中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策
CONTROL AND DECISION

基于新定义的二型模糊偏好关系及其在多准则决策中的应用

徐婷婷, 秦晋栋

引用本文:
徐婷婷,秦晋栋. 基于新定义的二型模糊偏好关系及其在多准则决策中的应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3469-3478.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.0610

乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系

Multiplicative consistent Pythagorean fuzzy preference relation

控制与决策. 2021, 36(4): 1010-1016 https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0967

基于新定义的二型模糊偏好关系及其在多准则决策中的应用

徐婷婷[1], 秦晋栋[1,2†]

(1. 武汉理工大学 管理学院，武汉 430070；2. 武汉理工大学 数据科学与智能决策研究中心，武汉 430070)

摘 要: 二型模糊集本质上是将模糊集中的隶属度扩展为一型模糊集而产生的集合,是处理复杂不确定环境下决策分析问题的有效工具. 首先,系统性回顾所提出的新的二型模糊集的数学表述定义,并进一步展示其在不同论域条件下的几何解释;其次,针对二型模糊偏好关系在处理复杂决策情景下的多准则决策问题时所具有的显著优势,开展针对二型模糊偏好关系及其在多准则决策中的应用基础研究,并基于新的数学表述方法分别给出二型模糊偏好关系的定义和决策解释,同时定义了加型和积型一致性二型模糊偏好关系的条件;然后,根据模糊偏好关系理论构建并分析二型模糊偏好关系的相关方法和性质来说明二型模糊偏好关系以及所提出的新的二型模糊集的数学表述定义的科学性和合理性;最后,通过旅游产品选择案例与对比分析验证所提出的新定义下的基于二型模糊偏好关系的多准则决策方法的有效性和可行性.

关键词: 二型模糊集；二型模糊偏好关系；决策解释；旅游产品选择

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0610

引用格式: 徐婷婷, 秦晋栋. 基于新定义的二型模糊偏好关系及其在多准则决策中的应用 [J]. 控制与决策, 2024, 39(10): 3469-3478.

Type-2 fuzzy preference relation based on new definition and its application in multi-criteria decision-making

XU Ting-ting[1], *QIN Jin-dong*[1,2†]

(1. School of Management, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China；2. Research Center for Data Science and Intelligent Decision Making, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: A type-2 fuzzy set (T2FS) is essentially a set generated by expanding the membership degree of a fuzzy set into a type-1 fuzzy set, and it is an effective tool to deal with decision analysis problems in complex and uncertain environment. First, this paper systematically reviews the proposed new mathematical representation definition of type-2 fuzzy sets (T2FSs), and further demonstrates its geometric interpretations under different universe conditions. Second, aiming at the significant advantages of type-2 fuzzy preference relations in dealing with multi-criteria decision-making problems in complex decision-making scenarios, basic research is conducted on type-2 fuzzy preference relations and their applications in multi-criteria decision-making. More specifically, the definition and decision interpretations of type-2 fuzzy preference relations are given based on the new mathematical representation method, and the additive as well as multiplicative consistency conditions of type-2 fuzzy preference relations are defined simultaneously. Then, according to the theory on fuzzy preference relations, the related methods and properties of type-2 fuzzy preference relations are constructed and analyzed to illustrate the scientificity and rationality of type-2 fuzzy preference relations and the proposed new mathematical representation definition of T2FSs. Finally, the effectiveness and feasibility of the multi-criteria decision-making method based on type-2 fuzzy preference relations under the new definition are verified by a case study on tourism product selection and a comparative analysis.

Keywords: type-2 fuzzy sets；type-2 fuzzy preference relations；decision interpretations；tourism product selection

0 引 言

为了刻画和处理现实决策问题中的复杂性和模糊性, Zadeh[1] 在 1965 年提出了模糊集 (fuzzy sets, FSs) 的定义, 随后又与 Bellman 开展合作给出了模糊决策[2] 的概念. 自此, 模糊决策逐渐成为了不确定决策科学领域中发展最为迅猛的研究课题[3-4], 其中模

收稿日期: 2023-05-08；**录用日期:** 2023-10-16.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (72071151, 71701158)；湖北省自然科学基金项目 (2020CFB773).
责任编委: 刘宝碇.
† 通讯作者. E-mail: qinjindongseu@126.com.

糊环境下多准则决策理论与方法的研究吸引了大量决策分析领域学者们的关注,也随之形成了较为丰富而完善的模糊决策理论方法体系[5-8]. 然而,由于客观事物和人类思维的不确定性,对于一些多准则决策问题,决策信息的获取有时较为困难. 例如,决策者本身对于备选方案具有偏好,或者无法获取准则的权重信息,亦或是决策者们可能会因为所需评价的因素较多而很难提供合理的评估值,此时偏好关系(preference relations)便成为解决该类问题的重要工具. 在构建偏好关系的过程中,比较备选方案(或准则)有多种方法,如两两(逐对)比较、一个与另一个比较、一部分与另一部分比较等,其中两两比较则是目前最受决策者们青睐的方法之一[9-10]. 决策者们通过对备选方案(或准则)进行两两比较来刻画自己对于这些备选方案(或准则)的偏好. 另外,由于决策环境的复杂性以及决策者自身的经验或者知识的局限性, Orlovsky[11]考虑到对于"x好于y"或"y好于x"的确定有时较为困难,此时利用区间$[0,1]$上的某个值来描述"x好于y"或"y好于x"的程度会更加容易,由此提出了模糊偏好关系(也称互补偏好关系)的概念,并成为了模糊决策理论中重要的组成部分,受到了诸多学者[8-9,12-22]的广泛关注.

随着现实决策环境中复杂性和模糊性的日益增加,传统模糊集在描述这些更深层次的不确定性时存在着一定程度的局限性;因此, Zadeh[23]又进一步将模糊集中的隶属度扩展为一型模糊集,在此基础上提出了二型模糊集(type-2 fuzzy sets, T2FSs)的定义,其本质上是模糊集之间的嵌套,使得所提出的二型模糊集能够更好地表征和处理更为复杂的不确定性. 根据秦晋栋等[4]对于二型模糊决策理论与方法所进行的系统性综述,目前二型模糊决策理论与方法的研究主要集中于区间二型模糊环境中,且造成这一研究态势最本质的原因是二型模糊集缺乏一个简单易懂的数学表述以及直观明了的几何解释. 由此可见,提出一个形式简单且易于理解的二型模糊集的数学表述定义,并在此基础上给出其在不同论域条件下的几何解释十分必要. 与此同时,与目前研究较为完备的模糊偏好关系理论体系[8-9,11-22]相比,尽管区间二型模糊偏好关系的研究成果较为丰硕,但是关于二型模糊偏好关系(type-2 fuzzy preference relations)的研究却是极为匮乏的[4]. 鉴于二型模糊偏好关系在处理决策环境更为复杂的多准则决策问题时所具有的优势,因此为了丰富二型模糊决策基础理论和扩宽二型模糊决策方法的研究思路,基于简洁明了的二型模糊集的数学表述定义开展关于二型模糊偏好关系的研究工作具有较高的学术价值与现实意义. 同时,考虑到经典模糊集与所提出的二型模糊集之间的关联性,可以在当前丰富的模糊偏好关系的研究成果的基础上系统深入地探究二型模糊偏好关系的相关结论,不仅能够完善二型模糊偏好关系理论,而且进一步阐明了所提出的新的二型模糊集的数学表述定义的合理性和科学性. 最后,将基于二型模糊偏好关系的多准则决策方法应用于旅游产品选择案例中,进一步说明所提出的定义和方法的有效性.

本文的结构组织如下: 首先,在第1节中给出一个新的二型模糊集的数学表述定义,并介绍了不同论域情况下二型模糊集及其几何解释. 其次,在第2节中提出二型模糊关系和二型模糊偏好关系的定义,给出了两类二型模糊偏好关系的决策解释,并基于加法传递性和乘法传递性定义了加型和积性一致性二型模糊偏好关系. 然后,在第3节中基于模糊偏好关系理论探究了二型模糊偏好关系的相关性质和决策方法来说明所提出的二型模糊集的数学表述以及二型模糊偏好关系的合理性. 同时,在第4节将3.2节中所拓展的二型模糊多准则决策方法应用于旅游产品选择问题,并通过对比分析来说明所提出的定义和方法的可行性和有效性. 最后,在第5节对全文进行了总结,并对未来的研究工作进行了展望.

1 二型模糊集的基本概念

1975年, Zadeh[23]基于语言真实度和真值之间的联系对模糊集进行了拓展,给出了n型模糊集(type-n fuzzy sets, TnFSs)的定义.

定义1 一个模糊集是$n(n=2,3,\ldots)$型的,如果其隶属函数取值为$n-1$型模糊集,其中一型模糊集的隶属函数取值范围为$[0,1]$.

另外,当定义1中$n=2$时,可以得到二型模糊集的原始定义,具体如下所示.

定义2 一个二型模糊集的隶属函数取值为一型模糊集.

由定义1和定义2可知,二型模糊集的隶属度为一型模糊集,一型模糊集的值域为$[0,1]$,而Zadeh[23]对一型模糊集的论域没有进行明确设定. 但是,通常将$[0,1]$作为一型模糊集的论域[4,24-28],因此一型模糊集的数学表达式可定义为$A^*=\{\langle x,\mu_{A^*}(x)\rangle|x\in[0,1],\mu_{A^*}(x)\in[0,1]\}$. 之后,许多学者[24-33]提出了多种二型模糊集的数学表述定义. 秦晋栋等[4]对现存

的这些研究成果进行了分析和总结,进而结合定义1和定义2给出了一种新的二型模糊集的数学表达式 $\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x)\rangle | x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in \mathrm{T1FS}([0,1])\}$,其中 $\mathrm{T1FS}([0,1])$ 表示 $[0,1]$ 上全体一型模糊集构成的集合. 为了进一步说明和描绘所提出的二型模糊集的数学表述,这里对所提出的二型模糊集的新的数学表述方法[34-35]和几何解释[35]进行系统性回顾.

定义3　设 X 为论域,定义在 X 上的一个二型模糊集为

$$\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x)\rangle | x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = \{\langle \tau, \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x)}(\tau)\rangle | \tau \in [0,1], \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x)}(\tau) \in [0,1]\}\}. \tag{1}$$

其中: $\mu_{\mu_{\tilde{A}}(x)} : [0,1] \to [0,1], \mu_{\tilde{A}} : X \to \mathrm{T1FS}([0,1])$, $\mu_{\mu_{\tilde{A}}(x)}(\tau)$ 表示元素 τ 属于一型模糊集 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的隶属度, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 表示元素 x 属于二型模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属度集.

为了更加方便地在实际决策中应用二型模糊信息,不妨将式(1)中的 $\eta = \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x)\rangle$ 称为二型模糊元(type-2 fuzzy element, T2FE),其中的一型模糊集 $\tilde{A}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)$ 称为二型模糊值(type-2 fuzzy value, T2FV). 同时,这里提供一个例子来具体说明利用式(1)表示实际决策信息的过程.

例1　令 $X = \{x_1, x_2\}$ 为一个论域,二型模糊值 $\{\langle 0.3, 0.8\rangle, \langle 0.4, 0.7\rangle, \langle 0.5, 0.9\rangle\}, \{\langle 0.2, 0.6\rangle, \langle 0.4, 0.7\rangle, \langle 0.3, 0.7\rangle\}$ 分别是 x_1 和 x_2 属于二型模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属度集,则基于式(1)可得

$$\tilde{A} = \{\langle x_1, \{\langle 0.3, 0.8\rangle, \langle 0.4, 0.7\rangle, \langle 0.5, 0.9\rangle\}\rangle, \langle x_2, \{\langle 0.2, 0.6\rangle, \langle 0.4, 0.7\rangle, \langle 0.3, 0.7\rangle\}\rangle\}.$$

由定义3可知,二型模糊集 $\tilde{A}$ 中包含两个论域,即二型模糊集的论域 X 以及一型模糊集的论域 $[0,1]$. 这里基于这两个论域给出一种二型模糊集的几何解释,如图1所示.

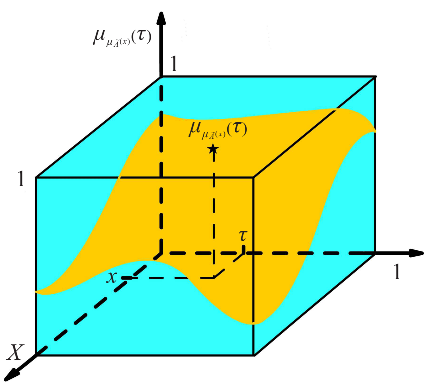

图1　二型模糊集的几何解释

此外,为了进一步更直观地描述所提出的二型模糊集,接下来将根据定义3中二型模糊集 $\tilde{A}$ 和一型模糊集 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的论域特性(离散或连续),介绍下面3种情况下二型模糊集的几何解释.

1) 当二型模糊集 $\tilde{A}$ 的论域是连续的,而一型模糊集 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的论域为离散的时,二型模糊集可表示为

$$\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x)\rangle | x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = \{\langle \tau_j, \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x)}(\tau_j)\rangle | \tau_j \in [0,1], \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x)}(\tau_j) \in [0,1]\}\}.$$

将其称为单连续二型模糊集(single continuous T2FSs),几何解释如图2所示.

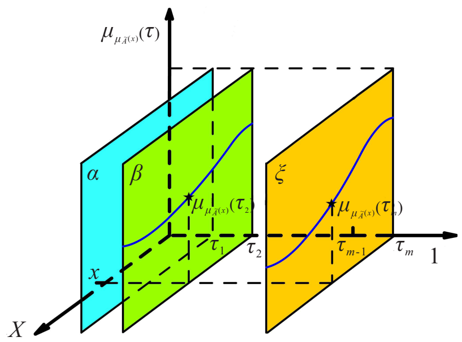

图2　单连续二型模糊集的几何解释

2) 当二型模糊集 $\tilde{A}$ 和一型模糊集 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的论域同时为离散的时,二型模糊集可表示为

$$\tilde{A} = \{\langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)\rangle | x_i \in X, \mu_{\tilde{A}}(x_i) = \{\langle \tau_j, \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}(\tau_j)\rangle | \tau_j \in [0,1], \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}(\tau_j) \in [0,1]\}\}.$$

将其称为双离散二型模糊集(double discrete T2FSs),其几何解释如图3所示.

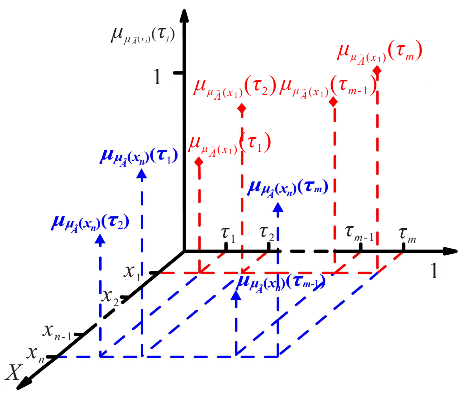

图3　双离散二型模糊集的几何解释

3) 当二型模糊集 $\tilde{A}$ 的论域是离散的,而一型模糊集 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的论域为连续的时,二型模糊集可定义为

$$\tilde{A} = \{\langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)\rangle | x_i \in X, \mu_{\tilde{A}}(x_i) = \{\langle \tau, \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}(\tau)\rangle | \tau \in [0,1], \mu_{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}(\tau) \in [0,1]\}\}.$$

将其称为单离散二型模糊集(single discrete T2FSs),如图4所示.

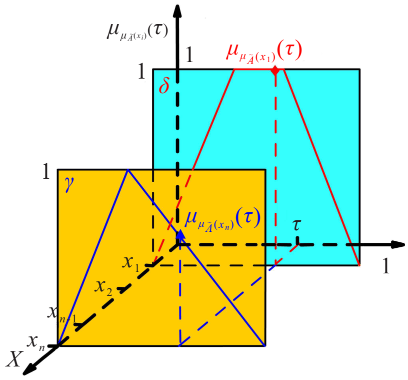

图4 单离散二型模糊集的几何解释

在实际决策中论域为单位闭区间或其子集的决策环境相对较少,所以为了更广泛地在现实决策中应用二型模糊信息,一型模糊集(即现存的二型模糊集定义[24-33]中的次隶属函数)的论域不应该仅局限于单位闭区间或其子集,应根据实际决策环境进行设定[4]. 对此不妨给出一个例子进行说明.

例2 在一个多准则决策问题中,若假设备选方案集 $\varLambda=\{\varLambda_1,\varLambda_2,\ldots,\varLambda_m\}$,准则集 $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$,与准则 $c_i(i=1,2,\ldots,n)$ 相关联的子准则集为 $c_i=\{c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{in_i}\}$,此时可将子准则集 c_i 设定为一型模糊集的论域,则方案 $\varLambda_l(l=1,2,\ldots,m)$ 在各个准则下的评估值都可表示为如下形式:

$$\tilde{A}=\{\langle c_i,\mu_{\tilde{A}}(c_i)\rangle|c_i\in C,\mu_{\tilde{A}}(c_i)=\{\langle c_{ij},\mu_{\mu_{\tilde{A}}(c_i)}(c_{ij})\rangle|c_{ij}\in c_i,\mu_{\mu_{\tilde{A}}(c_i)}(c_{ij})\in[0,1]\}\}. \tag{2}$$

为了丰富二型模糊决策理论,也为了能够多角度地在实际决策中应用二型模糊信息,接下来将基于定义3研究二型模糊偏好关系.

2 二型模糊偏好关系

本节基于第1节研究二型模糊偏好关系及其决策解释,定义加型和积性一致性来进一步丰富二型模糊偏好关系理论. 为了更好地构造二型模糊偏好关系,首先介绍二型模糊关系的定义.

定义4 设 X 和 Y 为两个非空集合,映射 $S:X\times Y\rightarrow \mathrm{T1FS}([0,1])$ 被称为从 X 到 Y 的二型模糊二元关系,简称二型模糊关系(type-2 fuzzy relations). 特别地,从 X 到 X 的二型模糊关系一般称为 X 上的二型模糊关系.

实际上,X 上的二型模糊关系即为 $X\times X$ 上的二型模糊集,且对于任意 $(x_i,x_j)\in X\times X$, $S(x_i,x_j)\in \mathrm{T1FS}([0,1])$ 表示 x_i 与 x_j 具有二型模糊关系 S 的程度. 基于此,下面给出二型模糊偏好关系的定义.

定义5 设 X 为一个论域,称 $A=(\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$ 为定义在 X 上的二型模糊偏好关系,若对于任意 $i,j=1,2,\ldots,n$,满足

$$\tilde{A}(x_i^j)=\{\langle\tau_{\epsilon\iota},1-\mu_{\tilde{A}(x_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon})\rangle|\tau_{\epsilon\iota},\tau_{\iota\epsilon}\in[0,1],\ \mu_{\tilde{A}(x_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon})\in[0,1]\}, \tag{3}$$

$$\tilde{A}(x_i^i)=\{\langle\tau_{\epsilon\epsilon},0.5\rangle|\tau_{\epsilon\epsilon}\in[0,1]\}, \tag{4}$$

则 $\tilde{A}(x_i^i)$ 表示 x_i 优于 x_i 的偏好信息集,其中二型模糊值 $\tilde{A}(x_i^j)$ 表示 x_i 优于 x_j 的偏好信息集.

由于关系一般有集合表示法、关系图表示法和关系矩阵表示法等3种表示方法[14],二型模糊偏好关系从矩阵的视角也称为二型模糊判断矩阵(或二型互补判断矩阵). 为了更加清楚地解释二型模糊偏好关系以及凸显利用二型模糊值表示偏好信息的优势,下面给出二型模糊偏好关系的两类决策解释.

为了更好地阐述二型模糊偏好关系的决策解释以及后续研究二型模糊判断矩阵的相关性质,这里首先定义二型模糊判断矩阵的余矩阵、转置矩阵以及合成矩阵,同时回顾一下(二元)关系[36]的定义.

定义6 设 $A_\varepsilon=(\tilde{A}_\varepsilon(x_i^j))_{n\times n}(\varepsilon=1,2,\ldots,p)$ 为定义在 X 上的任意 p 个二型模糊偏好关系:

1) 若 $(\mu_{\tilde{A}_1(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}))^{\mathrm{T}}=\mu_{\tilde{A}_1(x_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon})$,则称 $A_1^{\mathrm{T}}=((\tilde{A}_1(x_i^j))^{\mathrm{T}})_{n\times n}$ 为 A_1 的转置矩阵.

2) 若 $(\mu_{\tilde{A}_1(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}))^{\mathrm{C}}=1-\mu_{\tilde{A}_1(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})$,则称 $A_1^{\mathrm{C}}=((\tilde{A}_1(x_i^j))^{\mathrm{C}})_{n\times n}$ 为 A_1 的余矩阵.

3) 若 $\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})=\sum\limits_{\varepsilon=1}^{p}w_\varepsilon\mu_{\tilde{A}_\varepsilon(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})$,且 $\sum\limits_{\varepsilon=1}^{p}w_\varepsilon=1$,则称 $A=(\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$ 为 $A_\varepsilon=(\tilde{A}_\varepsilon(x_i^j))_{n\times n}(\varepsilon=1,2,\ldots,p)$ 的合成矩阵,记为 $A=\bigoplus\limits_{\varepsilon=1}^{p}A_\varepsilon$.

定义7 设 X 和 Y 为两个集合,$P(X\times Y)$ 为 $X\times Y$ 的幂集,称子集 $R\in P(X\times Y)$ 为从 X 到 Y 的一个(二元)关系.

根据定义7,对于任意一个集合 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$,其中任意两个不同集合 $x_i=\{\tau_{i1},\tau_{i2},\ldots,\tau_{in_t},\ldots,\tau_{in_i}\}$, $x_j=\{\tau_{j1},\tau_{j2},\ldots,\tau_{jn_k},\ldots,\tau_{jn_j}\}$,定义

$$R_i^j=\{(\tau_{in_t},\tau_{jn_k})|(\tau_{in_t},\tau_{jn_k})\in x_i\times x_j\}, \tag{5}$$

$$R_i^i=\{(\tau_{in_t},\tau_{in_t})|(\tau_{in_t},\tau_{in_t})\in x_i\times x_i\}. \tag{6}$$

下面进一步从单个决策者参与的多准则决策和涉及多个专家的多准则群决策两个方面分别给出方案间和准则间的二型模糊偏好关系的决策解释.

1) 方案之间的二型模糊偏好关系.

① 决策是日常生活的一部分,无论是个人、企业或者是社会经济系统,都有着诸多决策问题[37]. 例如,对于游客来说,选择合适的旅游景点就是一个决策问题,假设游客想游玩的景点类型集为 $\varLambda = \{\varLambda_1, \varLambda_2, \ldots, \varLambda_m\}$,其中 $\varLambda_l = \{\varLambda_{l1}, \varLambda_{l2}, \ldots, \varLambda_{lm_l}\}$ 是景点类型 $\varLambda_l$ 所关联的因素,$l = 1, 2, \ldots, m$. 比如 $\varLambda_l$ 为中国古代建筑,则 $\varLambda_{l1}, \varLambda_{l2}, \ldots, \varLambda_{lm_l}$ 可分别为国内各大古代建筑景点,即故宫、颐和园、永乐宫等. 利用二型模糊偏好关系来表示游客对于各种景点类型的偏好,可得二型模糊判断矩阵 $A = (\tilde{A}(\varLambda_i^j))_{m\times m}$,满足 $\tilde{A}(\varLambda_i^j) = \{\langle\tau_{\epsilon\iota}, 1 - \mu_{\tilde{A}(\varLambda_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon})\rangle | \tau_{\epsilon\iota} \in T_i^j, \mu_{\tilde{A}(\varLambda_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon}) \in [0,1]\}$, $\tilde{A}(\varLambda_i^i) = \{\langle\tau_{\epsilon\epsilon}, 0.5\rangle | \tau_{\epsilon\epsilon} \in T_i^i\}$. 其中: $T_i^j = \varLambda_i \times \varLambda_j$, $T_i^i = \varLambda_i \times \varLambda_i$,且 $|\tilde{A}(\varLambda_i^j)| = m_i \times m_j$, $|\tilde{A}(\varLambda_i^i)| = m_i$.

② 对于日常生活中一些中小型决策问题,有时所邀请的专家们因为处于不同的生活环境或者受教育的程度不同,在解决该类决策问题时所具有的经验和知识可能存在少许的差异,在这种情况下专家们一般被赋予不同的权重. 在情况①所提供的决策信息的基础上,假设现有 p 位游客相约一起旅游,同时各位游客由于对各类景点的了解程度不同而具有不同的权重. 例如, $\varLambda_l (l = 1, 2, \ldots, m)$ 可为各类景点的其中一种, $\varLambda_{l1}, \varLambda_{l2}, \ldots, \varLambda_{lm_l}$ 则可分别为该类景点的旅游资源. 不妨令游客集 $\wp = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$,游客们的权重信息 $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$,且满足 $w_\varepsilon \in [0,1]$ 和 $\sum_{\varepsilon=1}^{p} w_\varepsilon = 1$. 如果应用二型模糊偏好关系表示每个游客 $e_\varepsilon (\varepsilon = 1, 2, \ldots, p)$ 对于各类景点的偏好信息,则有 $A_\varepsilon = (\tilde{A}_\varepsilon(\varLambda_i^j))_{m\times m}$,满足 $\tilde{A}_\varepsilon(\varLambda_i^j) = \{\langle\tau_{\epsilon\iota}, 1 - \mu_{\tilde{A}_\varepsilon(\varLambda_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon})\rangle | \tau_{\epsilon\iota} \in T_i^j, \mu_{\tilde{A}_\varepsilon(\varLambda_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon}) \in [0,1]\}$, $\tilde{A}_\varepsilon(\varLambda_i^i) = \{\langle\tau_{\epsilon\epsilon}, 0.5\rangle | \tau_{\epsilon\epsilon} \in T_i^i\}$. 根据定义6,可得 p 位游客的综合二型模糊偏好关系为 $A = (\tilde{A}(\varLambda_i^j))_{m\times m}$. 其中: $\mu_{\tilde{A}(\varLambda_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}) = \sum_{\varepsilon=1}^{p} w_\varepsilon \mu_{\tilde{A}_\varepsilon(\varLambda_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})$,且 $|\tilde{A}(\varLambda_i^j)| = m_i \times m_j$, $|\tilde{A}(\varLambda_i^i)| = m_i$.

2) 准则之间的二型模糊偏好关系.

①* 基于例2和式(5)和(6),若利用二型模糊偏好关系表示决策者对于各个准则之间的偏好,则可得二型模糊判断矩阵 $A = (\tilde{A}(c_i^j))_{n\times n}$,满足 $\tilde{A}(c_i^j) = \{\langle c_{\epsilon\iota}, 1 - \mu_{\tilde{A}(c_j^i)}(c_{\iota\epsilon})\rangle | c_{\epsilon\iota} \in S_i^j, \mu_{\tilde{A}(c_j^i)}(c_{\iota\epsilon}) \in [0,1]\}$, $\tilde{A}(c_i^i) = \{\langle c_{\epsilon\epsilon}, 0.5\rangle | c_{\epsilon\epsilon} \in S_i^i\}$. 其中: $S_i^j = c_i \times c_j$, $S_i^i = c_i \times c_i$, $|\tilde{A}(c_i^j)| = n_i \times n_j$, $|\tilde{A}(c_i^i)| = n_i$.

②* 与情况②类似,假设准则集 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$,其中 $c_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 相关联的子准则集为 $c_i = \{c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in_i}\}$,则各个专家对于每个准则的偏好可表示为 $A_\varepsilon = (\tilde{A}_\varepsilon(c_i^j))_{n\times n}$,满足 $\tilde{A}_\varepsilon(c_i^j) = \{\langle c_{\epsilon\iota}, 1 - \mu_{\tilde{A}_\varepsilon(c_j^i)}(c_{\iota\epsilon})\rangle | c_{\epsilon\iota} \in S_i^j, \mu_{\tilde{A}_\varepsilon(c_j^i)}(c_{\iota\epsilon}) \in [0,1]\}$, $\tilde{A}_\varepsilon(c_i^i) = \{\langle c_{\epsilon\epsilon}, 0.5\rangle | c_{\epsilon\epsilon} \in S_i^i\}$. 基于定义6,类似可得该群决策的综合二型模糊偏好关系为 $A = (\tilde{A}(c_i^j))_{n\times n}$. 其中: $\mu_{\tilde{A}(c_i^j)}(c_{\epsilon\iota}) = \sum_{\varepsilon=1}^{p} w_\varepsilon \mu_{\tilde{A}_\varepsilon(c_i^j)}(c_{\epsilon\iota})$, $|\tilde{A}(c_i^j)| = n_i \times n_j$, $|\tilde{A}(c_i^i)| = n_i$.

此外,为了完善二型模糊偏好关系的一致性相关概念,下面基于Tanino[12]所提出的加法和乘法传递性分别定义加型和积型一致性二型模糊偏好关系.

定义8　设 $A = (\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$ 为定义在 X 上的任意二型模糊偏好关系,其中二型模糊值 $\tilde{A}(x_i^j) = \{\langle\tau_{\epsilon\iota}, \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})\rangle | \tau_{\epsilon\iota} \in [0,1], \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}) \in [0,1]\}$. 对于任意 $i, j, k \in N$,若满足

$$(\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma}) - 0.5) + (\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota}) - 0.5) = \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}) - 0.5, \tag{7}$$

即 $\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}) = \mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma}) - \mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma}) + 0.5$,则称 A 为加型一致性二型模糊偏好关系.

定义9　设 $A = (\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$ 为定义在 X 上的任意二型模糊偏好关系,其中二型模糊值 $\tilde{A}(x_i^j) = \{\langle\tau_{\epsilon\iota}, \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})\rangle | \tau_{\epsilon\iota} \in [0,1], \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}) \in [0,1]\}$. 对于任意 $i, j, k \in N$,若满足

$$\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota})\mu_{\tilde{A}(x_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon}) = \mu_{\tilde{A}(x_k^i)}(\tau_{\varsigma\epsilon})\mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma})\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}), \tag{8}$$

则称 A 为积型一致性二型模糊偏好关系.

注1　定义8和定义9要求二型模糊判断矩阵中每个二型模糊值的对应隶属度都必须满足加法传递性或乘法传递性,当将式(7)和(8)应用于一些一致性要求相对宽容的决策案例中就显得比较苛刻. 对此,将从对二型模糊判断矩阵中每个二型模糊值的隶属度取平均值的角度进行考虑,分别给出二型模糊偏好关系相对较为宽容的加型和积型一致性条件. 假设 $A = (\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$ 为定义在 X 上的任意二型模糊偏好关系,其中二型模糊值 $\tilde{A}(x_i^j) = \{\langle\tau_g, \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_g)\rangle | \tau_g \in [0,1], \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_g) \in [0,1], g = 1, 2, \ldots, |\tilde{A}(x_i^j)|\}$,对于任意 $i, j, k \in N$,若满足

$$\Bigg(\frac{\sum_{e=1}^{|\tilde{A}(x_i^k)|} \mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_e)}{|\tilde{A}(x_i^k)|} - 0.5\Bigg) + \Bigg(\frac{\sum_{f=1}^{|\tilde{A}(x_k^j)|} \mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_f)}{|\tilde{A}(x_k^j)|} - 0.5\Bigg) = \frac{\sum_{g=1}^{|\tilde{A}(x_i^j)|} \mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_g)}{|\tilde{A}(x_i^j)|} - 0.5, \tag{9}$$

$$\frac{\sum_{e=1}^{|\tilde{A}(x_i^k)|}\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_e)}{|\tilde{A}(x_i^k)|}\frac{\sum_{f=1}^{|\tilde{A}(x_k^j)|}\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_f)}{|\tilde{A}(x_k^j)|}\frac{\sum_{\acute{g}=1}^{|\tilde{A}(x_j^i)|}\mu_{\tilde{A}(x_j^i)}(\tau_{\acute{g}})}{|\tilde{A}(x_j^i)|}=$$

$$\frac{\sum_{\acute{e}=1}^{|\tilde{A}(x_k^i)|}\mu_{\tilde{A}(x_k^i)}(\tau_{\acute{e}})}{|\tilde{A}(x_k^i)|}\frac{\sum_{\acute{f}=1}^{|\tilde{A}(x_j^k)|}\mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\acute{f}})}{|\tilde{A}(x_j^k)|}\frac{\sum_{g=1}^{|\tilde{A}(x_i^j)|}\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_g)}{|\tilde{A}(x_i^j)|}, \tag{10}$$

则分别称A为加型一致性二型模糊偏好关系和积型一致性二型模糊偏好关系.

相较于式(7)和(8),式(9)和(10)更贴合日常生活中的决策案例. 例如,一个公司计划组织一次团建活动,一共有50人参加,现有3个备选团建地点Λ_1、Λ_2和Λ_3,这50个人根据交通的便捷性、食物的可口程度以及娱乐设施的多样性对选择Λ_1、Λ_2或Λ_3作为团建地点分别表达了自己的偏好,结果发现在上述3个标准下绝大多数人都认为Λ_1优于Λ_2和Λ_3,极少数人则认为Λ_2优于Λ_1和Λ_3. 在现实生活中,这种情况下最终所确定的团建地点一般都会遵循“少数服从多数”的原则,即选择Λ_1作为这次团建的场所. 由此可见,这个决策问题对于一致性要求相对宽容. 在式(7)和(8)的条件下,如果上述绝大多数人所提供的二型模糊判断矩阵满足加型和积型一致性,而极少数人所给出的二型模糊判断矩阵不满足加型和积型一致性,则由定义6对这50个人所提供的二型模糊判断矩阵进行合成所得到的合成矩阵也不具有加型和积型一致性. 但是,在这种情况下,如果根据式(9)和(10)进行判断,这50个人所提供的二型模糊判断矩阵很大程度上都是满足加型和积型一致性的,所以最后的合成矩阵也是满足加型和积型一致性的.

接下来,将进一步探讨二型模糊偏好关系的基本性质、排序方法和决策方法.

3 二型模糊偏好关系的理论分析

通过分析定义2和定义3可知,二型模糊集和模糊集之间具有极其紧密的联系,因而模糊集理论相关研究成果可类似拓展到所提出的二型模糊集上. 鉴于目前模糊偏好关系所具有的完善的理论体系,接下来将基于模糊偏好关系理论的研究成果探究二型模糊偏好关系的相关结论.

3.1 二型模糊偏好关系的相关性质研究

根据加型一致性互补判断矩阵的相关性质[18]及其转置矩阵、余矩阵以及合成矩阵所具有的保持一致性[17], 下面加型和积型一致性二型模糊判断矩阵的相关定理成立.

定理1 加型(或积型)一致性二型模糊判断矩阵满足中分传递性、满意一致性、中等随机传递性以及强随机传递性.

证明 令$A=(\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$为定义在$X$上的任意一个加型一致性二型模糊判断矩阵. 若$\lambda\in[0.5,1)$,当$\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})\geqslant\lambda,\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota})\geqslant\lambda$时,则由式(7)可得$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})=\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})+\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota})-0.5\geqslant 2\lambda-0.5\geqslant\lambda$. 同理,若$\lambda\in(0,0.5]$,当$\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})\leqslant\lambda$, $\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota})\leqslant\lambda$时,则有$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})\leqslant\lambda$. 特别地,若$\lambda=0.5$,则由式(7)分别有$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})\geqslant 0.5$和$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})\leqslant 0.5$. 所以式(7)满足中分传递性和满意一致性. 此外,当$\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})\geqslant 0.5$, $\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota})\geqslant 0.5$时,通过式(7),显然有

$$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})\geqslant\max\{\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma}),\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota})\},$$
$$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})\geqslant\min\{\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma}),\mu_{\tilde{A}(x_k^j)}(\tau_{\varsigma\iota})\},$$

即式(7)满足强随机传递性和中等随机传递性. 类似可证式(8)～(10)条件下定理1也是成立的. □

鉴于中分传递性和满意一致性满足人们决策思维的心理特征,本文所提出的加型(或积型)一致性二型模糊判断矩阵也具有能够刻画实际决策心理的优良性质.

定理2 加型(或积型)一致性二型模糊判断矩阵的转置矩阵和余矩阵相等且为加型(或积型)一致性二型模糊判断矩阵.

证明 令$A=(\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$为定义在$X$上的任意加型一致性二型模糊判断矩阵. 根据定义6,可得A的转置矩阵和余矩阵分别为

$$A^{\mathrm{T}}=((\tilde{A}(x_i^j))^{\mathrm{T}})_{n\times n},$$
$$A^{\mathrm{C}}=((\tilde{A}(x_i^j))^{\mathrm{C}})_{n\times n}.$$

其中

$$(\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}))^{\mathrm{T}}=\mu_{\tilde{A}(x_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon}),$$
$$(\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}))^{\mathrm{C}}=1-\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}).$$

通过式(3),有

$$\mu_{\tilde{A}(x_j^i)}(\tau_{\iota\epsilon})=1-\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}),$$

因此

$$(\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}))^{\mathrm{T}}=(\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}))^{\mathrm{C}},$$

进而可得$A^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{C}}$. 又因为由定义6和定义8,有

$$(\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}))^{\mathrm{C}}=1-\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})=$$
$$1-(\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})-\mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma})+0.5)=$$

$$\mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma})-\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})+0.5=$$
$$(1-(\mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma}))^{\mathrm{C}})-(1-(\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma}))^{\mathrm{C}})+0.5=$$
$$(\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma}))^{\mathrm{C}}-(\mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma}))^{\mathrm{C}}+0.5,$$

所以A^{C}满足加型一致性. 式(8)～(10)条件下定理的成立类似可证. □

如果定义在X上的任意p个二型模糊判断矩阵都满足加型一致性或积型一致性,则下面定理成立.

定理3 对于X上任意p个二型模糊判断矩阵$A_\varepsilon=(\tilde{A}_\varepsilon(x_i^j))_{n\times n}(\varepsilon=1,2,\dots,p)$, 如果它们都是加型(或积型)一致性的,则它们的合成矩阵$A=\bigoplus_{\varepsilon=1}^{p}A_\varepsilon=(\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$也是加型(或积型)一致性的.

证明 令$A_\varepsilon=(\tilde{A}_\varepsilon(x_i^j))_{n\times n}(\varepsilon=1,2,\dots,p)$是定义在$X$上的任意$p$个加型一致性二型模糊判断矩阵. 由定义6,可得这$p$个判断矩阵的合成矩阵

$$A=\bigoplus_{\varepsilon=1}^{p}A_\varepsilon=(\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}.$$

其中:$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})=\sum_{\varepsilon=1}^{p}w_\varepsilon\mu_{\tilde{A}_\varepsilon(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota}),\sum_{\varepsilon=1}^{p}w_\varepsilon=1$. 因为

$$\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})=\sum_{\varepsilon=1}^{p}w_\varepsilon\mu_{\tilde{A}_\varepsilon(x_i^j)}(\tau_{\epsilon\iota})=$$
$$\sum_{\varepsilon=1}^{p}w_\varepsilon(\mu_{\tilde{A}_\varepsilon(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})-\mu_{\tilde{A}_\varepsilon(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma})+0.5)=$$
$$\mu_{\tilde{A}(x_i^k)}(\tau_{\epsilon\varsigma})-\mu_{\tilde{A}(x_j^k)}(\tau_{\iota\varsigma})+0.5,$$

所以根据定义8可知A是加型一致性的. 类似可证公式(8)～(10)条件下定理也是成立的. □

3.2 基于二型模糊偏好关系的决策方法

类似地,模糊偏好关系的相关排序方法[8,18-20]和决策方法[8,14,17,19,21-22]也可以应用于二型模糊偏好关系的研究工作中.

在决策信息的获取方面,可根据模糊判断矩阵的排序方法研究通过二型模糊判断矩阵确定准则权重的方法. 例如,在文献[8]给出的模糊偏好关系的排序方法(包括中转法、最小方差法、特征向量法等)的基础上,探究二型模糊偏好关系的各种排序方法. 不妨以中转法为例,对于定义在X上的任意一个二型模糊判断矩阵$A=(\tilde{A}(x_i^j))_{n\times n}$,其中二型模糊值$\tilde{A}(x_i^j)=\{\langle\tau_g,\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_g)\rangle|\tau_g\in[0,1],\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_g)\in[0,1],g=1,2,\dots,|\tilde{A}(x_i^j)|\}$, 首先利用

$$G_{ij}=\frac{\sum_{g=1}^{|\tilde{A}(x_i^j)|}\mu_{\tilde{A}(x_i^j)}(\tau_g)}{|\tilde{A}(x_i^j)|}\tag{11}$$

计算二型模糊判断矩阵A中每个二型模糊值$\tilde{A}(x_i^j)$的平均偏好值;然后在此基础上对A中的平均偏好值进行按行求和,有$F_i=\sum_{j=1}^{n}G_{ij}$,并令$\bar{F}_{ij}=\frac{F_i-F_j}{2(n-1)}+0.5$,由此采用归一化方法可得二型模糊判断矩阵$A$的排序向量为$W=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_i,\dots,\omega_n)$,其中

$$\omega_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}}=\frac{\sum_{j=1}^{n}G_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}.\tag{12}$$

上述求解排序向量的方法被称为二型模糊判断矩阵排序的中转法.

在决策信息的集成过程中,可根据加型一致性模糊判断矩阵的决策应用[17]研究基于二型模糊判断矩阵的决策方法来对备选方案进行排序. 例如,对于第2节中情况①的多准则决策问题,假设景点类型集$\Lambda=\{\Lambda_1,\Lambda_2,\dots,\Lambda_m\}$,游客所给出的对于各类景点的偏好信息为$A=(\tilde{A}(\Lambda_i^j))_{m\times m}$,其中二型模糊值$\tilde{A}(\Lambda_i^j)=\{\langle\tau_g,\mu_{\tilde{A}(\Lambda_i^j)}(\tau_g)\rangle|\tau_g\in[0,1],\mu_{\tilde{A}(\Lambda_i^j)}(\tau_g)\in[0,1],g=1,2,\dots,|\tilde{A}(\Lambda_i^j)|\}$,则运用式(11)可得各个二型模糊值$\tilde{A}(x_i^j)$的平均偏好值$G_{ij}$,在此基础上对$A$中的平均偏好值进行按行求和,有$F_i=\sum_{j=1}^{m}G_{ij}$,并令$\hat{F}_{ij}=(F_i-F_j)/(2m)+0.5$. 然后基于方根法计算每个方案的优度值,具体公式如下:

$$s_i=\frac{\left(\prod_{j=1}^{m}\hat{F}_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}}{\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{m}\hat{F}_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}}.\tag{13}$$

根据优度值$s_i(i=1,2,\dots,m)$的大小可进一步为游客推荐合适的旅游景点.

4 二型模糊偏好关系在多准则决策中的应用

在本节中,将3.2节中所拓展的基于二型模糊偏好关系的决策方法应用于旅游产品选择问题中,并结合对比分析来说明二型模糊偏好关系在多准则决策中的有效性和可行性.

4.1 算例分析

给出一个关于旅游酒店选择的案例来说明3.2节中所拓展的基于二型模糊偏好关系的决策方法的有效性和可行性.

现有一名学生计划从武汉地区的如家酒店(A_1)、

蓝湾酒店 (A_2)、庭然酒店 (A_3) 和武汉鑫瑞达商务酒店 (A_4) 这4类快捷连锁酒店中选取一家作为暑假旅游的住宿场所,且该名学生就住宿的满意度向住宿过这4类连锁酒店的同学进行了咨询,该同学基于卫生条件 (c_1)、性价比 (c_2) 和服务态度 (c_3) 这3个指标,给出了他的偏好,如下所示:

$$A_0=\left(\begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline A_1 & \begin{array}{c}\{\langle c_{111},0.5\rangle,\langle c_{112},0.5\rangle,\\ \langle c_{113},0.5\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{121},0.7\rangle,\langle c_{122},0.6\rangle,\\ \langle c_{123},0.5\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{131},0.4\rangle,\langle c_{132},0.6\rangle,\\ \langle c_{133},0.5\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{141},0.7\rangle,\langle c_{142},0.8\rangle,\\ \langle c_{143},0.6\rangle\}\end{array} \\ A_2 & \begin{array}{c}\{\langle c_{211},0.3\rangle,\langle c_{212},0.4\rangle,\\ \langle c_{213},0.5\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{221},0.5\rangle,\langle c_{222},0.5\rangle,\\ \langle c_{223},0.5\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{231},0.4\rangle,\langle c_{232},0.5\rangle,\\ \langle c_{233},0.3\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{241},0.6\rangle,\langle c_{242},0.6\rangle,\\ \langle c_{243},0.6\rangle\}\end{array} \\ A_3 & \begin{array}{c}\{\langle c_{311},0.6\rangle,\langle c_{312},0.4\rangle,\\ \langle c_{313},0.5\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{321},0.6\rangle,\langle c_{322},0.5\rangle,\\ \langle c_{323},0.7\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{331},0.5\rangle,\langle c_{332},0.5\rangle,\\ \langle c_{333},0.5\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{341},0.7\rangle,\langle c_{342},0.6\rangle,\\ \langle c_{343},0.8\rangle\}\end{array} \\ A_4 & \begin{array}{c}\{\langle c_{411},0.3\rangle,\langle c_{412},0.2\rangle,\\ \langle c_{413},0.4\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{421},0.4\rangle,\langle c_{422},0.4\rangle,\\ \langle c_{423},0.4\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{431},0.3\rangle,\langle c_{432},0.4\rangle,\\ \langle c_{433},0.2\rangle\}\end{array} & \begin{array}{c}\{\langle c_{441},0.5\rangle,\langle c_{442},0.5\rangle,\\ \langle c_{443},0.5\rangle\}\end{array} \end{array}\right).$$

另外,根据携程旅行网 (https://ctrip.com) 上关于这4家酒店的评分以及每晚的价格 (大床房),可知所住宿过的如家酒店的评分是4.1,价格在176元左右;蓝湾酒店的评分为4.4,价格在214元左右;庭然酒店评分为4.9,价格在239元左右; 武汉鑫瑞达商务酒店评分为3.8,价格在182元左右.

下面运用3.2节中所拓展的二型模糊决策方法来解决上述酒店选择问题. 首先,基于式(11),由二型模糊判断矩阵A_0可得$G_{11}=G_{22}=G_{33}=G_{44}=G_{13}=G_{31}=0.5, G_{12}=G_{32}=G_{24}=0.6, G_{21}=G_{23}=G_{42}=0.4, G_{14}=G_{34}=0.7, G_{41}=G_{43}=0.3$,由式(9)可知,$A_0$满足加型一致性. 在此基础上对$A_0$中的平均偏好值进行按行求和,有$F_1=2.3, F_2=1.9, F_3=2.3, F_4=1.5$,进而可得$\hat{F}_{11}=\hat{F}_{22}=\hat{F}_{33}=\hat{F}_{44}=\hat{F}_{13}=\hat{F}_{31}=0.5, \hat{F}_{12}=\hat{F}_{24}=\hat{F}_{32}=0.55, \hat{F}_{14}=\hat{F}_{34}=0.6, \hat{F}_{21}=\hat{F}_{23}=\hat{F}_{42}=0.45, \hat{F}_{41}=\hat{F}_{43}=0.4$. 然后利用式(13)计算4家酒店的优度值分别为$s_1=0.268\,9, s_2=0.243\,7, s_3=0.268\,9, s_4=0.218\,5$. 因为$s_1=s_3>s_2>s_4$,即$A_1\sim A_3\succ A_2\succ A_4$,所以该同学对于$A_1$和$A_3$具有更高的偏好. 基于该同学的偏好结果,结合上述携程旅行网上的相关数据,如果该名学生同时对低价格有偏好,则可得4家连锁酒店的排序为$A_1\succ A_3\succ A_2\succ A_4$,即选取如家酒店作为旅游住宿场所. 此外,如果该名学生同时对高评分有偏好,则四家连锁酒店的排序为$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$,即此时选择庭然酒店作为旅游住宿场所.

4.2 对比分析

接下来,将基于模糊偏好关系的决策方法[17]应用于4.1节中的酒店选择问题. 如果利用模糊互补判断矩阵来表示4.1节中4家酒店关于每个准则的偏好信息,则分别可得下面3个矩阵:

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline A_1 & 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.8 \\ A_2 & 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ A_3 & 0.6 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ A_4 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{array}\right).$$

进一步地,利用文献[17]所提出的方法分别对3个矩阵进行了一致性修正. 然后,根据文献[17]所提出的决策方法,分别可得4家酒店关于每个准则的决策结果:

1) $s_1^{c_1}=0.268\,9, s_2^{c_1}=0.237\,4, s_3^{c_1}=0.275\,2, s_4^{c_1}=0.218\,5$. 因为$s_3^{c_1}>s_1^{c_1}>s_2^{c_1}>s_4^{c_1}$,所以四家酒店关于卫生条件指标的排序为$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$.

2) $s_1^{c_2}=0.281\,5, s_2^{c_2}=0.249\,9, s_3^{c_2}=0.249\,9, s_4^{c_2}=0.218\,5$. 因为$s_1^{c_2}>s_2^{c_2}\sim s_3^{c_2}>s_4^{c_2}$,所以4家酒店关于性价比指标的排序为$A_1\succ A_2\sim A_3\succ A_4$.

3) $s_1^{c_3}=0.256\,3, s_2^{c_3}=0.243\,7, s_3^{c_3}=0.281\,5, s_4^{c_3}=0.218\,5$. 因为$s_3^{c_3}>s_1^{c_3}>s_2^{c_3}>s_4^{c_3}$,所以4家酒店关于服务态度指标的排序为$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$.

由上述排序结果可知,在关于准则c_1和c_3的偏好下,该名学生可选择A_3作为旅游住宿场所. 在关于准则c_2的偏好下,则推荐该名学生选择A_1作为旅游住宿场所. 显然,运用模糊互补判断矩阵表示偏好信

息时只能得到关于单个准则的排序结果,且所得的最优方案包含在4.1节中所获得的两种最优方案中. 而利用基于二型模糊偏好关系的决策方法则可得4家酒店关于所有准则的综合排序结果. 这不仅说明了4.1节中所拓展的基于二型模糊判断矩阵的决策方法比基于模糊互补判断矩阵的决策方法更为全面和有效,也侧面反映了所研究的二型模糊集的数学表述定义和二型模糊偏好关系具有可行性.

5 结 论

本文基于二型模糊决策理论与方法的研究现状,提出了一种新的二型模糊集的数学表述定义,并分别给出了其在不同情况下的几何解释. 然后,定义了二型模糊偏好关系相关概念,并基于模糊偏好关系研究了二型模糊偏好关系的相关性质和决策方法. 由此可见,本文所研究的二型模糊偏好关系能够延续诸多学者[8-9,11-22]所构建的完备的模糊偏好关系理论,这也从侧面反映了所提出的二型模糊集的数学表述定义以及二型模糊偏好关系是合理且科学的.

未来可以在集合运算的基础上深入研究二型模糊偏好关系的基本运算和运算性质. 另外,对于加型和积性一致性二型模糊偏好关系,需要进一步探索一致性检验和调整方法. 同时,也希望本文所提出的新的二型模糊集的数学表述定义和二型模糊偏好关系的相关概念能够为深入探索二型模糊决策的系统理论方法提供新的研究视角和有益借鉴.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Bellman R E, Zadeh L A. Decision-making in a fuzzy environment[J]. Management Science, 1970, 17(4): 141-164.

[3] Qin J D, Liu X W. Type-2 fuzzy decision-making theories, methodologies and applications. Singapore: Springer, 2019: 161-186.

[4] 秦晋栋, 徐婷婷. 二型模糊决策理论与方法研究综述[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1510-1523.
(Qin J D, Xu T T. Type-2 fuzzy decision-making theories and methodologies: A systematic review[J]. Control and Decision, 2023, 38(6): 1510-1523.)

[5] Xu T T, Zhang H, Li B Q. Fuzzy entropy and hesitancy entropy in probabilistic hesitant fuzzy information and their applications[J]. Soft Computing, 2022, 26(18): 9101-9115.

[6] 丁雪枫, 朱丽霞. 基于密度峰值聚类理念的大群体应急模糊决策模型[J]. 控制与决策, 2022, 37(12): 3307-3313.
(Ding X F, Zhu L X. A large group emergency fuzzy decision-making method based on theory of clustering by fast search and find of density peaks[J]. Control and Decision, 2022, 37(12): 3307-3313.)

[7] 汤国林, 杨文栋, 刘培德. 基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1347-1356.
(Tang G L, Yang W D, Liu P D. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets with interval type-2 fuzzy information[J]. Control and Decision, 2022, 37(5): 1347-1356.)

[8] Xu Z S. Uncertain multi-attribute decision making: Methods and applications[M]. Berlin, Heidelberg: Springer , 2015.

[9] 王绪柱, 武彩萍, 薛娜. 模糊偏好关系及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
(Wang X Z, Wu C P, Xue N. Fuzzy preference relation and its application[M]. Beijing: Science Press, 2016.)

[10] Zhang J W, Liu F, Tu H N, et al. A decision-making model with sequential incomplete additive pairwise comparisons[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 236: 107766.

[11] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(3): 155-167.

[12] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2): 117-131.

[13] Liu F, Zou S C, You Q R. Transitivity measurements of fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 422: 27-47.

[14] 侯福均, 吴祈宗. 模糊偏好关系与决策[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2009: 24-29.
(Hou F J, Wu Q Z. Fuzzy preference relationship and decision-making[M]. Beijing: Beijing Insititute of Technology Press, 2009: 24-29.)

[15] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F, et al. Some issues on consistency of fuzzy preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 154(1): 98-109.

[16] Meng F Y, Pedrycz W, Tang J. Research on the consistency of additive trapezoidal fuzzy preference relations[J]. Expert Systems With Applications, 2021, 186: 115837.

[17] 姚敏, 张森. 模糊一致矩阵及其在决策分析中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(5): 78-81.
(Yao M, Zhang S. Fuzzy consistent matrix and its application in decision making[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1998, 18(5): 78-81.)

[18] 巩在武. 不确定模糊判断矩阵原理、方法与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 5-17.

(Gong Z W. Principle, method and application of uncertain fuzzy judgment matrix[M]. Beijing: Science Press, 2011: 5-17.)

[19] 姜艳萍, 樊治平. 基于判断矩阵的决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 24-29.
(Jiang Y P, Fan Z P. Decision theory and method based on judgment matrix[M]. Beijing: Science Press, 2008: 24-29.)

[20] Xu Y J, Da Q L, Liu L H. Normalizing rank aggregation method for priority of a fuzzy preference relation and its effectiveness[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50(8): 1287-1297.

[21] Yazidi A, Ivanovska M, Zennaro F M, et al. A new decision making model based on rank centrality for GDM with fuzzy preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2022, 297(3): 1030-1041.

[22] Meng F Y, Chen S M. A framework for group decision making with multiplicative trapezoidal fuzzy preference relations[J]. Information Sciences, 2021, 577: 722-747.

[23] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning — I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[24] Rickard J T, Aisbett J, Gibbon G. Fuzzy subsethood for fuzzy sets of type-2 and generalized type-n[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2009, 17(1): 50-60.

[25] Mendel J M, Rajati M R, Sussner P. On clarifying some definitions and notations used for type-2 fuzzy sets as well as some recommended changes[J]. Information Sciences, 2016, 340/341: 337-345.

[26] 王飞跃, 莫红. 关于二型模糊集合的一些基本问题[J]. 自动化学报, 2017, 43(7): 1114-1141.
(Wang F Y, Mo H. Some fundamental issues on type-2 fuzzy sets[J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(7): 1114-1141).

[27] de Miguel L, Santos H, Sesma-Sara M, et al. Type-2 fuzzy entropy sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 25(4): 993-1005.

[28] Zhu B, Ren P J. Type-2 fuzzy numbers made simple in decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2022, 21(2): 175-195.

[29] Mizumoto M, Tanaka K. Some properties of fuzzy sets of type-2[J]. Information and Control, 1976, 31(4): 312-340.

[30] Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(2): 117-127.

[31] Mo H, Wang F Y, Zhou M, et al. Footprint of uncertainty for type-2 fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2014, 272: 96-110.

[32] Mo H, Wang J, Li X, et al. Linguistic dynamic modeling and analysis of psychological health state using interval type-2 fuzzy sets[J]. CAA Journal of Automatica Sinica, 2015, 2(4): 366-373.

[33] Chiclana F, Zhou S M. Type-reduction of general type-2 fuzzy sets: The type-1 OWA approach[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 505-522.

[34] Qin J D, Xu T T, Zheng P. Axiomatic framework of entropy measure for type-2 fuzzy sets with new representation method and its application to product ranking through online reviews[J]. Applied Soft Computing, 2022, 130: 109689.

[35] Xu T T, Qin J D. A new representation method for type-2 fuzzy sets and its application to multiple criteria decision making[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2023, 25(3): 1171-1190.

[36] 管志忠. 计算机数学基础[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008: 105-115.
(Guan Z Z. Basic mathematics for computer[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2008: 105-115.)

[37] 徐玖平, 李军. 多目标决策的理论与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
(Xu J P, Li J. Multiple objective decision making theory and methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.)

作者简介

徐婷婷 (1994−), 女, 博士生, 从事不确定性数学理论、决策理论与方法等研究, E-mail: m15855440605@163.com;

秦晋栋 (1984−), 男, 副教授, 博士生导师, 从事不确定决策理论及粒计算、行为决策等研究, E-mail: qinjindongseu@126.com.