9易知存在极大完全多边形 $AT_{MC}^* = (m_i, E_{MC}^\Delta)$,因此原有极大完全多边形的数量将会增多.□

2.3 等势概念的增量计算

在不丢失等势概念、不产生冗余和伪等势概念的前提下,通过对增量图属性拓扑中极大完全多边形变化的分析,增量式等势概念的计算过程主要包括3部分:判断新增个体为属性或对象、基于属性或对象增量的极大多边形的更新和等势概念计算.算法2展示了新增属性/对象后极大完全多边形的更新及对应等势概念更新计算的过程.

算法2 基于属性或对象增量的等势概念计算.

输入: 图形式背景 $FC'(G) = (V_U, V_M, I_G)$,新增属性或对象 m' ,增量前极大完全多边形集合 $AT_{MCs}(GcAT)$;

输出: 等势概念集合 $\mathfrak{B}_G(FC'(G))$.

step 1: 初始化集合 $\mathfrak{B}_G(FC'(G)) = \emptyset$.

step 2: 遍历极大完全多边形 $AT_{MCs}(GcAT)$,对于任意极大完全多边形记为 $AT_{MC} = (V_{MC}, E_{MC})$,如果 m' 为新增属性,则执行step 3;如果 m' 为新增对象,则执行step 4.

step 3: $\forall m_i \in V_{MC}$,若 $(m_i^\Delta, m') \in I_G$,则根据定义8构建新极大完全多边形,使用可视化方法计算形式概念 $C = (A, B)$,并将 $(g(B), (g(B)^\Delta))$ 作为等势概念存储到集合 $\mathfrak{B}_G(FC'(G))$ 中;若 $(m_i^\Delta, m') \notin I_G$,则将 $((V_{MC})^\Delta, V_{MC})$ 作为等势概念存储到集合 $\mathfrak{B}_G(FC'(G))$ 中.

step 4: 对于任意 $m_i \in V_{MC}$,若 $(m', m_i) \in I_G$,则根据定义8更新极大完全多边形的耦合关系,使用可视化方法计算形式概念 $C = (A, B)$,并将 $(g((m')^\Delta) \cap g(A), (g((m')^\Delta) \cap g(A))^\Delta)$ 作为等势概念存储到集合 $\mathfrak{B}_G(FC'(G))$ 中;若 $(m', m_i) \notin I_G$,则将 $((V_{MC})^\Delta, V_{MC})$ 作为等势概念存储到集合 $\mathfrak{B}_G(FC'(G))$ 中.

新增属性对原等势概念的影响可通过在原极大完全多边形中添加节点信息来表示,因此在不影响原属性拓扑连接关系的基础上可得到新的极大完全多边形,从而计算出属性增量的等势概念.

定理4 在对象增量图形式背景中,新增对象为 u_i ,对应的图属性拓中原属性间权值可能发生改

变,但不改变耦合关系的数量,且不增加属性节点.

证明 由于在图形式背景中新增对象并未影响原属性的数量,根据定义9可知原图属性拓扑中属性个数不会发生变化.新增对象 u_i 时,按照定义9在原图属性拓扑中更新权值信息和边的指向,不会新增耦合关系.□

由定理4以及完全多边形权值与形式概念之间的关系可知,形式概念的外延对应完全多边形中边上权值的交集,可通过考虑新增对象后原极大完全多边形中所有被影响的耦合关系求取交集后,判断是否仍包含新增对象而计算等势概念.若交集中包含新增对象,则其共同组成新的等势概念外延.因此,基于图属性拓扑的增量式等势概念计算可总结为4种更新方式,如定理5所示.

定理5 等势概念保留:不受新节点影响的等势概念将继续作为等势概念存在.等势概念递进:等势概念内涵中的所有属性均受新节点影响,此时等势概念将结合新节点成为新的等势概念.等势概念分裂:等势概念的部分属性和对象受新节点影响,此时受影响的部分将结合新节点成为新的等势概念,原等势概念保留.等势概念新增:新节点作为一个单独的等势概念出现.

3 实验分析

为了验证所提出增量式等势概念计算方法的正确性和减少计算时间的有效性,实验选取5个数据集评估算法性能,5个数据集包括Karate、Dolphins、Jazz、FPF和MVPT,分别表示空手道俱乐部成员间的网络、宽吻海豚间的网络、爵士乐音乐人间的网络、Facebook页面间的网络和田鼠群体间的网络数据集.数据集节点数分别为34、62、198、620和1263;边条数分别为78、159、2742、2102和3380.实验硬件平台为CPU:AMD(A1-7300@2.2GHz)、8GB随机存取存储器、Windows 10,软件平台使用Visual Studio 2013.实验在相同的硬件和软件环境下运行.

为了突出直接计算等势概念的有效性,表3和表4对比了静态计算方法与3种现有算法(CMCG^[29]、CEQA^[16]和AT)在计算等势概念的数量#EC(形式概念数量#C)和时间的结果.为了减小实验的偶然误差,所有算法均进行5次测试,并通过取均值作为最终的运行时间消耗以提升时间对比的可靠性.由表3可知,所有方法均能正确地计算出所有的形式概念或等势概念.将CMCG、CEQA和AT算法用于计算等势概念时,三者的思路均为先计算形式概念再筛选等势概念.由于计算形式概念的时间远大于筛选等势

概念的时间,可用3种对比算法计算形式概念的时间近似求取等势概念的时间.表4表明所提出方法在不同数据集上的运行时间均低于对比算法.其中,相比CMCG和CEQA算法,静态计算方法省略了计算非等势概念的过程,从而有效降低了时间消耗.与AT算法相比,静态计算方法不仅可以直接计算等势概念,而且其构建的图属性拓扑在结构上减少了耦合关系,这意味着计算过程中可减少路径回溯,从而提高算法的运算效率.

表3 概念计算结果对比

数据集	CMCG ^[29]		CEQA ^[16]		AT		静态计算	
	#C	#EC	#C	#EC	#C	#EC	#C	#EC
Karate	136	—	136	36	136	—	—	36
Dolphins	348	—	348	84	348	—	—	84
Jazz	68 880	—	68 880	746	68 880	—	—	746
FPF	11 528	—	11 528	1 249	11 528	—	—	1 249
MVPT	5 755	—	5 755	1 305	5 755	—	—	1 305

表4 不同方法的运行时间 单位:ms

数据集	CMCG ^[29]	CEQA ^[16]	AT	静态计算
Karate	60.2	8.2	7.4	5.4
Dolphins	63.8	12.2	10.8	8.6
Jazz	3 454 358.0	1 765.6	1 234.8	1 016.6
FPF	4 546 879.4	2 135.2	2 097.6	1 810.2
MVPT	8 354 191.8	5 327.8	5 284.2	5 166.6

为了展示所提出增量式方法计算等势概念的性能,选取数据集中规模较大,即节点数和边条数较多的FPF和MVPT数据集分别进行增量式等势概念计算.具体过程为:将上述3个数据集分别分成10个阶段模拟增量的生成过程,第1阶段节点数设置为 $L = \lfloor \text{总节点数}/10 \rfloor$,第2~第9阶段分别在上阶段的结果上逐次增加 L 个节点,第10阶段则增加数据集中的剩余节点;在每个阶段统计等势概念数量和运行时间.为了避免数据集中节点顺序对结果的影响,本节在随机打乱5次的数据集上进行实验,并取均值作为最终结果.

将所提出增量计算方法分别与静态计算方法以及3种现有的增量式概念计算方法(MultiAddIntent^[30]、Add-FCA^[24]、ICCA^[18])进行对比.经验证,所提出方法和对比方法在各个阶段的概念数量相等.为了突出所提出增量方法的效率,表5展示了所提出增量方法与对比方法在FPF和MVPT数据集上不同阶段计算等势概念的运行时间.由表5可知,在第1阶段,静态和增量计算方法计算等势概念的步骤相同,因此两者运行时间相同.在第2~第10阶段,随着节点的不断增多,对于增量计算而言作

为输入的等势概念也增多,从而节省大量的计算时间;静态方法在每个阶段都需重新计算所有等势概念,当节点数不断增加,需要构建的图属性拓扑规模

也随之增大,导致重复计算的等势概念增多,从而大幅度增加了计算时间. 因此,增量算法不仅能正确计算等势概念,而且运行时间均少于静态计算方法.

表5 不同方法在 FPF 和 MVPT 数据集上的运行时间对比

单位: ms

数据集	方法/不同阶段	62	124	186	248	310	372	434	496	558	620
FPF	静态	13.0	45.8	90.2	170.8	257.8	438.6	661.2	888.6	1 273.8	1 810.2
	MultiAddIntent ^[30]	14.2	35.8	77.2	155.4	239.6	419.2	637.6	862.8	1 212.2	1 724.6
	Add-FCA ^[24]	13.8	27.6	68.4	136.8	221.8	405.4	621.2	850.2	1 146.8	1 635.4
	ICCA ^[18]	13.6	22.8	62.6	124.4	210.2	392.8	601.4	828.6	1 112.8	1 575.4
	增量	13.0	18.4	55.6	107.2	191.4	299.2	503.6	736.8	1 015.8	1 472.6
MVPT	方法/不同阶段	126	252	378	504	630	756	882	1 008	1 134	1 263
	静态	40.2	154.0	352.0	635.6	1 079.2	1 504.4	2 237.4	3 102.6	4 128.0	5 166.6
	MultiAddIntent ^[30]	45.6	146.0	316.6	577.8	967.4	1 378.2	2 032.8	2 857.4	3 837.2	4 880.2
	Add-FCA ^[24]	43.4	103.6	257.2	502.2	872.8	1 312.4	1 906.2	2 707.8	3 668.0	4 714.8
	ICCA ^[18]	42.2	74.8	208.3	429.4	754.2	1 211.8	1 731.0	2 474.2	3 397.4	4 445.2
增量	40.2	59.0	182.0	397.8	695.4	1 164.2	1 608.0	2 355.8	3 260.0	4 311.8	

另外,所提出增量式等势概念的直接计算方法在计算效率方面比其他 3 种增量式算法表现出了更优的性能. 这是因为 MultiAddIntent、Add-FCA 和 ICCA 算法均先基于概念格或属性拓扑计算出当前形式背景的所有形式概念,再筛选出等势概念集合. 而所提出增量式方法能够只关注等势概念的更新,无需计算大量的形式概念,从而缩短了运行时间.

4 结 论

本文在定义的图属性拓扑上分析等势概念与极大完全多边形的关系,提出了一种增量式等势概念的直接计算方法,并通过实验表明基于图属性拓扑的增量式等势概念计算的有效性. 该方法表明了图属性拓扑中极大完全多边形与等势概念的一一对应关系,利用图属性拓扑的可视化特性能够直观地表示增量式等势概念的更新过程,并且通过直接计算等势概念避免了搜索全部形式概念的过程,从而有效降低了等势概念的计算时间. 未来工作将着重考虑如何利用图属性拓扑实现增量减量一体化的等势概念计算,以及如何在有向图上定义等势概念,这对于等势概念的研究进展具有重要意义.

参考文献(References)

[1] Wille R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[C]. *Ordered Sets*. Dordrecht: Reidel, 1982: 445-470.

[2] 李金海, 闫梦宇, 徐伟华, 等. 概念认知学习的若干问题与思考[J]. *西北大学学报: 自然科学版*, 2020, 50(4): 501-515.
(Li J H, Yan M Y, Xu W H, et al. Some problems and thoughts on concept-cognitive learning[J]. *Journal*

of Northwest University: Natural Science Edition, 2020, 50(4): 501-515.)

[3] 冯锋, 万喆, 徐泽水, 等. 基于软粗糙集的犹豫模糊三支决策方法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(3): 834-842.
(Feng F, Wan Z, Xu Z S, et al. Hesitant fuzzy three-way decision method based on soft rough sets[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(3): 834-842.)

[4] Mi Y L, Liu W Q, Shi Y, et al. Semi-supervised concept learning by concept-cognitive learning and concept space[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2022, 34(5): 2429-2442.

[5] Zhi H L, Li J H. Granule description based knowledge discovery from incomplete formal contexts via necessary attribute analysis[J]. *Information Sciences*, 2019, 485: 347-361.

[6] 刘勇, 胡宇鹏, 李学庆. 一种基于约束格维护概念模型一致性的方法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(2): 367-374.
(Liu Y, Hu Y P, Li X Q. A method of maintaining consistency of conceptual model with constrained lattice[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(2): 367-374.)

[7] 陈伯谦, 王坚. 融合概念和属性信息的领域知识图谱补充方法[J]. *控制与决策*, 2024, 39(7): 2325-2333.
(Chen B Q, Wang J. Domain knowledge graph completion method incorporating concept and attribute information[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(7): 2325-2333.)

[8] Hao F, Yau S S, Min G Y, et al. Detecting k -balanced trusted cliques in signed social networks[J]. *IEEE Internet Computing*, 2014, 18(2): 24-31.

[9] Hao F, Park D S. cSketch: A novel framework for capturing cliques from big graph[J]. *The Journal of Supercomputing*, 2018, 74(3): 1202-1214.

[10] Hao F, Sun Y F, Lin Y G. Rough maximal cliques enumeration in incomplete graphs based on partially-known concept learning[J]. *Neurocomputing*, 2022, 496: 96-106.

- [11] Hao F, Min G Y, Pei Z, et al. K -clique community detection in social networks based on formal concept analysis[J]. *IEEE Systems Journal*, 2017, 11(1): 250-259.
- [12] Yan M Y, Li J H. Knowledge discovery and updating under the evolution of network formal contexts based on three-way decision[J]. *Information Sciences*, 2022, 601: 18-38.
- [13] Gao J, Hao F, Pei Z, et al. Learning concept interestingness for identifying key structures from social networks[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2021, 8(4): 3220-3232.
- [14] Hao F, Pei Z, Yang L T. Diversified top-k maximal clique detection in social internet of things[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2020, 107: 408-417.
- [15] Hao F, Yang Y X, Shang J X, et al. AFCMiner: Finding absolute fair cliques from attributed social networks for responsible computational social systems[J]. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 2023, DOI: 10.1109/TCSS.2023.3245075.
- [16] Yang Y X, Hao F, Pang B B, et al. A quick algorithm on generating concept lattice for attribute-incremental streaming data[C]. *Proceedings of the 2019 IEEE 21st International Conference on High Performance Computing and Communications*. Piscataway: IEEE, 2019: 2811-2816.
- [17] 张涛, 白冬辉, 李慧. 属性拓扑的并行概念计算算法[J]. *软件学报*, 2017, 28(12): 3129-3145.
(Zhang T, Bai D H, Li H. Parallel concept computing based on bottom-up decomposition of attribute topology[J]. *Journal of Software*, 2017, 28(12): 3129-3145.)
- [18] Zhang T, Li H H, Liu M Q, et al. Incremental concept-cognitive learning based on attribute topology[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2020, 118: 173-189.
- [19] Zhang T, Liu M Q, Rong M. Attenuation characteristics analysis of concept tree[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2020, 39(3): 4081-4094.
- [20] Zhang T, Rong M, Shan H R, et al. Stability analysis of incremental concept tree for concept cognitive learning[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2022, 13(1): 11-28.
- [21] Zhang T, Rong M, Shan H R, et al. Causal asymmetry analysis in the view of concept-cognitive learning by incremental concept tree[J]. *Cognitive Computation*, 2021, 13(5): 1274-1286.
- [22] Zhang T, Lin L Q, Xue Z F. A voice feature extraction method based on fractional attribute topology for Parkinson's disease detection[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 219: 119650.
- [23] Zhang T, Lin L Q, Tian J, et al. Voice feature description of Parkinson's disease based on co-occurrence direction attribute topology[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2023, 122: 106097.
- [24] Yang Y X, Hao F, Pang B B, et al. Dynamic maximal cliques detection and evolution management in social internet of things: A formal concept analysis approach[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(3): 1020-1032.
- [25] 张涛, 李和合, 曹海兰, 等. 增量形式背景的拓扑坍塌表示[J]. *小型微型计算机系统*, 2018, 39(5): 1033-1037.
(Zhang T, Li H H, Cao H L, et al. Incremental formal context represented by topology collapse[J]. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2018, 39(5): 1033-1037.)
- [26] Zhi H L, Li J H. Influence of dynamical changes on concept lattice and implication rules[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2018, 9(5): 795-805.
- [27] 曾利程, 张祖平, 邹力耕. 增量式快速构建概念格算法[J]. *计算机科学与探索*, 2018, 12(11): 1862-1870.
(Zeng L C, Zhang Z P, Zou L G. Fast algorithm for incremental construction of concept lattice[J]. *Journal of Frontiers of Computer Science & Technology*, 2018, 12(11): 1862-1870.)
- [28] 张涛, 任宏雷, 洪文学, 等. 基于属性拓扑的可视化形式概念计算[J]. *电子学报*, 2014, 42(5): 925-932.
(Zhang T, Ren H L, Hong W X, et al. The visualizing calculation of formal concept that based on the attribute topologies[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(5): 925-932.)
- [29] 陈震, 张娜, 王甦菁. 一种基于概念矩阵的概念格生成算法[J]. *计算机科学*, 2010, 37(9): 180-183.
(Chen Z, Zhang N, Wang S J. New algorithm of generating concept lattice based on concept-matrix[J]. *Computer Science*, 2010, 37(9): 180-183.)
- [30] Yang L, Li G H, Xiao M H, et al. MultiAddIntent: efficient RDF data-oriented incremental construction concept lattice algorithm[C]. *IEEE International Conference on Parallel & Distributed Processing with Applications, Big Data & Cloud Computing, Sustainable Computing & Communications, Social Computing & Networking*. Melbourne, 2022: 806-814.

作者简介

张涛(1979—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 从事认知计算、因果推理等研究, E-mail: zhtao@ysu.edu.cn;

薛在发(1996—), 男, 博士生, 从事形式概念分析、认知计算等研究, E-mail: xuezf@stumail.ysu.edu.cn;

卢辉斌(1964—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 从事机器学习、信号处理等研究, E-mail: yjsbl@ysu.edu.cn;

李少泽(1996—), 男, 硕士, 从事属性拓扑、社交网络等研究, E-mail: lsz_052066@163.com;

张菁(1999—), 男, 硕士生, 从事知识发现的研究, E-mail: zj_dj990210@163.com;

刘学君(1977—), 男, 教授, 博士生导师, 从事人工智能、嵌入式等研究, E-mail: lxj@bipt.edu.cn.