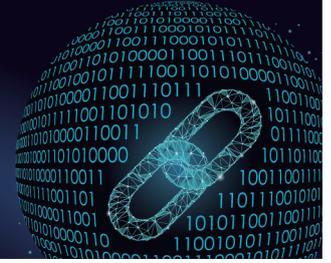




中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

C O N T R O L A N D D E C I S I O N



有限时间控制的性能分析及参数选取

姜博严, 杜文浩, 李传江, 姚文卿

引用本文:

姜博严, 杜文浩, 李传江, 姚文卿. 有限时间控制的性能分析及参数选取[J]. *控制与决策*, 2024, 39(10): 3337–3346.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0407>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于PID参数整定的线性自抗扰控制参数整定

Tuning of linear active disturbance rejection controllers based on PID tuning rules
控制与决策. 2021, 36(7): 1592–1600 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1408>

基于能量分析的桥式起重机防摆控制方法

Anti-swing control method of bridge crane based on energy analysis
控制与决策. 2021, 36(12): 3091–3096 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0694>

基于高阶滑模速度控制器的异步电机模型预测转矩控制

A model predictive torque control for induction motor based on high order sliding mode speed controller
控制与决策. 2021, 36(4): 953–958 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0650>

一种改进的紧格式无模型自适应控制方法

An improved compact form model free adaptive control method
控制与决策. 2021, 36(2): 436–442 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0635>

一类非线性大系统分散自适应预设性能有限时间跟踪控制

Decentralized adaptive prescribed performance finite-time tracking control for a class of large-scale nonlinear systems
控制与决策. 2020, 35(12): 3045–3052 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0623>

有限时间控制的性能分析及参数选取

姜博严¹, 杜文浩¹, 李传江^{2†}, 姚文卿¹

(1. 常州工学院 电气信息工程学院, 江苏 常州 213032;

2. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 相比于无幂函数的传统线性控制方法,有限时间控制器(finite-time controller, FTC)因具有指数参数而能够实现更优的控制性能. 以一阶系统为例,定性且定量地对FTC和线性控制器(linear controller, LC)性能进行较为全面的对比,共得出11个相关定理,重点研究如何选取FTC的控制参数,以获得比LC更优的控制性能. 具体内容为:考虑一阶标称系统和受扰动系统,设定一系列能反映控制性能的评价指标,如最大控制量、能量消耗、收敛速度、稳态精度以及抗干扰能力等;相比于已给定的LC,通过计算求出每个指标所对应的FTC参数,并证明存在合适的参数范围使FTC在评价指标的约束下具有更优的控制性能;证明在同一评价指标约束下,相比于FTC,不存在具有更优性能的LC. 该研究可为FTC优于LC提供理论支撑,也为如何选取或优化FTC参数提供理论依据.

关键词: 有限时间控制; 非光滑控制; 线性控制; 性能对比; 参数选取

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0407

引用格式: 姜博严,杜文浩,李传江,等.有限时间控制的性能分析及参数选取[J].控制与决策,2024,39(10):3337-3346.

Performance analysis and parameter selection for finite-time control

JIANG Bo-yan¹, DU Wen-hao¹, LI Chuan-jiang^{2†}, YAO Wen-qing¹

(1. School of Electrical and Information Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213032, China;

2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Compared with the traditional linear control method without a power function, a finite-time controller (FTC) can achieve better control performance due to its exponential parameter. In this paper, we comprehensively compare the performance of the FTC and linear controller (LC) both qualitatively and quantitatively, for a first-order system. We have derived a total of 11 relevant theorems that focus on the selection of control parameters for the FTC to achieve superior control performance compared to the LC. The specific content is that a series of evaluation indicators are set for both the nominal system and the disturbed system to reflect their control performance. These indicators include the maximum control amplitude, energy consumption, convergence speed, steady-state accuracy, and anti-disturbance capability. Based on the given LC, the FTC parameters corresponding to each indicator are calculated. It has been proven that there is an optimal parameter range that can enhance the control performance of the FTC while still satisfying the constraints of the evaluation indicators. In addition, it is also important to demonstrate that, under the same evaluation index constraint, there is no LC with better performance than the FTC. The significance of the research is to provide theoretical support for improving the control performance of the FTC, and to establish a theoretical basis for selecting FTC parameters.

Keywords: finite-time control; non-smooth control; linear control; performance comparison; parameter selection

0 引言

有限时间控制器(finite-time controller, FTC)比线性控制器(linear controller, LC)多了状态的非整数幂参数,通过合理选定该参数,能获得更好的系统性

能.从纯理论角度而言,LC只能实现系统为渐近稳定,即被控状态收敛到平衡点的时间在理论上是趋于无穷的;而FTC能实现系统为有限时间稳定,即被控状态收敛到平衡点的时间是有限的.因此,理论上

收稿日期: 2023-04-03; 录用日期: 2023-10-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61903123); 江苏省自然科学基金项目(BK20190165); 常州市重点研发计划项目(CE20215022); 常州市科技支撑计划(工业)项目(CE20220046).

责任编辑: 王燕舞.

†通讯作者. E-mail: lichuan@hit.edu.cn.

*本文附带电子附录文件,可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

FTC具备更快的收敛速度.从实际应用情况来看,由于干扰等不确定因素的存在,被控状态只能被稳定在平衡点附近的邻域内,但FTC依然能表现出动态收敛更快、稳态精度更高等优点.正是由于这些优点,FTC在近20年来引起了人们广泛的关注和兴趣,并在众多控制领域中取得了大量的研究成果,如航天器控制^[1]、无人机控制^[2]、车辆控制^[3]、无人船控制^[4]、水下机器人^[5]等.

目前,关于FTC的研究成果主要集中于研究如何证明相关系统为有限时间稳定,却很少有文献深入地研究FTC控制参数范围与具体控制性能之间的严谨的数学关系,例如:FTC比LC收敛更快所对应的参数范围,FTC比LC耗能更小所对应的参数范围,FTC比LC抗干扰能力更强所对应的参数范围,等等.此外,在已有关于FTC研究成果中,虽然利用数字仿真或实物验证可体现FTC比LC具备更优的控制性能,但在验证过程中,往往仅是基于经验选取一组或几组能使FTC具备更优性能的控制参数.这难免引发思考和疑问,即对于LC,是否也存在合适的参数范围,使之具备比FTC更优的控制性能?如果不存在,能否在理论上进行证明?本文正是基于该疑问,提出并研究如下关于FTC控制参数与控制性能关系的3个问题.

问题1 针对给定的线性控制系统,如何设置有限时间控制参数,使得系统性能更优?反之,针对给定的有限时间控制,是否也存在性能更优的线性控制?如果用FTC替代已有系统里的LC方法,则目前需要解决的理论性问题是:如何选取FTC参数以获得更优的性能.这里面涉及到3个子问题.首先,需要设定一系列指标(或称约束条件)以评价系统性能是否更优,例如在最大控制量或能量消耗的约束下,系统收敛速度、稳态精度以及抗干扰能力是否能得到提升;其次,需要给出关键性能所对应的具体参数,以指明不同参数范围能提升或降低哪些性能;最后,必须从理论上验证用FTC优化LC是否具有可逆性,即如果LC同样具有性能更优的可能性,则不能说明FTC是一种性能更优的控制器.

问题2 相比于线性控制,有限时间控制是否只能改善系统在近平衡点处的控制性能?主流FTC中含有幂项 $|x|^p$, x 为系统状态, $p \in (0, 1)$ 为指数参数.由幂函数特性可知,当 $|x| < 1$ 时(状态靠近平衡点),幂项 $|x|^p$ 的值大于LC中的线性项 $|x|$.因此有些观念认为,相比于LC,FTC在近平衡点处能自发产生更大的控制输出,进而能提高系统收敛速度.一般情况下

该观点是正确的,但参照以上论述过程,反过来推论,当 $|x| > 1$ 时,由于 $|x|^p < |x|$,是否意味着在状态远离平衡点时FTC性能一定差于LC?

问题3 相比于线性控制,如果有限时间控制具有收敛更快、精度更高的优点,然而此优点是否意味着有限时间控制一定需要更大的控制量或消耗更多的能量?一种常见的观点认为,系统收敛快则对应控制量必然大或耗能必然多,否则不符合物理常识.该观点在某些情况下是正确的,但在不同的控制算法间进行比较时则不一定如此.优秀的控制算法应该可以做到在小控制量或少耗能前提下,还能进一步提升系统性能,那么相比于LC,FTC能否算作此类优秀的控制算法?

注1 目前,关于FTC系统性能与参数范围之间严谨数学关系的研究成果非常少,只有文献[6]取得了一些初步成果.本文研究方向与文献[6]有相似之处,但具体研究内容和结论则存在较大的不同,具体如下:1)两篇文章虽然都研究FTC收敛速度与控制参数之间的关系,但研究方法和角度不同.文献[6]证明在相同控制输入受限情况下FTC在任意时间的收敛速度都快于LC,所以FTC优于LC;而本文的思路是,针对给定的LC,证明必然存在相应的FTC参数范围,使得FTC收敛时间更短且控制输入更小.也可以说,文献[6]是在相同控制输入下直接对比两种控制器的速度,而本文是对两者的收敛时间进行对比并给出FTC时间更优且控制输入更小的参数范围.2)文献[6]假设干扰观测器能完全地观测干扰,所以在证明过程中没有进一步考虑干扰等不确定性;相比之下,本文在证明过程中考虑了干扰的存在,更符合实际情况,并给出了FTC具备更优的抗干扰能力及更小的控制输入所对应的参数范围.3)文献[6]主要考虑控制输入受限和收敛速度两项评价指标;而本文考虑了控制输入受限、收敛时间、能量消耗、期望精度与稳态误差等评价指标.4)本文在证明FTC存在合适的参数范围使得控制性能优于LC之外,亦证明了不存在相应的LC使其控制性能优于FTC.

1 预备知识及问题陈述

1.1 定义与引理

定义1(有限时间稳定定义^[7]) 考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), f(0) = 0, t_0 = 0, x_0 \triangleq x(0). \quad (1)$$

其中:状态 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为包含原点的定义域 U 到 n 维空间 \mathbf{R}^n 中的一个函数, $0 \in \mathbf{R}^n$ 为零向量.若 $x(t)$ 在有限时间内收敛到平衡点 $x(t) = 0$,则

称系统为有限时间稳定. 其数学描述为, 对于 $\forall x_0 \in U$, 系统解记为 $x(t, x_0)$, 且 $x_0 \neq 0$, 如存在一个函数 $T(x_0) : U \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ 满足当 $t \in [0, T(x_0)]$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0$, 且当 $t > T(x_0)$ 时, 有 $x(t, x_0) = 0$, 则称系统为有限时间稳定.

引理 1 对于任意属于 $(0, 1)$ 间的正实数 ϑ 和 p , 函数 $h(\vartheta) = 1 - \vartheta^{1-p} + (1-p)\ln \vartheta$ 的值恒小于 0.

引理 2 对于任意属于 $(0, 1)$ 间的正实数 ϑ 和 p , 函数 $l(\vartheta, p) = 2(1 - \vartheta^{1+p})(1 - \vartheta^{1-p}) - (1+p)(1-p)(1 - \vartheta^2)\ln \vartheta^{-1}$ 的值恒小于 0.

引理 3 对于任意属于 $(0, 1)$ 间的正实数 ϑ 和 p , 函数 $n(\vartheta) = 1 - \vartheta^{p-1} - (1-p)\ln \vartheta$ 的值恒小于 0.

1.2 控制系统的数学模型

本文研究的一阶系统模型^[6]如下:

$$\dot{x} = u + d. \tag{2}$$

其中: $x \in \mathbf{R}$ 为系统状态, $u \in \mathbf{R}$ 为待设计的控制器, $d \in \mathbf{R}$ 为未知的干扰且存在常数 \bar{d} 满足 $|d| \leq \bar{d}$. 针对该系统, 可设计 LC 和 FTC 分别为

$$\text{LC} : u_1 = -\alpha x, \tag{3}$$

$$\text{FTC} : u_2 = -\beta \text{sig}(x)^p. \tag{4}$$

其中: $\alpha > 0$ 为 LC 的增益系数, $\beta > 0$ 为 FTC 的增益系数, $p \in (0, 1)$, $\text{sig}(x) \triangleq \text{sign}(x)|x|^p$.

注 2 本文选择一阶系统作为控制对象的原因如下: 首先, 结构简单且最具基础性的一阶系统(2)最适合作为本类研究初级阶段的被控对象. 其次, 虽然二阶及高阶系统模型具有更广泛的应用范围, 但这类系统不存在最具代表性的控制器设计方法, 如文献[8]的表 1 和表 2 中列举的 11 种方法设计的 FTC 都是不同的, 这导致如何选择最具代表性控制器问题存在争议. 相比于二阶系统控制器的形式多种多样, 一阶系统的形式简单, 其最具代表性的 LC 和 FTC 控制器即为式(3)和(4)所示. 最后, 本文选择的一阶系统(2)不仅可作为本类研究的基础, 其本身作为典型被控对象已得到广泛研究, 如网络控制^[9]、多智能体控制^[10]、导弹制导律设计^[11]、滑模控制中趋近律设计^[12]、电机转速控制^[13]、电池储能控制系统^[14]、反步控制中虚拟控制律设计^[15]等系统稳定问题都与一阶系统(2)的控制问题密切相关, 因此, 本文选择的一阶系统具有一定的应用范围和研究价值.

2 不考虑干扰的性能对比与参数分析

当不考虑系统(2)中的干扰项 d 时, 式(4)的 FTC 才能保证状态 x 在有限时间内收敛到 0. 即从定义 1 的角度出发, 只有无扰动系统 $\dot{x} = u$ 才存在严格意义

上的有限时间稳定, 所以本节首先针对该标称系统进行研究.

将控制器(3)和(4)分别代入系统 $\dot{x} = u$ 中, 设初始时间 $t_0 = 0$, 可求系统解析解分别为

$$\text{LC} : x(t) = x_0 e^{-\alpha t}. \tag{5}$$

$$\text{FTC} : x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x)[|x_0|^{1-p} - \beta(1-p)t]^{1/(1-p)}, & t \leq T; \\ 0, & t > T. \end{cases} \tag{6}$$

其中: $x_0 \triangleq x(0)$, $T \triangleq |x_0|^{1-p}[\beta(1-p)]^{-1}$.

从上式可见, 虽然 LC 和 FTC 都能保证系统状态从 x_0 向 0 收敛, 但 LC 系统是渐近稳定的, 其从 $x \rightarrow 0$ 的收敛时间是无穷的; 而 FTC 系统是有限时间稳定, 其能保证状态 $x(t)$ 在时间 T 内收敛到 0. 因此, 如果以 $x(t) = 0$ 作为控制目标来比较两种控制方法的收敛速度或精度, 则 FTC 远优于 LC, 这显然对 LC 不太公平. 为了更充分且合理地对比两者收敛速度, 本文一方面考虑最大控制量或耗能的约束; 另一方面, 定义一个期望的稳态精度 x_d (或称控制目标), 其需满足 $x_d \neq 0$ 且 $|x_d| < |x_0|$, 再定义一个精度系数 $\theta = x_d/x_0 \in (0, 1)$, 由于两种控制方法在 $x_0 \rightarrow x_d$ 阶段收敛时间都是有限的, 在此阶段对比两者收敛速度更加公平且有意义.

注 3 本文把最大控制输入作为性能指标的意义在于: 首先, 其表示控制器瞬时付出的最大代价, 与能耗表示的累积时间付出的代价相对应; 其次, 优化参数的结果可用在需要避免或减少控制饱和现象的系统中; 最后, 研究结果可作为需要考虑控制饱和和现象系统中的性能分析的研究基础.

2.1 收敛速度、精度与最大控制输入

2.1.1 性能更优的有限时间控制器存在性研究

定理 1 考虑系统 $\dot{x} = u$, 对于任何一个给定的线性控制器(3), 必然存在一个有限时间控制器(4), 使系统收敛更快、精度更高且最大控制输入更小. 满足此性能的 FTC 参数 β 范围为 $\beta_T < \beta < \beta_u$. 其中: $\beta_T \triangleq \alpha(1 - \theta^{1-p})|x_0|^{1-p}[(p-1)\ln \theta]^{-1}$ 表示 FTC 收敛速度不慢于 LC 的最小增益参数, $\beta_u \triangleq \alpha|x_0|^{1-p}$ 表示 FTC 的最大控制量不大于 LC 的最大增益参数.

证明 由式(5)和(6)可计算两类控制系统从 x_0 单向收敛到 x_d 的时间分别为

$$\text{LC} : t_1 = \alpha^{-1} \ln |x_0| - \alpha^{-1} \ln |x_d|, \tag{7}$$

$$\text{FTC} : t_2 = \beta^{-1}(1-p)^{-1}(|x_0|^{1-p} - |x_d|^{1-p}). \quad (8)$$

只有当 β 满足 $\beta > \beta_T$ 时,才存在 $t_2 < t_1$,所以 β_T 为FTC收敛速度不慢于LC的最小增益参数.

对于控制器(3)和(4),因为状态是单向收敛的,其初始时刻的控制量即为最大控制量,所以LC的最大控制幅值为 $|u_{1,t=0}| = \alpha|x_0|$,FTC的最大控制幅值为 $|u_{2,t=0}| = \beta|x_0|^p$.只有当 β 满足 $\beta < \beta_u$ 时,才存在 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$,所以 β_u 为FTC的最大控制量不大于LC的最大增益参数.

下面研究 $\beta_T < \beta_u$ 是否成立. $\beta_T < \beta_u$ 等效于 $h(\theta) \triangleq 1 - \theta^{1-p} + (1-p)\ln\theta < 0$.由引理1可知,因为 $\theta \in (0,1)$ 且 $p \in (0,1)$,所以 $h(\theta) < 0$ 恒成立,即 $\beta_T < \beta_u$ 恒成立.

由以上分析可知,可通过选取FTC的增益参数 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_u$,使得FTC收敛更快且最大控制输出幅值更小.此外,在时间 t_2 时刻,FTC系统已收敛到 x_d 并将继续向0方向收敛,当时间进行到 t_1 时,LC系统才收敛到 x_d ,而此时FTC系统状态已更接近0点,这表明FTC系统具有更高的收敛精度.所以, β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_u$ 时,还使得FTC收敛精度更高且最大控制输出幅值更小.□

2.1.2 性能更优的线性控制器存在性研究

定理2 考虑系统 $\dot{x} = u$,对于任何一个给定的有限时间控制器(4),必然不存在一个线性控制器(3)使系统收敛更快且最大控制输入更小.

证明 与定理1证明类似,根据两类控制系统收敛时间表达式(7)和(8)可计算得,当LC增益 α 满足 $\alpha > \alpha_T$ 时,才有 $t_1 < t_2$,其中

$$\alpha_T \triangleq \beta(p-1)\ln\theta(1-\theta^{1-p})^{-1}|x_0|^{p-1},$$

其表示LC收敛速度不慢于FTC的最小增益参数.根据 $|u_{1,t=0}| = \alpha|x_0|$ 和 $|u_{2,t=0}| = \beta|x_0|^p$ 可知,当LC增益 α 满足 $\alpha < \alpha_u = \beta|x_0|^{p-1}$ 时,才有 $|u_{1,t=0}| < |u_{2,t=0}|$,其中 α_u 表示LC的最大控制量不大于FTC的最大增益参数.

由以上分析可知,只有当LC的增益 α 满足约束条件 $\alpha_T < \alpha < \alpha_u$ 时,才有 $t_1 < t_2$ 且 $|u_{1,t=0}| < |u_{2,t=0}|$.该约束条件成立的前提为 $\alpha_T < \alpha_u$,下面验证 $\alpha_T < \alpha_u$ 是否成立.充分条件 $\alpha_T < \alpha_u$ 等效于 $h(\theta) = 1 - \theta^{1-p} + (1-p)\ln\theta > 0$.但由引理1可知,函数 $h(\theta)$ 在 $\theta \in (0,1)$ 和 $p \in (0,1)$ 上不可能大于0,因此 $\alpha_T < \alpha_u$ 不成立,即不存在合适的LC使系统收敛更快且最大控制输入更小.□

2.2 收敛速度、精度与能量消耗

本节研究是否存在一种控制方法比另一种方法收敛速度快、精度高且消耗的能量更小.选用公式

$$E = \int_0^t u(t)^2 dt$$

作为能量消耗的指标^[16],此公式在最优控制等领域最常用于表征能量指标.针对具体系统和控制任务,基于本节提供的分析思路和技术方法,也可选用其他性能指标或目标函数对控制器性能进行比较分析或对控制器参数进行优化.

2.2.1 性能更优的有限时间控制器存在性研究

定理3 考虑系统 $\dot{x} = u$,对于任何一个给定的线性控制器(3),必然存在一个有限时间控制器(4),使系统收敛更快、精度更高且耗能更少.满足此性能的FTC参数 β 取值范围为 $\beta_T < \beta < \beta_E$.其中:

$$\beta_E \triangleq 0.5\alpha(1-\theta^2)(1+p)|x_0|^{1-p}(1-\theta^{1+p})^{-1},$$

表示FTC耗能不多于LC的最大增益参数; β_T 的表达式如定理1中所示,表示FTC收敛速度不慢于LC的最小增益参数.

证明 定理1已证明只有当FTC的增益 β 满足 $\beta > \beta_T$ 时,才有 $t_2 < t_1$,下面分别计算两种控制器的能量消耗.LC随时间消耗的能量为

$$E_1 = \int_0^t u_1(x(t))^2 dt = \int_0^t \alpha^2 x_0^2 e^{-2\alpha t} dt = 0.5\alpha x_0^2 - 0.5\alpha x_0^2 e^{-2\alpha t}.$$

进一步,可计算LC从 x_0 收敛到 x_d 消耗的能量为

$$E_1 = 0.5\alpha x_0^2 - 0.5\alpha x_d^2. \quad (9)$$

FTC随时间消耗的能量为

$$E_2 = \int_0^t u_2(x(t))^2 dt = \int_0^t \beta^2 x^{2p}(t) dt = \begin{cases} \frac{\beta}{1+p}|x_0|^{1+p} - \frac{\beta}{1+p}[|x_0|^{1-p} - \beta(1-p)t]^{\frac{1+p}{1-p}}, \\ t \leq \frac{|x_0|^{1-p}}{\beta(1-p)}; \\ \frac{\beta}{1+p}|x_0|^{1+p}, t > \frac{|x_0|^{1-p}}{\beta(1-p)}. \end{cases}$$

进一步,可计算FTC从 x_0 收敛到 x_d 消耗的能量为

$$E_2 = \beta(1+p)^{-1}|x_0|^{1+p} - \beta(1+p)^{-1}|x_d|^{1+p}. \quad (10)$$

由式(9)和(10)可知,只有当 $\beta < \beta_E$ 时,才有 $E_2 < E_1$.

下面研究 $\beta_T < \beta_E$ 是否成立. $\beta_T < \beta_E$ 等效于

$$l(\theta) \triangleq 2(1-\theta^{1+p})(1-\theta^{1-p}) - (1+p)(1-p)(1-\theta^2)\ln\theta^{-1} < 0.$$

由引理2可知,函数 $l(\theta)$ 在 $\theta \in (0,1)$ 和 $p \in (0,1)$ 上恒小于0,所以 $\beta_T < \beta_E$ 也成立.

综合以上分析可知, 可通过选取 FTC 的参数 β , 使其满足约束条件 $\beta_T < \beta < \beta_E$, 则有 $t_2 < t_1$, 且 $E_2 < E_1$, 即 FTC 的收敛速度比 LC 快且耗能更少. 此外, 因为 FTC 用更少的时间收敛到与 LC 相同的 x_d , 这也说明在相同的收敛时间内 FTC 系统能收敛到一个更小的 x_d , 即只要增益 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_E$, 则 FTC 的精度更好且耗能更少. \square

2.2.2 性能更优的线性控制器存在性研究

定理 4 考虑系统 $\dot{x} = u$, 对于任何一个给定的有限时间控制器 (4), 必然不存在一个线性控制器 (3) 使系统收敛时间更快且耗能更少.

证明 定理 2 的证明中已说明当 LC 增益 α 满足 $\alpha > \alpha_T$ 时, 才有 $t_1 < t_2$; 且只有当 LC 增益 α 满足 $\alpha < \alpha_E$ 时, 才有 $E_1 < E_2$, 其中

$$\alpha_E = 2\beta(1 - \theta^{1+p})(1 + p)^{-1}(1 - \theta^2)^{-1}|x_0|^{p-1},$$

α_E 的物理意义为 LC 耗能不多于 FTC 的最大增益参数.

由以上分析可知, 只有当 LC 的增益 α 满足约束条件 $\alpha_T < \alpha < \alpha_E$ 时, 才有 $t_1 < t_2$ 且 $E_1 < E_2$. 该约束条件成立的前提为 $\alpha_T < \alpha_E$, 下面验证 $\alpha_T < \alpha_E$ 是否成立. 充分条件 $\alpha_T < \alpha_E$ 等效于 $l(\theta) > 0$, 其中函数 $l(\theta)$ 的表达式已在定理 3 的证明中给出. 但由引理 2 可知, 函数 $l(\theta)$ 在 $\theta \in (0, 1)$ 和 $p \in (0, 1)$ 上不可能大于 0, 因此 $\alpha_T < \alpha_E$ 不成立, 即不存在合适的 LC 使系统收敛更快且耗能更少. \square

3 考虑干扰情况下的性能对比与参数分析

3.1 抗干扰能力: 稳态误差与最大控制输入

受干扰影响, 系统 $\dot{x} = u + d$ 的状态在 LC 和 FTC 作用下不会如标称系统一直向 0 收敛, 而是收敛并进入 0 附近的某个邻域内, 且之后一直保持在该邻域内. 一般称该邻域的最小范围为系统的稳态误差, 下面先计算系统的稳态误差.

LC 驱动下的一阶受扰动系统为

$$\dot{x} = u_1 + d = -\alpha x + d. \quad (11)$$

定义包含原点的集合 $D_1 \triangleq \{x : |x| < \bar{d}/\alpha\}$, 由式 (11) 可知, 如果 x 在 D_1 外, 则 \dot{x} 与 x 符号相反, 这表明 x 能收敛到 D_1 内.

FTC 驱动下的一阶受扰动系统为

$$\dot{x} = u_2 + d = -\beta \text{sig}(x)^p + d. \quad (12)$$

定义包含原点的集合 $D_2 \triangleq \{x : |x| < (\bar{d}/\beta)^{1/p}\}$, 由式 (12) 可知, 如果 x 在 D_2 外, 则 \dot{x} 与 x 符号相反, 这表

明 x 能收敛到 D_2 内.

为了公平对稳态误差进行对比, 本节后续研究中, 不妨设两个系统的初值 x_0 相同且都在集合 D_1 和 D_2 外, 这样两个系统都从相同的 x_0 收敛到各自的稳态误差内.

3.1.1 性能更优的有限时间控制器存在性研究

定理 5 考虑受扰动系统 $\dot{x} = u + d$, 对于任何一个给定的线性控制器 (3), 必然存在一个有限时间控制器 (4), 使系统稳态误差更小且最大控制输入也更小. 满足此性能的 FTC 增益参数 β 的选值范围为 $\beta_D < \beta < \beta_u$. 其中: $\beta_D \triangleq \alpha^p \bar{d}^{1-p}$ 表示 FTC 稳态误差不大于 LC 的最小增益参数; $\beta_u \triangleq \alpha|x_0|^{1-p}$ 与前文中一致, 也表示 FTC 的最大控制量不大于 LC 的最大增益参数.

证明 根据 D_1 和 D_2 表达式可知, 只有当 FTC 增益参数满足 $\beta > \beta_D$ 时, 才有 $D_2 \subset D_1$, 即 FTC 的稳态误差更小. 又由定理 1 可知, 只有 β 满足约束 $\beta < \beta_u$ 时, 才有 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. 下面研究 $\beta_D < \beta_u$ 是否成立. $\beta_D < \beta_u$ 等效于 $\bar{d} < \alpha|x_0|$. 因为本节研究的是状态从初值收敛到稳态误差内的过程, 所以存在 $x_0 \notin D_1$, 故 $\bar{d} < \alpha|x_0|$ 成立, 即 $\beta_D < \beta_u$ 成立. 综合以上分析, 可通过选取合适的 FTC 的增益参数 β , 使其满足 $\beta_D < \beta < \beta_u$, 则有 FTC 稳态误差比 LC 更小, 且最大控制输入也比 LC 更小. \square

3.1.2 性能更优的线性控制器存在性研究

定理 6 考虑受扰动系统 $\dot{x} = u + d$, 对于任何一个给定的有限时间控制器 (4), 必然不存在一个线性控制器 (3), 使系统稳态误差更小且最大控制输入也更小.

证明 只有当 LC 增益参数满足 $\alpha > \alpha_D$ 时, 才有 $D_1 \subset D_2$, 即 LC 的稳态误差更小, 其中 $\alpha_D \triangleq (\bar{d}^{p-1}\beta)^{1/p}$ 表示 LC 稳态误差不大于 FTC 的最小增益参数. 又由定理 2 可知, 只有 $\alpha < \alpha_u$ 时, 才有 $|u_{1,t=0}| < |u_{2,t=0}|$, 其中 $\alpha_u \triangleq \beta|x_0|^{p-1}$ 与定理 2 中一致, 表示 LC 的最大控制量不大于 FTC 的最大增益参数. 由以上分析可知, 只有当 LC 的增益 α 满足约束条件 $\alpha_D < \alpha < \alpha_u$ 时, 才有 $D_1 \subset D_2$ 且 $|u_{1,t=0}| < |u_{2,t=0}|$. 该约束条件成立的前提为 $\alpha_D < \alpha_u$, 下面验证 $\alpha_D < \alpha_u$ 是否成立. 充分条件 $\alpha_D < \alpha_u$ 等效于 $|x_0| < (\bar{d}/\beta)^{1/p}$. 因为系统初值 x_0 在集合 D_2 外, 所以 $|x_0| < (\bar{d}/\beta)^{1/p}$ 不成立, 即充分条件 $\alpha_D < \alpha_u$ 不成立, 即不存在合适的 α 满足 $\alpha_D < \alpha < \alpha_u$, 所以不存在合适的 LC 使系

统的稳态误差更小且最大控制量也更小. □

3.2 抗干扰能力: 收敛速度与最大控制输入

本节研究是否存在一种控制方法比另一种方法收敛速度快且需最大控制量更小. 为更公平且方便地对收敛速度进行对比, 这里定义一个期望精度 x_d , 其需满足 $|x_d| < |x_0|$ 且 $x_d \notin D_3$, 其中 $D_3 = D_1 \cup D_2$. 因为 x_0 和 x_d 都在集合 D_3 外, 所以式(11)和(12)的右边与 \dot{x} 符号相反, 即两个系统会从相同的 x_0 收敛到相同的 x_d , 这样通过对比各自 $x_0 \rightarrow x_d$ 阶段所用的时间, 便可对比出收敛的快慢.

3.2.1 性能更优的有限时间控制器存在性研究

定理7 考虑受扰动系统 $\dot{x} = u + d$, 对于任何一个给定的线性控制器(3), 必然存在一个有限时间控制器(4), 使系统收敛更快且最大控制输入更小. 满足此性能的FTC增益参数 β 的选值范围为 $\beta_t < \beta < \beta_u$. 其中

$$\beta_t \triangleq \frac{(\alpha - \bar{d}|x_d|^{-1})(1 - \theta^{1-p})|x_d|^{1-p}}{\theta^{1-p}(1-p)\ln\theta^{-1}} + \bar{d}|x_d|^{-p}, \quad (13)$$

β_t 表示FTC收敛速度不慢于LC的最小增益参数; $\beta_u \triangleq \alpha|x_0|^{1-p}$ 和 $\theta \triangleq |x_d|/|x_0|$ 与定理1中一致, 分别表示FTC最大控制量不大于LC的最大增益参数和精度系数.

证明 首先计算LC系统的收敛时间. 定义 $\vartheta_1 = 1 - \bar{d}|x_d|^{-1}/\alpha$, 将其代入式(11), 可得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\vartheta_1x - \alpha(1 - \vartheta_1)x + d = \\ &= -\alpha\vartheta_1x - x\bar{d}|x_d|^{-1} + d. \end{aligned} \quad (14)$$

因为 $x_d \notin D_3$, 则有 $|x_d| > \bar{d}/\alpha$, 所以常数 $\vartheta_1 > 0$. 又因为收敛时间研究的是状态未到达 x_d 的过程, 所以这期间都有 $|x| > |x_d|$, 则式(14)右边项 $-x\bar{d}|x_d|^{-1} + d$ 与 \dot{x} 符号相反, 这表明该项起到加速系统收敛的作用. 因此, 系统(14)从 x_0 到 x_d 的收敛时间为

$$t_1 = \vartheta_1^{-1}\alpha^{-1}\ln|x_0| - \vartheta_1^{-1}\alpha^{-1}\ln|x_d|. \quad (15)$$

然后计算FTC系统的收敛时间. 定义 $\vartheta_2 = 1 - \bar{d}|x_d|^{-p}/\beta$, 将其代入式(12), 可得

$$\dot{x} = -\beta\vartheta_2\text{sig}(x)^p - \bar{d}|x_d|^{-p}\text{sig}(x)^p + d. \quad (16)$$

因为 $x_d \notin D_3$, 则有 $|x_d| > (\bar{d}/\beta)^{1/p}$, 所以常数 $\vartheta_2 > 0$. 又因为从 x_0 到 x_d 过程中都有 $|x| > |x_d|$, 则式(16)右边项 $-\bar{d}|x_d|^{-p}\text{sig}(x)^p + d$ 也与 \dot{x} 符号相反, 这表明该项起到加速系统收敛的作用. 因此, 系统(16)从 x_0 到 x_d 的收敛时间为

$$t_2 = \vartheta_2^{-1}\beta^{-1}(1-p)^{-1}(|x_0|^{1-p} - |x_d|^{1-p}). \quad (17)$$

因为 $|x| > |x_d|$, 且 $p \in (0, 1)$, 所以系统(14)右边的加速收敛项的作用大于系统(16)右边的加速收敛项. 由式(15)和(17)可知, 只有当 β 满足约束 $\beta > \beta_t$ 时, 才有 $t_2 < t_1$, 其中 β_t 的表达式已在式(13)中给出. 此外, 在前文中已计算过, 只有当FTC的增益参数 β 满足约束 $\beta < \beta_u$ 时, 才有 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. 因此, 如果参数 β 在 $\beta_t < \beta < \beta_u$ 区间选值, 则有 $t_2 < t_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$, 即FTC性能更优. 但 $\beta_t < \beta < \beta_u$ 成立的前提为 $\beta_t < \beta_u$ 需成立.

下面研究 $\beta_t < \beta_u$ 是否成立. $\beta_t < \beta_u$ 等效于

$$m(\theta) \triangleq (\vartheta_1/\vartheta_2)(1 - \theta^{1-p}) + (1-p)\ln\theta < 0. \quad (18)$$

将 $m(\theta)$ 对 θ 求一阶导数, 有

$$\frac{dm(\theta)}{d\theta} = (1-p)\theta^{-1}[1 - (\vartheta_1/\vartheta_2)\theta^{1-p}],$$

如果 $\vartheta_1/\vartheta_2 < 1$ 成立, 则 $dm(\theta)/d\theta > 0$, 结合 $m(1) = 0$, 则式(18)恒成立. 下面证明 $\vartheta_1/\vartheta_2 < 1$ 恒成立. $\vartheta_1/\vartheta_2 < 1$ 等于

$$1 - \bar{d}|x_d|^{-1}\alpha^{-1}/(1 - \bar{d}|x_d|^{-p}\beta^{-1}) < 1,$$

化简得 $\alpha|x_d|^{1-p} < \beta$. 已知 $\beta > \beta_t$, 只需证明 $\beta_t > \alpha|x_d|^{1-p}$, 即有 $\alpha|x_d|^{1-p} < \beta$. $\beta_t > \alpha|x_d|^{1-p}$ 等效于

$$n(\theta) = 1 - \theta^{p-1} - (1-p)\ln\theta < 0.$$

由引理3可知 $n(\theta) < 0$ 恒成立, 即 $\beta_t > \alpha|x_d|^{1-p}$ 恒成立. 由 $\beta > \beta_t$ 可知 $\beta > \alpha|x_d|^{1-p}$ 恒成立, 即 $\vartheta_1/\vartheta_2 < 1$ 恒成立, 因此 $m(\theta) < 0$ 成立, 即充分条件 $\beta_t < \beta_u$ 成立. 所以, 选取 $\beta \in (\beta_t, \beta_u)$, 使得FTC收敛速度比LC快, 且最大控制输入也比LC更小. □

3.2.2 性能更优的线性控制器存在性研究

定理8 考虑受扰动系统 $\dot{x} = u + d$, 对于任何一个给定的有限时间控制器(4), 必然不存在一个线性控制器(3), 使系统收敛更快且最大控制输入更小.

证明 由式(15)和(17)可知, 只有当LC的增益 α 满足约束 $\alpha > \alpha_t$ 时, 才有 $t_1 < t_2$, 其中 α_t 的表达式为

$$\alpha_t = \beta(1-p)\ln\theta^{-1}/[(\vartheta_1/\vartheta_2)|x_0|^{1-p}(1 - \theta^{1-p})],$$

α_t 表示LC收敛速度不慢于FTC的最小增益参数. 此外, 由定理2或定理6的证明可知, 只有当 α 满足约束 $\alpha < \alpha_u$ 时, 才有 $|u_{1,t=0}| < |u_{2,t=0}|$, 其中 $\alpha_u \triangleq \beta|x_0|^{p-1}$ 与前文定义一致, 表示LC最大控制量幅值不大于FTC的最大增益参数.

由以上分析可知, 只有当LC的增益 α 满足约束条件 $\alpha_t < \alpha < \alpha_u$ 时, 才有 $t_1 < t_2$ 且 $|u_{1,t=0}| < |u_{2,t=0}|$. $\alpha_t < \alpha < \alpha_u$ 成立的前提条件为 $\alpha_t < \alpha_u$, 否则不存在满足条件的 α . $\alpha_t < \alpha_u$ 等效于 $m(\theta) > 0$,

其中 $m(\theta)$ 定义已给出, 且由前文分析可知, $m(\theta) > 0$ 在研究范畴内恒不成立, 所以 $\alpha_t < \alpha < \alpha_u$ 不成立, 即不存在合适的 LC 的增益 α 使其收敛时间更快且最大控制输入更小. \square

4 性能对比与参数分析的综合与总结

本节对前文进行总结, 给出更简明的结论.

4.1 不考虑干扰情况下的综合与总结

本节将第 3 节的 4 个定理综合成一个定理, 将 3 个阈值参数化简成两个. 给出如下定理.

定理 9 考虑系统 $\dot{x} = u$, 对于任何给定的线性控制器 (3), 必然存在参数 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_E$ 的有限时间控制器 (4), 使系统收敛更快、精度更高、耗能更少且最大控制输入更小. 反之, 对于任意给定的 FTC, 必然不存在 LC 能提高以上系统性能.

证明 由定理 1 及其证明可知, 如果 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_u$, 则 $t_2 < t_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. 由定理 3 及其证明可知, 如果 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_E$, 则 $t_2 < t_1$ 且 $E_2 < E_1$. 因此, 下面只需证明 $\beta_E < \beta_u$, 则有 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_u$ 时, $t_2 < t_1$ 、 $E_2 < E_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. $\beta_E < \beta_u$ 等效于

$$k(\theta) \triangleq 1 + p - \theta^2 - \theta p - 2 + 2\theta^{1+p} < 0.$$

根据 θ 和 p 的取值范围不难计算出 $k(\theta) < 0$ 恒成立. 因此 $\beta_E < \beta_u$ 恒成立, 只要 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_E$ 时, 即有 $t_2 < t_1$ 、 $E_2 < E_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. 同理, 由定理 2 和定理 4 可知, 不存在 LC 使系统控制性能更好. \square

注 4 可用图 1 解释定理 1~定理 4 以及定理 9 的主要内容.

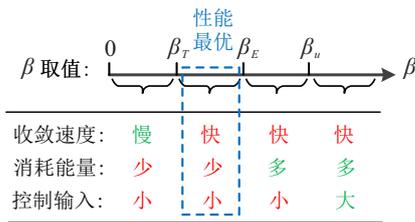


图 1 无干扰时, 相比于 LC, FTC 参数 β 对系统性能的影响

对于任何给定的 LC, 如果系统初值 x_0 和期望精度 x_d 已知, 即可计算 FTC 的 3 个性能参数 β_T 、 β_E 和 β_u 且满足 $\beta_T < \beta_E < \beta_u$, 则不考虑干扰时, 状态从 x_0 收敛到 x_d 期间, 相比于 LC, FTC 的参数 β 对系统性能影响如图 1 所示. 当 $\beta \in (0, \beta_T)$ 时, FTC 收敛较慢, 但消耗能量更少且控制输入更小; 当 $\beta \in (\beta_T, \beta_E)$ 时, FTC 收敛快、耗能少且控制输入小; 当 $\beta \in (\beta_E, \beta_u)$ 时, FTC 收敛快、控制输入小但耗能更多; 当 $\beta > \beta_u$ 时, FTC 收敛快、但耗能更多且控制输入更大. 因

此, 可通过设置 $\beta \in (\beta_T, \beta_E)$ 使得 FTC 具有最优的性能.

4.2 考虑干扰情况下的综合与总结

定理 10 考虑受扰动系统 $\dot{x} = u + d$, 对于任何一个给定的线性控制器 (3), 必然存在一个参数 β 满足 $\beta_T < \beta < \beta_u$ 的有限时间控制器 (4), 使系统收敛更快、稳态误差更小且最大控制输入也 smaller. 反之, 对于任何一个给定的有限时间控制器 (4), 必然不存在线性控制器 (3) 能提高以上系统性能.

证明 由定理 5 及其证明可知, 如果 β 满足 $\beta_t < \beta < \beta_u$, 则 $t_2 < t_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. 由定理 7 及其证明可知, 如果 β 满足 $\beta_D < \beta < \beta_u$, 则 $D_2 \subset D_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. 下面只需要证明 $\beta_D < \beta_t$, 则当 β 满足 $\beta_t < \beta < \beta_u$ 时, 有 $t_2 < t_1$ 、 $D_2 \subset D_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. $\beta_D < \beta_t$ 等效于

$$\frac{[(\bar{d}\alpha^{-1}|x_d|^{-1})^{-1} - 1] (\theta^{p-1} - 1)}{[(\bar{d}\alpha^{-1}|x_d|^{-1})^{-p} - 1] (1 - p) \ln \theta^{-1}} > 1. \quad (19)$$

已知 x_d 在集合 D_1 外, 故有 $(\bar{d}|x_d|^{-1}\alpha^{-1})^{-1} > 1$, 所以式 (19) 左边第 1 项满足

$$[(\bar{d}\alpha^{-1}|x_d|^{-1})^{-1} - 1] / [(\bar{d}\alpha^{-1}|x_d|^{-1})^{-p} - 1] > 1. \quad (20)$$

如果式 (19) 左边第 2 项满足

$$(\theta^{p-1} - 1) / [(1 - p) \ln \theta^{-1}] > 1, \quad (21)$$

则式 (19) 必然成立. 下面证明式 (21) 恒成立. 对其化简得

$$n(\theta) \triangleq 1 - \theta^{p-1} - (1 - p) \ln \theta < 0,$$

由引理 3 可知 $n(\theta) < 0$ 恒成立, 所以式 (21) 成立. 结合式 (20) 有式 (19) 成立. 因此 $\beta_D < \beta_t$ 恒成立, 则有 β 满足 $\beta_t < \beta < \beta_u$ 时, $t_2 < t_1$ 、 $D_2 \subset D_1$ 且 $|u_{2,t=0}| < |u_{1,t=0}|$. 由定理 6 和定理 8 可知, 不存在 LC 使系统控制性能更好. \square

注 5 可用图 2 解释定理 5~定理 8 以及定理 10 的主要内容.

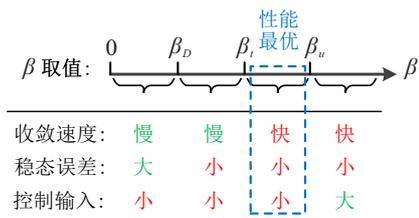


图 2 有干扰时, 相比于 LC, FTC 参数 β 对系统性能的影响

对于任何给定的 LC, 当考虑干扰时, 如果系统初值 x_0 、期望精度 x_d 以及干扰上界 \bar{d} 已知, 即可计

算FTC的3个性能参数 β_D 、 β_t 和 β_u 且满足 $\beta_D < \beta_t < \beta_u$,则与LC相比,考虑干扰且状态从 x_0 收敛到 x_d 期间,FTC参数 β 对系统性能影响如图2所示.当 $\beta \in (0, \beta_D)$ 时,FTC收敛较慢、稳态误差较大,但控制输入更小;当 $\beta \in (\beta_D, \beta_t)$ 时,FTC收敛慢,但稳态误差小且控制输入小;当 $\beta \in (\beta_t, \beta_u)$ 时,FTC收敛快、稳态误差小且控制输入小;当 $\beta > \beta_u$ 时,FTC收敛快、稳态误差小但控制输入更大.因此,可通过设置 $\beta \in (\beta_t, \beta_u)$ 使得FTC具有最优的性能.

4.3 性能分析总结

深入分析定理9和定理10,结合引言中提出的研究问题2和问题3,基于本文研究的被控系统与控制方法,以下两个关于FTC的误解或许应该重新认识.

误解1(对应引言中的问题2) 相比于LC,FTC仅仅只能改善系统在近平衡点处的控制性能.传统观念认为:当 $|x| < 1$ 时,FTC中的幂项 $|x|^p$ 大于LC中的线性项 $|x|$,所以FTC能产生更大的控制量,进而获得更快的收敛速度;而当 $|x| > 1$ 时,FTC收敛速度会慢于LC.该观念比较笼统,缺少前提或约束条件,因此有些不全面或不严谨.从定理1~定理10的分析可见,本文并没有对 $|x|$ 是否大于1进行分类,无论 x_0 、 x_d 、 D_3 大于1还是小于1(即无论是在近或远平衡点处),FTC都具有更好的性能.因此,相比于LC,FTC能全局提高系统的控制性能.

误解2(对应引言中的问题3) 相比于LC,FTC虽然收敛更快,但需要更大的控制量或消耗更多的能量.一种常识性观点认为,收敛快的系统所需的控制量或消耗的能量应该更多.对于单独且简单的控制系统而言,这种说法或许是对的,例如对于LC系统 $\dot{x} = u_1 = -\alpha x$,只有增大 α 时才能加快收敛速度,增大 α 取值必然也会增大控制量和能量消耗.但对于复杂些的系统或者不同的控制系统,这种说法可能不再成立.例如本文研究的两个控制系统,FTC能实现收敛更快,且控制量更小或耗能更少.再如,在近平衡点处,虽然FTC中幂项 $|x|^p$ 大于LC中的线性项 $|x|$,但通过设置合适的 β 值(见图1或图2),就可以做到FTC收敛更快,且控制量更小或耗能更少.这并不与常理矛盾,这也恰恰说明FTC是一种性能优越的控制算法.

总结定理1~定理10,概括本文主要成果如下:

定理11 考虑系统 $\dot{x} = u + d$,对于任何一个给定的线性控制器(3),必然存在有限时间控制器(4),使系统性能得以全局优化.当干扰 d 可以忽略时,可设置有限时间控制器增益参数满足 $\beta \in (\beta_T, \beta_E)$,使系统收敛更快、精度更高、耗能更少、最大控制输入也

更小;当干扰 d 不可忽略时,可设置有限时间控制器增益参数满足 $\beta \in (\beta_t, \beta_u)$,使系统的稳态误差更小、收敛更快、最大控制输入也依然更小.反之,对于任何一个给定的FTC,必然不存在LC能提高以上控制性能.

详细证明可参见定理1~定理10及其证明过程.

5 仿真分析

本节根据是否考虑干扰情况,对前文结论进行仿真实验.当干扰可忽略不计,不妨设LC中 $\alpha = 1$,FTC中 $p = 0.7$,状态初始 $x_0 = 100$,期望精度 $x_d = 5$.根据前文 β_T 和 β_E 表达式可计算 $\beta_T = 2.626$ 及 $\beta_E = 3.396$.由图1可知,只需 β 在 $(2.626, 3.396)$ 间取值,便可获得最优的控制性能,不妨设 $\beta = 3$.仿真结果如图3和图4所示.

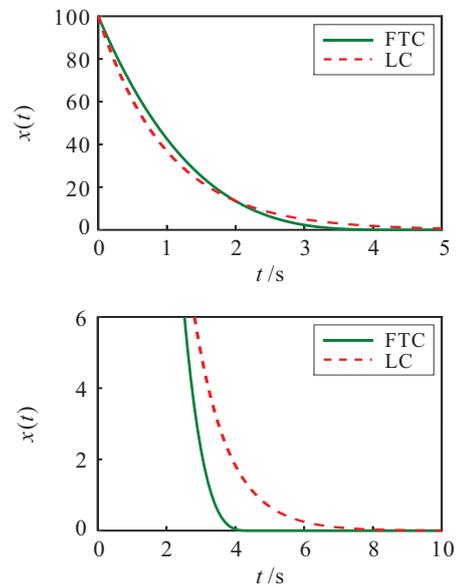


图3 不考虑干扰时,状态 $x(t)$ 及其局部放大图

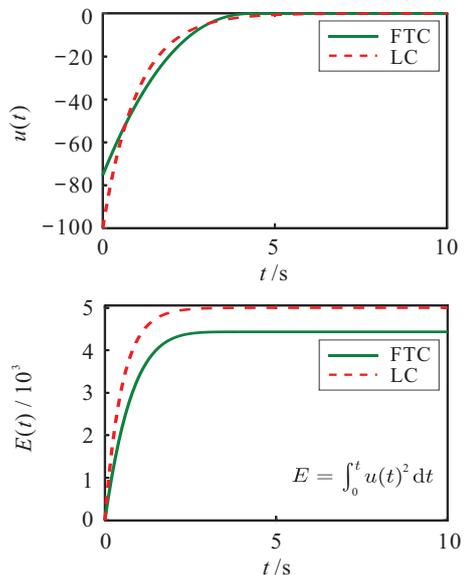


图4 不考虑干扰时,控制输入 $u(t)$ 和能量函数 $E(t)$

从图3可见,虽然FTC系统的 $x(t)$ 在开始时收敛较慢,但在2.1s后其收敛快于LC系统的 $x(t)$,最先到达期望精度 $x_d = 5$,且在到达期望精度后,其收敛速度和精度依然好于LC系统.

从图4可见,FTC的最大控制输入75小于LC的最大控制输入100.经过3s后,两个控制系统所消耗的能量基本稳定,可见FTC系统消耗的能量约为4400,少于LC系统消耗的5000.因此,在远平衡点且不考虑干扰情况下,FTC的性能优于LC.

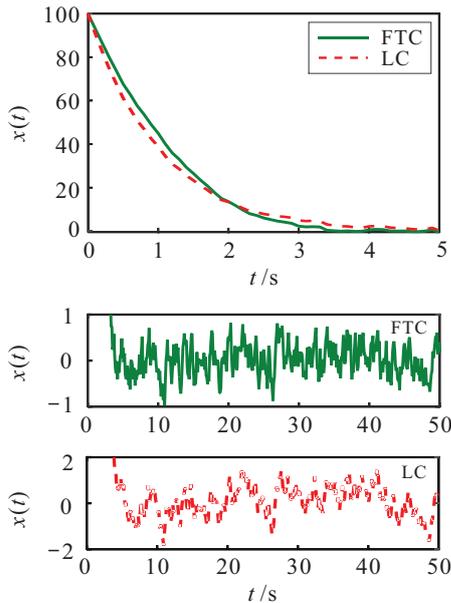


图5 考虑干扰时,状态 $x(t)$ 及其局部放大图

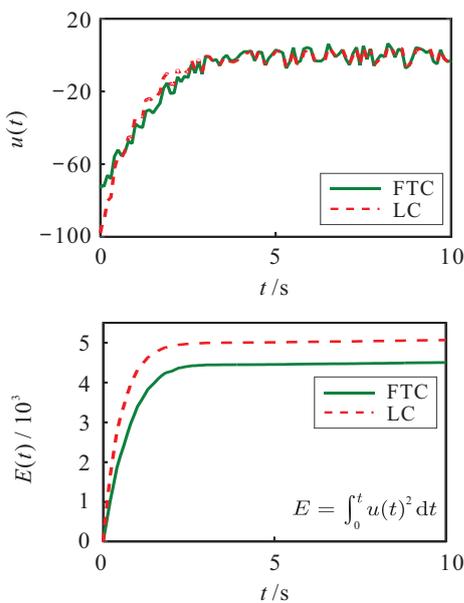


图6 考虑干扰时,控制输入 $u(t)$ 和能量函数 $E(t)$

在以上系统中进一步考虑干扰,不妨假设干扰为 $[-5, 5]$ 间频率为10 Hz的随机数,则有 $\bar{d} = 5$.由 β_t 和 β_u 表达式可计算 $\beta_t = 1.612$ 和 $\beta_u = 3.981$.由图2可知,只需 β 在 $(1.612, 3.981)$ 间取值,便可获得最优控

制性能,不妨也设 $\beta = 3$.从图5可见,FTC系统的 $x(t)$ 最先到达期望精度 $x_d = 5$,其稳态精度约为0.8,小于LC系统的稳态精度1.6.从图6可见,FTC的最大控制输入为75,小于LC的最大控制输入100,FTC系统消耗的能量约为4500,少于LC系统所消耗的5000.因此,在远平衡点且考虑干扰情况下,FTC的性能也明显优于LC.

6 结论

本文对FTC与LC的一阶系统性能进行对比,从理论上证明了FTC性能全局优于LC,也为FTC替换LC时如何选取参数提供了理论依据.针对现有LC控制系统,可基于图1和图2中的参数范围选定FTC并获得对应的控制性能提升,因此,本文研究结果亦可视为用FTC优化LC的一种方法.然而,如注2所言,FTC驱动的二阶和高阶系统不能计算其解析解,且针对二阶系统设计的方法多达十几种,因此,针对二阶和高阶系统,如何研究FTC控制性能与参数的关系,以及考虑控制饱和及控制死区等现象存在时如何优化FTC参数,将是本研究后续的一个非常具有挑战性的研究方向.

参考文献(References)

[1] 曹腾, 龚华军, 薛艺璇, 等. 基于学习观测器的航天器指定时间跟踪控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 519-526.
(Cao T, Gong H J, Xue Y X, et al. Predefined-time tracking control of spacecraft based on learning observer[J]. Control and Decision, 2024, 39(2): 519-526.)

[2] 呼忠权, 华长春, 张柳柳. 具有时变扰动的四旋翼无人机有限时间预定性能控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(12): 3215-3222.
(Hu Z Q, Hua C C, Zhang L L. Finite time prescribed performance control of quadrotor UAVs with time varying disturbances[J]. Control and Decision, 2022, 37(12): 3215-3222.)

[3] Wu Y, Wang L F, Zhang J Z, et al. Path following control of autonomous ground vehicle based on nonsingular terminal sliding mode and active disturbance rejection control[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 68(7): 6379-6390.

[4] Ali N, Ahmed Z, Zhang W D. State recovery and disturbance estimation-based fast trajectory tracking of autonomous surface vehicles: A finite-time approach[J]. Ocean Engineering, 2022, 244: 110240.

[5] Yang X, Yan J, Hua C C, et al. Trajectory tracking control of autonomous underwater vehicle with

- unknown parameters and external disturbances[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(2): 1054-1063.
- [6] 蒲明, 袁建英. 控制输入受限的准全控制利用率有限时间稳定控制[J]. 控制与决策, 2020, 35(5): 1039-1051.
(Pu M, Yuan J Y. Quasi-complete control utilization finite time stable control with input constraint[J]. Control and Decision, 2020, 35(5): 1039-1051.)
- [7] Bhat S P, Bernstein D S. Lyapunov analysis of finite-time differential equations[C]. Proceedings of 1995 American Control Conference — ACC'95. Seattle, 1995, 3: 1831-1832.
- [8] 姜博严. 二阶系统有限时间控制问题研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.
(Jiang B Y. Research on finite time control of second-order systems[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2018.)
- [9] Xiao J, Zeng Z G, Wen S P, et al. A unified framework design for finite-time and fixed-time synchronization of discontinuous neural networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(6): 3004-3016.
- [10] Deng Q, Wu J, Han T, et al. Fixed-time bipartite consensus of multi-agent systems with disturbances[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2019, 516: 37-49.
- [11] Yu H, Dai K R, Li H J, et al. Distributed cooperative guidance law for multiple missiles with input delay and topology switching[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(17): 9061-9085.
- [12] Li G L, Yang M, Wang S Y, et al. Modified rolling guidance law for single moving mass controlled reentry vehicle against maneuvering target with impact angle constraints[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2022, 35(6): 226-239.
- [13] Kommuri S K, Rath J J, Veluvolu K C. Sliding-mode-based observer-controller structure for fault-resilient control in DC servomotors[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 65(1): 918-929.
- [14] Deng Z C, Xu Y L, Gu W, et al. Finite-time convergence robust control of battery energy storage system to mitigate wind power fluctuations[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2017, 91: 144-154.
- [15] Lu Y B, Huang P F, Meng Z J, et al. Finite time attitude takeover control for combination via tethered space robot[J]. Acta Astronautica, 2017, 136: 9-21.
- [16] 陈伟锋, 邵之江. 基于非配置点部分误差控制联立方方法的编队卫星队形重构[J]. 控制与决策, 2014, 29(10): 1793-1797.
(Chen W F, Shao Z J. Simultaneous approach with partial error control on non-collocation points based satellite formation reconfiguration[J]. Control and Decision, 2014, 29(10): 1793-1797.)

作者简介

姜博严(1987—), 男, 讲师, 博士, 硕士生导师, 从事非线性控制、有限时间控制等研究, E-mail: jiangby@czust.edu.cn;

杜文浩(2004—), 男, 本科生, 从事非线性控制、有限时间控制等研究, E-mail: 22021304@czust.edu.cn;

李传江(1978—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、航天器控制等研究, E-mail: lichuan@hit.edu.cn;

姚文卿(1981—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性控制、有限时间控制等研究, E-mail: yaowq@czust.edu.cn.