



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



线性时不变系统的分布式固定时间观测器

张钡, 吴怀宇, 朱振华, 郑秀娟, 关治洪

引用本文:

张钡, 吴怀宇, 朱振华, 郑秀娟, 关治洪. 线性时不变系统的分布式固定时间观测器[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3664–3672.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1372>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

控制与决策. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

Fal函数的改进及3种新型非线性扩张状态观测器

Advanced fal function and three novel nonlinear extended state observers

控制与决策. 2021, 36(7): 1655–1662 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1652>

基于变速趋近律的Buck型变换器抗扰动控制

Disturbance rejection control of Buck converters based on variable rate reaching law

控制与决策. 2021, 36(4): 893–900 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1073>

基于向量集逆区间滤波的故障观测器设计

Vector set inversion interval filtering based fault observer design

控制与决策. 2021, 36(12): 2973–2981 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0212>

基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

线性时不变系统的分布式固定时间观测器

张 铤^{1,2}, 吴怀宇^{1,2}, 朱振华^{1,2†}, 郑秀娟^{1,2}, 关治洪³

1. 武汉科技大学 冶金自动化与检测技术教育部工程研究中心, 武汉 430081;
2. 武汉科技大学 机器人与智能系统研究院, 武汉 430081;
3. 华中科技大学 人工智能与自动化学院, 武汉 430074)

摘要: 针对线性时不变系统的分布式状态估计问题, 基于双极限加权齐次估计理论和可观性分解方法提出一类分布式固定时间收敛观测器. 首先, 针对单输入单输出积分链式系统, 使用双极限加权齐次性方法设计集中式固定时间观测器. 然后, 基于可观性分解将线性时不变系统分为可观测和不可观测子系统, 传感器网络中每个智能体以集中式观测器为基础, 在固定时间内仅用系统输出测量值重构局部可观子状态, 利用智能体间状态信息构造一致性算法在固定时间内估计出局部不可观测子状态, 从而在固定时间内实现状态全知. 不同于已有工作, 所提出观测器不需要构造具体的李雅普诺夫函数即可给出收敛时间的显示表达式. 最后, 通过仿真实验验证所设计观测器的有效性.

关键词: 分布式估计; 线性系统; 加权齐次性; 固定时间观测器; 可观性分解; 传感器网络

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1372

引用格式: 张铤, 吴怀宇, 朱振华, 等. 线性时不变系统的分布式固定时间观测器 [J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3664-3672.

Distributed fixed-time observers for linear time-invariant systems

ZHANG Tan^{1,2}, WU Huai-yu^{1,2}, ZHU Zhen-hua^{1,2†}, ZHENG Xiu-juan^{1,2}, GUAN Zhi-hong³

(1. Engineering Research Center for Metallurgical Automation and Measurement Technology of Ministry of Education, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China; 2. Institute of Robotics and Intelligent Systems, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China; 3. School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: A class of distributed fixed-time convergent observers is designed based on the bi-limit weighted homogeneous approximation theory and observability decomposition for the distributed state estimation of linear time-invariant systems. Firstly, for a single-input-single-output integrating chain system, a centralized fixed-time observer is designed for the system using bi-limit weighted homogeneous estimation. Then, the linear time-invariant system is decomposed into observable and unobservable subsystems based on the observability decomposition. Each agent in the sensor network reconstructs local observable sub-states in a fixed time based on the centralized observer by using only the system output measurements, and then state information between the agents is used to construct a consistent algorithm to estimate the local unobservable sub-states in a fixed time, thus realizing state omniscience in a fixed time. Unlike previous works, this paper does not need to construct a specific Lyapunov function to give an expression for the convergence time. Finally, the effectiveness of the designed observer is verified by simulations.

Keywords: distributed estimation; linear systems; weighted homogeneity; fixed-time observer; observability decomposition; sensor networks

0 引言

在大型复杂网络(交通系统、电网电力调度、工业生产)中, 系统状态信息由分散在各节点的传感器观

测, 由于传感器通信距离的限制^[1-2], 集中式观测器不再适用. 为此, 出现了分布式估计问题, 其目标是设计分布式观测器, 使得观测器网络中的每个观测器节点

收稿日期: 2023-09-26; 录用日期: 2024-01-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62303360, 62073250, 62233007, 62203339); 湖北省自然科学基金项目(2023AFB619).

责任编辑: 俞立.

†通讯作者. E-mail: zhenhua_hust2016@163.com.

均能够使用自身的测量值和来自邻居节点的信息来重建系统的完整状态. 通常, 观测器节点只能访问系统的部分输出信息, 且各智能体间的通信受预先给定通信图的约束. 文献 [3] 针对观测器设计受通信图约束的问题, 给出了与通信图相关设计的可解性. 近几十年来, 分布式观测器理论一直是控制领域的热点问题^[4-7]. 文献 [4-5] 给出了基于一致性的卡尔曼滤波状态估计方法, 在估计 (卡尔曼滤波) 步骤与数据融合步骤间交替从而解决离散线性系统的分布式估计问题; 文献 [6] 针对连续线性系统的状态估计问题, 通过设计输出反馈增益和耦合增益, 提出了基于 Luenberger 的观测器; 文献 [7] 将卡尔曼可观测规范分解的思想扩展到了具有多个传感器的环境中, 每个传感器节点构建 Luenberger 观测器, 并使用一致性动力学来估计每个节点的不可观测状态部分.

需要注意的是, 文献 [4-7] 均是处理渐近收敛问题, 未考虑收敛速度. 观测器的一个关键特征是观测误差的收敛速度, 在一些特定的场景中, 要求能够在有限时间内完成状态重建^[8]. 如在飞行器姿态协同控制^[9]、多自主水下机器人一致性跟踪问题^[10]中需要快速收敛. 因此, 许多有限时间观测器^[11-14]的设计方法被相继提出, 它们可以在有限时间内使得观测误差收敛至平衡点. 文献 [11] 在 Luenberger 观测器的基础上, 增加了输出反馈和一致项的非线性项, 使用齐次性和李雅普诺夫稳定性判据的方法验证了所设计有限时间观测器的可行性; 文献 [12-13] 在文献 [11] 的基础上进行了扩展, 使用可观测性结构分解的方法, 将有限时间观测器应用于一般系统; 文献 [14] 提出了一种求解线性定常系统的分布式有限时间状态估计问题的方法, 将状态观测任务重新表述为参数估计问题. 然而, 对于有限时间观测器, 观测误差收敛时间的上界与每个智能体的初始状态有关. 在实际应用中, 初始状态值具有不确定性, 这为有限时间观测器的稳定时间估计带来了重大挑战. 为了应对这一问题, 研究人员研究了固定时间观测器, 这类观测器的显著特点在于它们能够确保观测误差的收敛时间上限与初始条件无关. 文献 [15] 建立了固定时间稳定性分析理论, 提出了一种收敛时间独立于初始状态的控制理论. 基于固定时间分析方法, 文献 [16] 针对线性多智能体系统状态估计问题, 基于固定时间 Super-twisting 算法和积分滑模面的设计提出了一类分布式固定时间观测器; 文献 [17] 提出了一种基于核的分布式固定时间分布式观测器设计方法, 研究了一般线性时不变系统的固定时间估计问题. 但是以上文献均未能给

出观测器收敛时间的显示表达式. 如何针对一般线性时不变系统设计有效的分布式固定观测器并给出收敛时间上界的数学表达式仍然有待进一步研究.

本文针对以上观测器设计中李雅普诺夫函数的构造以及收敛时间受初始状态影响的难点, 提出基于双极限加权齐次性和可观测性分解理论的分布式固定时间观测器. 与现有的分布式观测器成果相比, 本文的内容如下: 1) 相比于文献 [11-13] 的有限时间收敛观测器, 所提出观测器的观测误差收敛时间上界与初始条件无关; 2) 相比于文献 [16-17], 所提出方法用于分析观测误差系统的稳定性, 该方法不需要建立具体的李雅普诺夫函数即可给出收敛时间上界的显式表达式.

符号说明: 对于 $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in R^n$ 和 $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T \in R_+^n$, 用 $[x]_\alpha = [\text{sgn}(x_1)|x_1|^{\alpha_1} \ \text{sgn}(x_2)|x_2|^{\alpha_2} \ \dots \ \text{sgn}(x_n)|x_n|^{\alpha_n}]^T \in R^n$ 表示保号元素求幂. $\|x\|$ 为向量 x 的欧几里德范数. 定义有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. 其中: $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为节点集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边集合. 记 (i, j) 为节点 i 到节点 j 的一条边, 表示节点 i 可向节点 j 传递信息. 第 i 个节点的所有邻居的集合表示为 $\mathcal{N}_i \triangleq \{i\} \cup \{j | (j, i) \in \mathcal{E}\}$. 定义邻接矩阵 $A = (a_{i,j})_{n \times n}$, 当 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 时, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. 定义与 \mathcal{G} 相关的拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = [l_{ij}]_{N \times N}$ 为 $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ 和 $l_{ij} = -a_{ij} (j \neq i; i, j = 1, 2, \dots, N)$. 整数序列 $1, 2, \dots, n$ 用 $\overline{1, n}$ 表示. $\text{diag}(x)$ 表示主对角线元素为 x_1, x_2, \dots, x_n , 其他元素为 0 的对角矩阵, $\text{blkdiag}\{A_i\}_{i=1}^N$ 是由矩阵 A_1, A_2, \dots, A_N 组成的块对角矩阵. 对于 $n \geq 2$, 定义

$$\mathcal{J}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix}$$

1 预备知识和问题描述

考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 为状态, $f : R^n \rightarrow R^n$ 为线性函数. 记 $X(t, x_0)$ 为系统 (1) 初始条件 $x_0 \in R^n$ 下的解. 假设原点为系统 (1) 的平衡点.

1.1 预备知识

定义 1^[18] 系统 (1) 的平衡点 $x = 0$ 是全局有限时间稳定的, 若它是全局渐近稳定的, 且 $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} X(t, x_0) = 0$, 其中 $T : R^n \rightarrow R^+$ 为沉降时间

函数;若存在某个正数 T_{\max} 使得 $T(x_0) \leq T_{\max} (\forall x_0 \in R^n)$, 则系统(1)是全局固定时间稳定的.

引理1^[19] 针对系统(1),若存在满足下列条件的连续径向无界函数 $V(x): R^n \rightarrow R^+ \cup \{0\}$: $V(0) = 0$, 原点为全局有限时间收敛平衡点. 2) 存在 $0 < \mu < 1, v > 0, r_\mu > 0, r_v > 0$, 使得

$$\dot{V} = \begin{cases} -r_\mu V^{1-\mu}, & V \leq 1; \\ -r_v V^{1-v}, & V \geq 1 \end{cases}$$

成立. 则系统(1)是全局固定时间稳定的,且最大收敛时间 T_{\max} 满足

$$T(x_0) \leq T_{\max} \leq \frac{1}{\mu r_\mu} + \frac{1}{v r_v}.$$

定义2^[20] 令 $V(x): R^n \rightarrow R$ 为一向量函数. 若对于任意 $\lambda > 0$, 存在 $r = [r_1, r_2, \dots, r_n] \in R^n$, 其中 $r_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 使得 $V(x)$ 满足

$$V(A_r(\lambda)x) = \lambda^d V(x).$$

这里: $A_r(\lambda)x = [\lambda^{r_1}x_1, \lambda^{r_2}x_2, \dots, \lambda^{r_n}x_n]^T, d \in R$. 则称 $V(x)$ 关于 r 具有齐次度 d .

令 $f(x): R^n \rightarrow R^n$ 为一向量场函数. 若对于任意 $\lambda > 0$, 存在 $r = [r_1, r_2, \dots, r_n] \in R^n$, 其中 $r_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 使得向量场函数 $f(x)$ 中的任一分量 $f_i(x) (i=1, 2, \dots, n)$ 满足

$$f_i(A_r(\lambda)x) = \lambda^{d+r_i} f_i(x),$$

则称 $f(x)$ 关于 r 具有齐次度 d .

下面给出双极限加权齐次性的相关概念和双极限向量场中齐次向量的稳定性定理.

定义3^[20] 若 V 是连续的, 则 V_ℓ 是连续的且不等于0, 并对于任一紧子集 $C \subseteq R^n / \{0\}$ 和 $\forall \delta > 0$, 存在 $\lambda_\ell > 0$, 使得

$$\max_{x \in C} |\lambda^{-d_0} V(A_{r_0}(\lambda)x) - V_0(x)| \leq \delta, \forall \lambda \in (0, \lambda_0]$$

或

$$\max_{x \in C} |\lambda^{-d_\infty} V(A_{r_\infty}(\lambda)x) - V_\infty(x)| \leq \delta, \forall \lambda \geq \lambda_\infty$$

成立, 则称函数 $V(x): R^n \rightarrow R$ 相对于三元组 (r_ℓ, d_ℓ, V_ℓ) 具有 ℓ 极限齐次性 ($\ell = 0$ 或 ∞). 其中: $r_\ell = (r_{\ell,1}, r_{\ell,2}, \dots, r_{\ell,n})^T \in R_+^n$ 为权值, d_ℓ 为齐次度, $V_\ell: R^n \rightarrow R$ 为近似函数.

若对于任一紧子集 $C \in R^n / 0$ 和 $\forall \delta > 0$, 存在 $\lambda_\ell > 0$, 使得

$$\max_{x \in C} \|\lambda^{-\sigma_0} A_{r_0}^{-1}(\lambda) f(A_{r_0}(\lambda)x) - f_0(x)\| \leq \delta,$$

$$\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$$

或

$$\max_{x \in C} \|\lambda^{-\sigma_\infty} A_{r_\infty}^{-1}(\lambda) f(A_{r_\infty}(\lambda)x) - f_\infty(x)\| \leq \delta,$$

$$\forall \lambda \geq \lambda_\infty$$

成立, 且对于 $i \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma_\ell + r_{\ell,i} \leq 0, f_i$ 相对于三元组 $(r_\ell, \sigma_\ell + r_{\ell,i}, f_{\ell,i})$ 是 ℓ 极限齐次的, 则向量场函数 $f(x): R^n \rightarrow R^n$ 相对 $(r_\ell, \sigma_\ell, f_\ell)$ 具有 ℓ 极限齐次性. 其中: $r_\ell = (r_{\ell,1}, r_{\ell,2}, \dots, r_{\ell,n})^T \in R_+^n$ 为权值, σ_ℓ 为齐次度, $f_\ell = (f_{\ell,1}, f_{\ell,2}, \dots, f_{\ell,n})^T$ 为近似向量场函数.

定义4^[20] 若函数 $V(x): R^n \rightarrow R$ (或向量场函数 $f(x): R^n \rightarrow R^n$) 相对于三元组 (r_0, d_0, V_0) (或三元组 (r_0, d_0, f_0)) 具有0极限齐次性, 相对于三元组 $(r_\infty, d_\infty, V_\infty)$ (或三元组 $(r_\infty, d_\infty, f_\infty)$) 具有无穷极限齐次性, 则称函数 $V(x)$ (或向量场函数 $f(x)$) 具有双极限齐次性.

引理2^[20] 函数 $\phi(x): R^n \rightarrow R$ 和 $\xi(x): R^n \rightarrow R_+$ 均为双极限齐次函数, 其针对相同的权重 r_0 和 r_∞ , 分别具有齐次度 $d_{\phi_0}, d_{\phi_\infty}$ 和 $d_{\xi_0}, d_{\xi_\infty}$, 齐次估计函数 ϕ_0, ϕ_∞ 和 ξ_0, ξ_∞ . 若两个函数的齐次度满足 $d_{\phi_0} \geq d_{\xi_0}, d_{\phi_\infty} \leq d_{\xi_\infty}$, 且 ξ, ξ_0, ξ_∞ 为正定函数, 则必然存在 $c > 0$, 使得 $\phi(x) \leq c \xi(x) (\forall x \in R^n)$ 成立.

引理3^[20] 考虑双极限向量场 $f: R^n \rightarrow R^n$, 其相关三元组 (r_0, d_0, f_0) 和 $(r_\infty, d_\infty, f_\infty)$ 使得原点是 $f(x), f_0(x), f_\infty(x)$ 的全局线性渐近收敛平衡点. 设 d_{V_0} 和 d_{V_∞} 为实数, 使得 $d_{V_0} > \max_{1 \leq s \leq n} r_{0,s}, d_{V_\infty} > \max_{1 \leq s \leq n} r_{\infty,s}$, 则存在一阶连续可微、正向径向无界的李雅普诺夫函数 $V(x)$, 对于 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 函数 $x \mapsto \frac{\partial V}{\partial x_i}$ 是双极限齐次的, 具有相关的三元组 $(r_0, d_{v_0} - r_{0,i}, V_0)$ 和 $(r_\infty, d_{v_\infty} - r_{\infty,i}, V_\infty)$, 函数 $x \mapsto \frac{\partial V}{\partial x} f(x), x \mapsto \frac{\partial V_0}{\partial x} f_0(x), x \mapsto \frac{\partial V_\infty}{\partial x} f_\infty(x)$ 负定.

1.2 问题描述

考虑如下线性时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & x(0) = x_0; \\ y_i(t) = C_i x(t), & i \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态, $A \in R^{n \times n}$ 为系统状态矩阵, $y_i(t)$ 为第 i 个智能体能访问的系统输出向量. 本文主要解决以下问题.

问题1 给定通信拓扑 \mathcal{G} , 设计一个状态估计为 $\tilde{x}_i(t) (\forall i \in \mathcal{V})$ 的分布式固定时间观测器, 使得观测器网络中的每个节点均能够在固定时间内基于自身的测量值 $y_i(t)$ 和通过通信拓扑获得的信息正确估计出系统(2)的状态, 且不受初始状态的影响, 即 $\forall x_0 \in R^n, \forall i \in \mathcal{V}$ 存在常数 T_{\max} , 使得

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|\tilde{x}_i(t) - x(t)\| = 0, \\ \tilde{x}_i(t) = x(t), \quad \forall t > T_{\max}. \end{cases}$$

本文的控制目标是为一般线性时不变系统设计分布式固定时间观测器, 使得系统状态可在固定时间

内实现状态全知.

2 集中式固定时间观测器

为了解决分布式固定时间状态估计问题,本节考虑积分链式的集中观测器设计. 给出如下积分链式线性时不变系统:

$$\dot{x} = \bar{A}x, y = \bar{C}x. \quad (3)$$

其中: $x \in R^n$ 为系统的状态; $y \in R$ 为系统输出; 矩阵 $\bar{A} \in R^{n \times n}$ 和输出向量 $\bar{C} \in R^{1 \times n}$ 如下所示:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0].$$

系统观测矩阵满秩. 给出如下集中式固定时间观测器:

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \bar{A}z + \text{diag}(\ell)[(\bar{C}z - y)1_n]^\alpha + \\ & \text{diag}(\ell)[(\bar{C}z - y)1_n]^\beta. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $z \in R^n$ 为状态 x 的估计值; 观测器增益 $\ell \in R^n$; 幂次项 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i]^\top \in R^n, \beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i]^\top \in R^n$, 且 $\alpha_i \in (0, 1)$ 和 $\beta_i > 1$. 定义 $e = z - x$ 为系统观测误差, 由式(3)和(4), 得到观测误差系统

$$\begin{aligned} \dot{e} = f(e) = \\ \bar{A}e + \text{diag}(\ell)[(\bar{C}e)1_n]^\alpha + \text{diag}(\ell)[(\bar{C}e)1_n]^\beta. \end{aligned} \quad (5)$$

结合双极限加权齐次性相关概念可为集中式系统设计固定时间观测器, 具体定理如下.

定理 1 对于积分链式线性时不变系统(3), 观测器系统(4), 给定 $d_0 \in \left(-\frac{1}{n}, 0\right), d_\infty \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, 使得非线性幂次项指数 $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^\top, \beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^\top$. 其中: $\alpha_s = \frac{r_{0,s+1}}{r_{0,1}} = 1 + sd_0, \beta_s = \frac{r_{\infty,s+1}}{r_{\infty,1}} = 1 + sd_\infty$. 选取合适的增益 ℓ , 则存在满足双极限加权齐次性的李雅普诺夫函数 $V(e)$, 使得观测器(4)的估计误差系统(5)是全局固定时间稳定的, 且收敛时间上界 T_{\max} 满足

$$T(e_0) \leq T_{\max} \leq \frac{1}{c} \left(\frac{d_{V_\infty}}{d_\infty} - \frac{d_{V_0}}{d_0} \right).$$

证明 使用两个步骤来验证误差系统(5)的稳定性, 即能够在有限时间收敛至平衡点, 且不受初始条件的影响. 首先给出误差系统满足双极限加权齐次性的参数取值, 然后验证固定时间稳定性.

step 1: 根据幂次项的支配范围, 式(5)所示的固定时间观测器的误差动力学可简化为

$$\dot{e} = f(e) = \bar{A}e + \text{diag}(\ell)(1_n + K_1)[(\bar{C}e)1_n]^\gamma. \quad (6)$$

其中: 当 $\|(\bar{C}e)1_n\| \leq 1$ 时, 低阶幂次项处于支配地位, $\gamma = \alpha, K_1 = |(\bar{C}e)1_n|^{\beta-\alpha}$; 当 $\|(\bar{C}e)1_n\| \geq 1$ 时, 高阶幂次项处于支配地位, $\gamma = \beta, K_1 = |(\bar{C}e)1_n|^{\alpha-\beta}$. 以上两种情况中变化的系数 $K_1 \in (0, 1]$. 由定义 3, 取误差系统 $f(e)$ 的 0 极限齐次估计为

$$\dot{e} = f_0(e) = \bar{A}e + \text{diag}(\ell)[(\bar{C}e)1_n]^\alpha. \quad (7)$$

选择 $r_{0,s} = 1 + (s-1)d_0, s = \overline{1, n}$. 取 $-\frac{1}{n} < d_0 < 0$ 时, $r_{0,s} > 0$. 由定义 2, $f_0(e)$ 得到

$$\begin{aligned} f_{0,s}(A_{r_0}(\lambda)e) &= \lambda^{r_{0,s+1}}e_{s+1} + \ell_s \lambda^{r_{0,1}\alpha_s} [e_1]^{\alpha_s}, \\ \lambda^{d_0+r_{0,s}} f_{0,s}(e) &= \lambda^{r_{0,s+1}}(e_{s+1} + \ell_s [e_1]^{\alpha_s}). \end{aligned}$$

因此, 对于式(7)的 $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^\top$, 当 $\alpha_s = \frac{r_{0,s+1}}{r_{0,1}} = 1 + sd_0$ 时, $f_0(e)$ 相对权值 $r_{0,s} = 1 + (s-1)d_0$ 的齐次度为 d_0 .

取误差系统 $f(e)$ 的无穷极限齐次估计为

$$\dot{e} = f_\infty(e) = \bar{A}e + \text{diag}(\ell)[(\bar{C}e)1_n]^\beta. \quad (8)$$

同理, 对于式(8)的 $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^\top$, 当 $\beta_s = \frac{r_{\infty,s+1}}{r_{\infty,1}} = 1 + sd_\infty$ 时, $f_\infty(e)$ 相对权值 $r_{\infty,s} = 1 + (s-1)d_\infty$ 的齐次度为 d_∞ . 为了证明无穷和 0 极限齐次估计满足定义 3 的条件, 以 $f_0(e)$ 为例, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\lambda^{-d_0} A_{r_0}^{-1} f(A_{r_0}(\lambda)e) - f_0(e)\| = \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\text{diag}(\ell) \cdot \text{diag}\{\lambda^{r_{0,1}(\beta_s - \alpha_s)}\}_{s=1}^n [(e_1)1_n]^\beta\| = \\ 0 \leq \delta, \end{aligned}$$

必然存在紧子集 $C \in R^n / 0$, 常数 λ_0 和 δ , 使得 $f(e)$ 和 $f_0(e)$ 满足定义 3 零极限加权齐次性的条件. 同理, $f(e)$ 和 $f_\infty(e)$ 满足无穷极限加权齐次性的条件, 故误差系统 $f(e) : R^n \rightarrow R^n$ 相对于 $(r_0, d_0, f_0(e))$ 和 $(r_\infty, d_\infty, f_\infty(e))$ 具有双极限加权齐次性.

由于系统 (\bar{A}, \bar{C}) 可观, 必然存在增益 ℓ 使得原点是 $f_0(e)$ 和 $f_\infty(e)$ 的全局线性渐近收敛平衡点, 由文献[18]的命题 2.18, 原点也是 $f(e)$ 的全局线性渐近收敛平衡点. 故 $f(e)$ 存在一阶连续可微、正定且径向无界的李雅普诺夫函数 $V(e)$ 相对于 $(r_0, d_{V_0}, V_0(e))$ 和 $(r_\infty, d_{V_\infty}, V_\infty(e))$ 具有双极限加权齐次性. 其中: $d_{V_0} > \max_{1 \leq s \leq n} r_{0,s}, d_{V_\infty} > \max_{1 \leq s \leq n} r_{\infty,s}$. $V_0(e)$ 和 $V_\infty(e)$ 的存在性可由文献[21]的定理 2 判定. $\dot{V}(e)$ 负定且具有双极限齐次性.

step 2: 为了证明固定时间稳定性, 定义如下函数:

$$\phi(e) \triangleq V(e)^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}} + V(e)^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}, \quad (9)$$

$$\xi(e) \triangleq -\dot{V}(e) = -\frac{\partial V(e)}{\partial e} f(e). \quad (10)$$

由双极限加权齐次性证明, 得到 $\phi(e)$ 是双极限齐次

函数,相对于权值 r_0 和 r_∞ 的齐次度分别为 $d_{V_0} + d_0$ 和 $d_{V_\infty} + d_\infty$; $\xi(e)$ 是双极限齐次函数,相对于 r_0 和 r_∞ 的齐次度为 $d_{V_0} + d_0$ 和 $d_{V_\infty} + d_\infty$. 根据引理2,令

$$\phi(e) \leq \frac{1}{c} \xi(e), \quad (11)$$

其中常数 $c > 0$. 将式(9)和(10)代入(11),得到

$$\frac{\partial V(e)}{\partial e} f(e) \leq -c \left(V(e)^{\frac{d_{V_0} + d_0}{d_{V_0}}} + V(e)^{\frac{d_{V_\infty} + d_\infty}{d_{V_\infty}}} \right). \quad (12)$$

由 $f(e)$ 双极限加权齐次性证明,可以得到 $d_0 \in \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$, $d_\infty \in \left(0, -\frac{1}{n}\right)$, 从而得到

$$\frac{d_{V_0} + d_0}{d_{V_0}} < 1, \quad \frac{d_{V_\infty} + d_\infty}{d_{V_\infty}} > 1.$$

由幂次函数支配范围,式(12)可化为如下形式:

$$\frac{\partial V(e)}{\partial e} f(e) \leq \begin{cases} -cV(e)^{\frac{d_{V_0} + d_0}{d_{V_0}}}, & V(e) \leq 1; \\ -cV(e)^{\frac{d_{V_\infty} + d_\infty}{d_{V_\infty}}}, & V(e) \geq 1. \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\mu = -\frac{d_0}{d_{V_0}} \in (0, 1)$, $v = \frac{d_\infty}{d_{V_\infty}} > 0$, $r_\mu = r_v = c > 0$, 则由引理1和引理3,得到原点是系统(5)的全局固定时间收敛平衡点,观测误差系统将在固定时间内收敛至原点,且最大收敛时间 T_{\max} 满足

$$T(e_0) \leq T_{\max} \leq \frac{1}{c} \left(\frac{d_{V_\infty}}{d_\infty} - \frac{d_{V_0}}{d_0} \right). \quad (14)$$

综上所述,误差系统(5)的固定时间稳定性得证. \square

3 分布式固定时间观测器

本节研究系统(2)的分布式固定时间观测器设计问题,对于每个输出 y_i ,可观测子空间的维数 $r_i = \text{rank}(\mathcal{O}(A, C_i)) < n$,故系统状态无法从任何单个输出 y_i 中观测到. 为了实现系统(2)状态全知,本文做出如下假设.

假设1 系统 $(A, (C_1^T, C_2^T, \dots, C_N^T)^T)$ 联合可观,且通信图强连通.

使用可观测性分解将系统分为可观测子系统和不可观测子系统,并为每个部分设计一个局部观测器. 选择一个坐标变换 $x = T_i \begin{bmatrix} x_{o,i} \\ x_{u,i} \end{bmatrix}$, $T_i = [T_{o,i} \quad T_{u,i}]$, 其中 $T_{u,i}$ 的列形成 $\mathcal{O}(A, C_i)$ 核的基,有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{o,i} \\ \dot{x}_{u,i} \end{bmatrix} = T_i^{-1} A T_i \begin{bmatrix} x_{o,i} \\ x_{u,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{o,i} & 0 \\ A_{r,i} & A_{u,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{o,i} \\ x_{u,i} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$y_i = C_i T_i \begin{bmatrix} x_{o,i} \\ x_{u,i} \end{bmatrix} = [C_{o,i} \quad 0] \begin{bmatrix} x_{o,i} \\ x_{u,i} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

因此,可观测子系统

$$\dot{x}_{o,i} = A_{o,i} x_{o,i}, \quad y_i = C_{o,i} x_{o,i} \quad (17)$$

独立于 $x_{u,i}$, 其中 $\text{rank}(\mathcal{O}(A_{o,i}, C_{o,i})) = r_i$; 而不可观测子系统

$$\dot{x}_{u,i} = A_{r,i} x_{o,i} + A_{u,i} x_{u,i} \quad (18)$$

与系统测量输出无关. 对于可观测部分,可依赖系统测量输出重构状态,但是要重建不可观测部分,必须基于通信图交换节点间的信息.

3.1 可观测部分

对于可观测子系统,考虑系统(17)输出均是标量的情况,且每对 $(A_{o,i}, C_{o,i})$ 可观,因此,将集中式固定时间观测器的设计思想应用于每个观测器节点的可观测部分. 使用变换矩阵 $\theta_i \in R^{r_i \times r_i}$ 将系统化为可观测标准型 $\theta_i^{-1} A_{o,i} \theta_i = \mathcal{J}_{r_i} - p_i C_{o,i} \theta_i$, 式(17)化为

$$\dot{v}_{o,i} = \theta_i^{-1} A_{o,i} \theta_i v_{o,i} = \mathcal{J}_{r_i} v_{o,i} - p_i y_i. \quad (19)$$

其中: $C_{o,i} \theta_i = [1, 2, \dots, 0]$, p_i 为 $A_{o,i}$ 特征多项式的系数向量. 每个节点可观测部分的观测器可分为以下两种情况表示.

情况1 由式(19),得到观测器动力学

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}_{o,i} = & \\ & \mathcal{J}_{r_i} \tilde{v}_{o,i} - p_i y_i + \text{diag}(\ell_{o,i}) [(C_{o,i} \theta_i \tilde{v}_{o,i} - y_i) \mathbf{1}]^{\alpha_i} + \\ & \text{diag}(\ell_{o,i}) [(C_{o,i} \theta_i \tilde{v}_{o,i} - y_i) \mathbf{1}]^{\beta_i}. \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $\alpha_i = [1 + d_{o,0,i} \quad \dots \quad 1 + s_i d_{o,0,i}]^T$, $d_{o,0,i} \in \left(-\frac{1}{r_i}, 0\right)$; $\beta_i = [1 + d_{o,\infty,i} \quad \dots \quad 1 + s_i d_{o,\infty,i}]^T$, $s_i = \frac{1}{\bar{1}, r_i}$, $d_{o,\infty,i} \in \left(0, \frac{1}{r_i}\right)$.

情况2 由系统可观子系统(17),得到

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{o,i} = & \tilde{A}_{o,i} \tilde{x}_{o,i} - \tilde{p}_i y_i + L_{o,i} [(C_{o,i} \tilde{x}_{o,i} - y_i) \mathbf{1}]^{\alpha_i} + \\ & L_{o,i} [(C_{o,i} \tilde{x}_{o,i} - y_i) \mathbf{1}]^{\beta_i}. \end{aligned} \quad (21)$$

其中: $\tilde{A}_{o,i} = \theta_i \mathcal{J}_{r_i} \theta_i^{-1}$, $\tilde{p}_i = \theta_i p_i$, $L_{o,i} = \theta_i \text{diag}(\ell_{o,i})$. 由式(19)和(20),得到观测误差动力学

$$\begin{aligned} \dot{e}_{o,i} = & \mathcal{J}_{r_i} e_{o,i} + \text{diag}(\ell_{o,i}) [(e_{o,i,1}) \mathbf{1}]^{\alpha_i} + \\ & \text{diag}(\ell_{o,i}) [(e_{o,i,1}) \mathbf{1}]^{\beta_i}. \end{aligned} \quad (22)$$

将第2节的集中式固定时间观测器设计方法应用于系统可观测部分的分布式固定时间观测器的设计中,可验证可观测子系统的观测误差动力学能够在固定时间内收敛至平衡点,且不受初始状态的影响.

3.2 不可观测部分

对于一个大规模的系统,完整的状态估计可能是一个高维数. 然而,这可通过每个节点的测量输入已有一些系统状态的信息来缓解,因此不必从其邻居那里接收完整的状态估计,而只需接收其自身无法重建的部分. 将该思想用于不可观测子系统的状态重建,

基于系统不可观测子系统(18),给出如下固定时间收敛观测器动力学方程:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{u,i} &= A_{r,i}\tilde{x}_{o,i} + A_{u,i}\tilde{x}_{u,i} - k_i \sum_{j \in N_i} (\tilde{x}_{u,i} - T_{u,i}^T \tilde{x}_j) - \\ &\left[\sum_{j \in N_i} (\tilde{x}_{u,i} - T_{u,i}^T \tilde{x}_j) \right]^{\gamma_i} - \\ &\left[\sum_{j \in N_i} (\tilde{x}_{u,i} - T_{u,i}^T \tilde{x}_j) \right]^{\eta_i}. \end{aligned} \quad (23)$$

其中: $\tilde{x}_{u,i} \in R^{n-r_i}$ 为不可观测子状态 $x_{u,i}$ 的估计值, $k_i \in R$ 为一致性增益, $\gamma_i \in (0, 1)$, $\eta_i > 1$. 若每个节点均正确估计了其可观测的部分,则线性项推动节点达到一致性,从而得到正确的估计,而非线性项的增加推动误差系统在固定时间内收敛至平衡点.

定义不可观测子系统观测误差 $e_{u,i} = \tilde{x}_{u,i} - x_{u,i}$, 由式(18)和(23),得到不可观测子系统的观测误差动力学

$$\begin{aligned} \dot{e}_{u,i} &= A_{r,i}e_{o,i} + A_{u,i}e_{u,i} - \\ &k_i \sum_{j \in N_i} (e_{u,i} - T_{u,i}^T (T_{o,j}e_{o,j} + T_{u,j}e_{u,j})) - \\ &\left[\sum_{j \in N_i} (e_{u,i} - T_{u,i}^T (T_{o,j}e_{o,j} + T_{u,j}e_{u,j})) \right]^{\gamma_i} - \\ &\left[\sum_{j \in N_i} (e_{u,i} - T_{u,i}^T (T_{o,j}e_{o,j} + T_{u,j}e_{u,j})) \right]^{\eta_i}. \end{aligned} \quad (24)$$

由式(24),得到整个观测器网络的不可观测误差系统

$$\begin{aligned} \dot{E}_u &= (A_u - kT_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u)E_u + \\ &(A_r + kT_u^T(A \otimes I)T_o)E_o - \\ &[T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u E_u - T_u^T(A \otimes I)T_o E_o]^{\gamma} - \\ &[T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u E_u - T_u^T(A \otimes I)T_o E_o]^{\eta}, \\ E_o &= [e_{o,1}^T \quad e_{o,2}^T \quad \dots \quad e_{o,N}^T]^T, \\ E_u &= [e_{u,1}^T \quad e_{u,2}^T \quad \dots \quad e_{u,N}^T]^T. \end{aligned} \quad (25)$$

其中: $A_u = \text{blkdiag}\{A_{u,i}\}_{i=1}^N$, $T_u = \text{blkdiag}\{T_{u,i}\}_{i=1}^N$, $T_o = \text{blkdiag}\{T_{o,i}\}_{i=1}^N$, $\gamma = [\gamma_1^T, \gamma_2^T, \dots, \gamma_N^T]^T$, $\eta = [\eta_1^T, \eta_2^T, \dots, \eta_N^T]^T$, $I \in R^{n \times n}$. 若所有节点均正确估计了其可观测子空间($E_o = 0$),则式(25)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{E}_u &= g(E_u) = \\ &(A_u - kT_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u)E_u + [T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u E_u]^{\gamma} - \\ &[T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u E_u]^{\eta}. \end{aligned} \quad (26)$$

下面将证明不可观测误差系统满足固定时间稳定性定理,观测器网络中每个节点将正确估计出其不可观测子状态.

命题 1 若系统(2)是联合可观测的,且通信图是强连通的,则存在一个正定对角矩阵 P ,使得

$$-T_u^T(\mathcal{L}^T \otimes I)T_u P - P T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u < 0.$$

定理 2 对于不可观测子系统(18),观测器动力学(23),给定 $d_{u,0} \in \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$, $d_{u,\infty} \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$,使得非线性幂次项指数 $\gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_N]^T$, $\eta = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_N]^T$. 其中: $\gamma_{i,s} = \frac{1 + s d_{u,0,i}}{1 + (s-1)d_{u,0,i}}$, $\eta_{i,s} = \frac{1 + s d_{u,\infty,i}}{1 + (s-1)d_{u,\infty,i}}$. 假设命题 1 成立,得到原点是观测器网络误差系统的全局渐近收敛点,则存在满足双极限加权齐次性的李雅普诺夫函数 $V_u(E_u)$,证得观测器动力学(26)的不可观测误差系统满足固定时间收敛稳定性,且收敛时间上界 $T_{u,\max}$ 满足

$$T(e_{u,0}) \leq T_{u,\max} \leq \frac{1}{c_u} \left(\frac{dV_{u,\infty}}{d_{u,\infty}} - \frac{dV_{u,0}}{d_{u,0}} \right).$$

证明 由幂次项函数的支配范围,误差系统 $g(E_u)$ 的 0 极限齐次估计为

$$\dot{E}_u = g_0(E_u) = -[T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u E_u]^{\gamma}. \quad (27)$$

选择 $r_{u,0,s} = \mathbf{1} + \text{diag}(s-1)d_{u,0}$, 其中 $d_{u,0} = [d_{u,0,1}, d_{u,0,2}, \dots, d_{u,0,N}]^T$. 由定义 3,得到 $g_0(E_u)$ 的每个节点分量 $g_{0,i}(E_u)$ 的齐次性证明如下:由

$$\begin{aligned} g_{0,i,s}(A_{r_{u,0,i}}(\lambda)E_u) &= \\ \text{diag}\{\lambda^{r_{u,0,i,s} + d_{u,0,i}}\}_{s=1}^{n-r_i} g_{0,i,s}(E_u), \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} \text{diag}\{\lambda^{r_{u,0,i,s} \gamma_{i,s}}\}_{s=1}^{n-r_i} g_{0,i,s}(E_u) &= \\ \text{diag}\{\lambda^{r_{u,0,i,s} + d_{u,0,i}}\}_{s=1}^{n-r_i} g_{0,i,s}(E_u). \end{aligned}$$

故当 $\gamma_{i,s} = \frac{1 + s d_{u,0,i}}{1 + (s-1)d_{u,0,i}} (\forall i \in \{1, 2, \dots, N\})$, $s = \overline{1, n - r_i}$ 时, $g_0(E_u)$ 相对权值 $r_{u,0,s}$ 的齐次度为 $d_{u,0}$.

误差系统 $g(E_u)$ 的无穷极限齐次估计为

$$\dot{E}_u = g_{\infty}(E_u) = -[T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u E_u]^{\eta}. \quad (28)$$

同 0 极限齐次估计的证明,故当 $\eta_{i,s} = \frac{1 + s d_{u,\infty,i}}{1 + (s-1)d_{u,\infty,i}} (\forall i \in \{1, 2, \dots, N\})$, $s = \overline{1, n - r_i}$ 时, $g_{\infty}(E_u)$ 相对权值 $r_{u,\infty,s}$ 的齐次度为 $d_{u,\infty}$. 为了证明不可观测子系统的 0 极限齐次估计 $g_0(E_u)$ 和无穷极限齐次估计 $g_{\infty}(E_u)$ 满足双极限加权齐次性,以 $g_0(E_u)$ 为例,由于

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\lambda^{-d_{u,0}} A_{r_{u,0}}^{-1}(\lambda)g(A_{r_{u,0}}(\lambda)E_u) - g_0(E_u)\| &= \\ 0 &\leq \delta, \end{aligned}$$

由定义 3 可知,必然存在紧子集 $C \in R^{\sum_{i=1}^N (n-r_i)} / 0$ 、常数 λ_0 和 δ ,使得 $g(E_u)$ 和 $g_0(E_u)$ 满足双极限加权齐次性的条件. 同理, $g(E_u)$ 和 $g_{\infty}(E_u)$ 满足无穷极限加权

齐次性的条件,故误差系统 $g(E_u) : R^{\sum_{i=1}^N(n-r_i)} \rightarrow R^{\sum_{i=1}^N(n-r_i)}$ 相对于 $(r_{u,0}, d_{u,0}, g_0(E_u))$ 和 $(r_{u,\infty}, d_{u,\infty}, g_\infty(E_u))$ 具有双极限加权齐次性.

可从文献[13]命题1的证明中推断出 $-T_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u$ 是霍尔维兹矩阵,存在足够高的一致性增益 $k_1, k_2, \dots, k_N < 0$,使得矩阵 $A_u - kT_u^T(\mathcal{L} \otimes I)T_u$ 是稳定的,故原点是 $g(E_u), g_0(E_u), g_\infty(E_u)$ 的全局线性渐近收敛平衡点. 由于原点是 $g(E_u), g_0(E_u), g_\infty(E_u)$ 的全局线性渐近收敛平衡点,必然存在一阶连续可微、正定且径向无界的李雅普诺夫函数 $V_u(E_u)$ 相对于 $(r_{u,0}, d_{V_{u,0}}, V_{u,0}(E_u))$ 和 $(r_{u,\infty}, d_{V_{u,\infty}}, V_{u,\infty}(E_u))$ 具有双极限加权齐次性,其中 $V_{u,0}(E_u)$ 和 $V_{u,\infty}(E_u)$ 的存在性可由文献[21]的引理2判定, $\dot{V}_u(E_u)$ 负定且具有双极限齐次性. 定义如下函数:

$$\phi_u(E_u) \triangleq V_u(E_u) \frac{d_{V_{u,0}} + d_{u,0}}{d_{V_{u,0}}} + V_u(E_u) \frac{d_{V_{u,\infty}} + d_{u,\infty}}{d_{V_{u,\infty}}}, \quad (29)$$

$$\xi_u(E_u) \triangleq -\dot{V}_u(E_u) = -\frac{\partial V_u(E_u)}{\partial E_u} g(E_u). \quad (30)$$

由双极限加权齐次性证明,得到 $\phi_u(E_u)$ 是双极限齐次函数,相对于权值 $r_{u,0}$ 和 $r_{u,\infty}$ 的齐次度分别为 $d_{V_{u,0}} + d_{u,0}$ 和 $d_{V_{u,\infty}} + d_{u,\infty}$; $\xi_u(E_u)$ 是双极限齐次函数,相对于 $r_{u,0}$ 和 $r_{u,\infty}$ 的齐次度分别为 $d_{V_{u,0}} + d_0$ 和 $d_{V_{u,\infty}} + d_{u,\infty}$. 根据引理2,令

$$\phi_u(E_u) \leq \frac{1}{c_u} \xi_u(E_u), \quad (31)$$

其中常数 $c_u > 0$. 将式(29)和(30)代入(31),得到

$$\frac{\partial V_u(E_u)}{\partial E_u} g(E_u) \leq -c_u \left(V_u(E_u) \frac{d_{V_{u,0}} + d_{u,0}}{d_{V_{u,0}}} + V_u(E_u) \frac{d_{V_{u,\infty}} + d_{u,\infty}}{d_{V_{u,\infty}}} \right). \quad (32)$$

由 $f(e)$ 双极限加权齐次性证明,得到

$$\frac{d_{V_{u,0}} + d_{u,0}}{d_{V_{u,0}}} < 1, \quad \frac{d_{V_{u,\infty}} + d_{u,\infty}}{d_{V_{u,\infty}}} > 1, \\ d_{u,0} \in \left(-\frac{1}{n}, 0 \right), \quad d_{u,\infty} \in \left(0, \frac{1}{n} \right).$$

由幂次函数支配范围,式(32)可化为如下形式:

$$\frac{\partial V_u(E_u)}{\partial E_u} g(E_u) \leq \begin{cases} -c_u V_u(E_u) \frac{d_{V_{u,0}} + d_{u,0}}{d_{V_{u,0}}}, & V_u(E_u) \leq 1; \\ -c_u V_u(E_u) \frac{d_{V_{u,\infty}} + d_{u,\infty}}{d_{V_{u,\infty}}}, & V_u(E_u) \geq 1. \end{cases} \quad (33)$$

其中: $\mu_u = -\frac{d_{u,0}}{d_{V_{u,0}}} \in (0, 1), v = \frac{d_{u,\infty}}{d_{V_{u,\infty}}} > 0, r_{v_u} = r_{V_u} = c_u > 0$, 由引理1和引理3,得到原点是不可观测子系统的全局固定时间收敛平衡点,观测误差将在固定时

间内收敛至原点,最大收敛时间 $T_{u,\max}$ 满足

$$T(e_{u,0}) \leq T_{u,\max} \leq \frac{1}{c_u} \left(\frac{d_{V_{u,\infty}}}{d_{u,\infty}} - \frac{d_{V_{u,0}}}{d_{u,0}} \right). \quad (34)$$

综上所述,误差系统(22)和(26)的固定时间稳定性得证,故分布式系统的可观测部分和不可观测部分均能够在固定时间内被观测器观测到. \square

4 仿真

给定如下系统动力学矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

每个观测器节点的输出矩阵为

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0], \quad C_2 = [2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], \\ C_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad C_4 = [2 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0].$$

由系统状态矩阵和输出矩阵可得到每个观测器的观测矩阵不满秩 ($r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = 5, r_4 = 5$),故观测器不能从单个输出来重构出系统完整状态,需要借助相邻节点间的信息交换. 图1为观测器网络中每个节点间的通讯拓扑图.

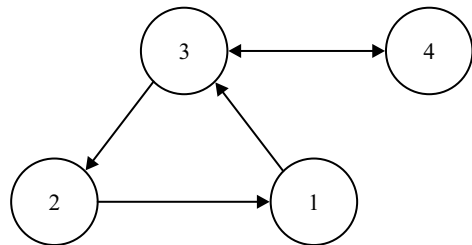


图1 分布式观测器的通信拓扑图

对于系统可观测子系统(18),选择观测器增益 $\ell_{o,1} = [3; 5], \ell_{o,2} = [4; 3], \ell_{o,3} = [5; 10; 10; 5; 1], \ell_{o,4} = [5; 10; 10; 5; 1]$. 为了选取合适的非线性项幂次 α_i 和 β_i 的值,令 $d_{o,0,1} = d_{o,0,2} = -0.4, d_{o,0,3} = d_{o,0,4} = -0.15, d_{o,\infty,1} = d_{o,\infty,2} = 0.4, d_{o,\infty,3} = d_{o,\infty,4} = 0.15$.

若观测器正确估计了系统可观测子状态,即 $E_o = 0$,则不可观测部分的观测器一致项增益为 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$. 非线性项 γ_i 和 η_i 的值由齐次度 $d_{u,0}$ 和 $d_{u,\infty}$ 决定,选择 $d_{u,0,1} = d_{u,0,2} = -0.2, d_{u,0,3} = d_{u,0,4} = -0.7, d_{u,\infty,1} = d_{u,\infty,2} = 0.2, d_{u,\infty,3} = d_{u,\infty,4} = 0.7$. 由式(14)和(34),得到系统可观测和不可观测部分的观测误差收敛时间上界分别为19.33 s和6.43 s.

本节将所提出分布式固定时间观测器与有限时间观测器进行对比. 图2和图3展示了各智能体的可

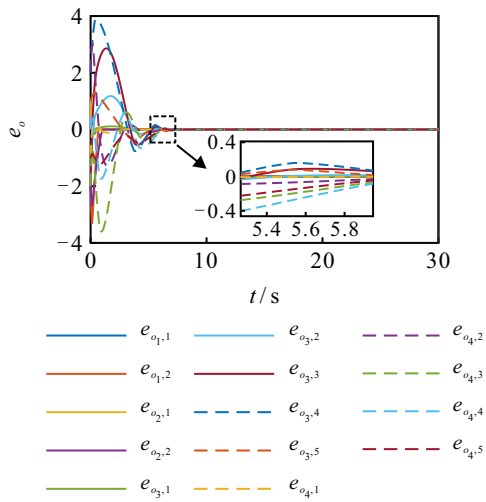


图2 固定时间观测器可观测部分观测误差

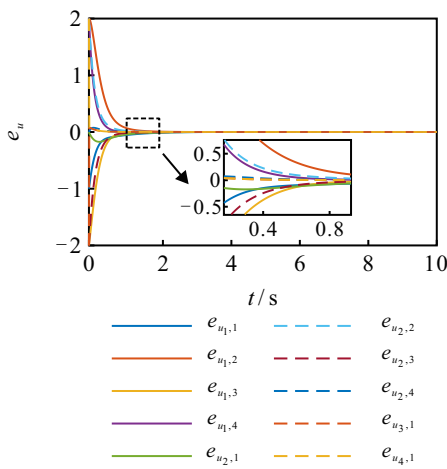


图3 固定时间观测器不可观测部分观测误差

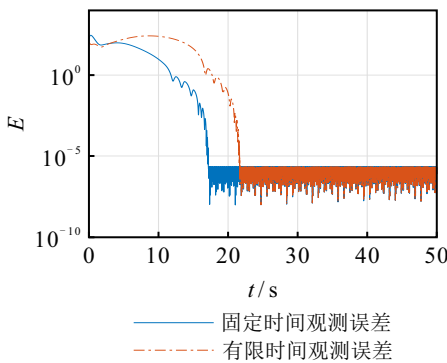


图4 对数标度下初始状态为 x_0 时观测误差变化过程

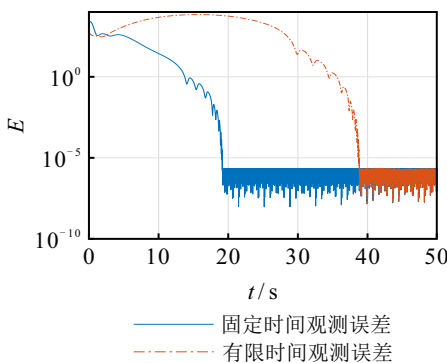


图5 对数标度下初始状态为 $5x_0$ 时观测误差变化过程

观测和不可观测部分的固定时间观测器均能够在固定时间内正确重构系统状态. 图4为所提出固定时间观测器和有限时间收敛观测器在初始状态为 $x_0 = [-44; 18; -46; 35; 22; -43]$ 时的观测误差收敛曲线. 图5为固定时间收敛和有限时间收敛观测器在初始状态为 $5x_0$ 的观测误差变化过程. 由图2~图5可见: 所提出观测器在初始条件波大的情况下, 观测性能稳定; 而有限时间观测器受初始状态的影响会使得收敛时间大幅度增加. 表1为不同初始状态下各观测器的收敛时间. 进一步分析表1可以发现: 不同于有限时间观测器, 所提出固定时间观测器独立于初始状态, 这意味着固定时间观测器在不同初始状态下均能够稳定地估计系统状态. 综上所述, 所提出分布式固定时间观测器在系统状态估计的准确性和收敛速度方面具有优势.

表1 不同初始状态下各观测器的收敛时间

初始状态范围	有限时间	固定时间 $T_{o,max} \leq 19.33$
x_0	22.78	17.32
$5x_0$	38.23	18.61
$10x_0$	46.08	19.11

5 结 论

针对一般线性时不变系统的状态估计问题, 本文利用加权齐次性和可观测性结构分解给出了一类分布式固定时间观测器设计, 其中分布式观测器节点间的信息交换受到预先选定的通信图的约束. 所设计观测器保证了误差系统在不受到初始状态影响的情况下, 能够在固定时间内收敛. 通过双极限加权齐次性的方法, 建立了不需要构建具体李雅普诺夫函数的稳定性分析方法, 并通过数值模拟对所提出观测器进行了有效性验证.

所提出分布式固定时间观测器没有考虑扰动和通信延迟等因素的影响, 是在强连通拓扑图条件下设计的. 但是一旦实际通信网络存在延迟和外界扰动, 有向图的连通性无法满足条件时, 如何设计有效的解决方案是一个值得关注的问题. 在未来的工作中, 将针对上述问题开展进一步的研究.

参考文献 (References)

[1] Park S, Martins N C. Design of distributed LTI observers for state omniscience[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(2): 561-576.
 [2] Ugrinovskii V. Conditions for detectability in distributed consensus-based observer networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(10): 2659-2664.

- [3] Park S, Martins N C. Necessary and sufficient conditions for the stabilizability of a class of LTI distributed observers[C]. Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control. Maui, 2012: 7431-7436.
- [4] Olfati-Saber R. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters[C]. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Seville, 2006: 8179-8184.
- [5] Olfati-Saber R. Distributed Kalman filtering for sensor networks[C]. Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, 2007: 5492-5498.
- [6] Kim T, Shim H, Cho D D. Distributed Luenberger observer design[C]. Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, 2016: 6928-6933.
- [7] Mitra A, Sundaram S. An approach for distributed state estimation of LTI systems[C]. Proceedings of the 54th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, 2016: 1088-1093.
- [8] Li G F, Lv J H, Zhu G L, et al. Distributed observer-based cooperative guidance with appointed impact time and collision avoidance[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(14): 6976-6993.
- [9] 刘洋, 井元伟, 刘晓平, 等. 非线性系统有限时间控制研究综述[J]. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 1-12. (Liu Y, Jing Y W, Liu X P, et al. Survey on finite-time control for nonlinear systems[J]. Control Theory & Applications, 2020, 37(1): 1-12.)
- [10] 王敏, 倪俊, 时昊天. 基于分布式观测器的多自主水下机器人确定学习控制[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 388-394. (Wang M, Ni J, Shi H T. Deterministic learning control of multiple autonomous underwater vehicles based on a distributed observer[J]. Control and Decision, 2023, 38(2): 388-394.)
- [11] Silm H, Ushirobira R, Efimov D, et al. A note on distributed finite-time observers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(2): 759-766.
- [12] Silm H, Ushirobira R, Efimov D, et al. Design of a distributed finite-time observer using observability decompositions[C]. Proceedings of the 18th European Control Conference. Naples, 2019: 1816-1821.
- [13] Silm H, Efimov D, Michiels W, et al. A simple finite-time distributed observer design for linear time-invariant systems[J]. Systems & Control Letters, 2020, 141: 104707.
- [14] Ortega R, Nuño E, Bobtsov A. Distributed observers for LTI systems with finite convergence time: A parameter-estimation-based approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(10): 4967-4974.
- [15] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [16] 颜廷若, 徐旭. 多智能体系统固定时间一致性积分滑模控制[J]. 控制理论与应用, DOI: 10.7641/CTA.2023.21024. (Yan T R, Xu X. Fixed-time integral sliding consensus control for multi-agent systems. Control Theory & Applications, DOI: 10.7641/CTA.2023.21024.)
- [17] Ge P D, Li P, Chen B L, et al. Fixed-time convergent distributed observer design of linear systems: A kernel-based approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(8): 4932-4939.
- [18] Polyakov A, Efimov D, Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach[J]. Automatica, 2015, 51: 332-340.
- [19] 杨峰, 韦常柱, 吴荣, 等. 一阶不确定系统的固定时间收敛扰动观测器[J]. 控制与决策, 2019, 34(5): 917-926. (Yang F, Wei C Z, Wu R, et al. Fixed-time convergent disturbance observer for first-order uncertain system[J]. Control and Decision, 2019, 34(5): 917-926.)
- [20] Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2008, 47(4): 1814-1850.
- [21] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field[J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(6): 467-473.

作者简介

张镞(1999—), 女, 硕士生, 从事分布式估计的研究, E-mail: ztxt9912@163.com;

吴怀宇(1961—), 男, 教授, 博士, 从事服务机器人及其控制、机器学习等研究, E-mail: wuhy@wust.edu.cn;

朱振华(1990—), 男, 讲师, 博士, 从事分布式协调控制、有限时间控制等研究, E-mail: zhenhua_hust2016@163.com;

郑秀娟(1986—), 女, 副教授, 博士, 从事信息物理系统的状态估计、故障诊断等研究, E-mail: zhengxj@wust.edu.cn;

关治洪(1955—), 男, 教授, 博士, 从事类脑计算与混杂智能、非线性系统与复杂网络、人工智能等研究, E-mail: zhguan@hust.edu.cn.