



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION

基于事件相关间歇控制的时滞复杂网络有限时间同步

王健安, 杨泽林, 王昕, 张捷, 李明杰

引用本文:

王健安, 杨泽林, 王昕, 张捷, 李明杰. 基于事件相关间歇控制的时滞复杂网络有限时间同步[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3673–3680.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1113>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty
控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

纵向速度和艏向角受限的水面艇有限时间协同路径跟踪

Finite-time cooperative path following of surface vessels with surge velocity and yaw angle constraints
控制与决策. 2021, 36(2): 363–370 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0977>

孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid
控制与决策. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制

Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation
控制与决策. 2021, 36(5): 1078–1086 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0820>

一类非线性大系统分散自适应预设性能有限时间跟踪控制

Decentralized adaptive prescribed performance finite-time tracking control for a class of large-scale nonlinear systems
控制与决策. 2020, 35(12): 3045–3052 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0623>

基于事件相关间歇控制的时滞复杂网络有限时间同步

王健安^{1,2†}, 杨泽林^{1,2}, 王昕^{1,2}, 张捷^{1,2}, 李明杰^{1,2}

(1. 先进控制与装备智能化山西省重点实验室, 太原 030024;

2. 太原科技大学 电子信息工程学院, 太原 030024)

摘要: 研究基于事件相关间歇控制机制的时滞复杂网络的有限时间同步问题. 设计一种有限时间事件相关的间歇控制机制, 引入两个有限时间收敛的边界函数, 构建三个非负实数域(工作区域、休息区域、缓冲区域), 间歇控制的工作与休息区间取决于 Lyapunov 函数轨迹与预设区域的关系. 相比于现有的事件相关间歇控制, 所提出的控制机制具有更快的收敛速度. 基于有限时间稳定性理论, 给出实现网络有限时间同步的充分条件, 并对停息时间进行准确估计. 最后通过数值仿真验证理论结果的有效性.

关键词: 时滞复杂网络; 事件相关; 间歇控制; 有限时间; 同步; 边界函数

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1113

引用格式: 王健安, 杨泽林, 王昕, 等. 基于事件相关间歇控制的时滞复杂网络有限时间同步[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3673-3680.

Finite-time synchronization of delayed complex network under event-dependent intermittent control

WANG Jian-an^{1,2†}, YANG Ze-lin^{1,2}, WANG Xin^{1,2}, ZHANG Jie^{1,2}, LI Ming-jie^{1,2}

(1. Shanxi Key Laboratory of Advanced Control and Equipment Intelligence, Taiyuan 030024, China; 2. School of Electronic Information Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: This article investigates the finite-time synchronization problem of a delayed complex network based on an event-dependent-intermittent control mechanism. A finite-time event-dependent intermittent control mechanism is designed. Two boundary functions with finite-time convergence characteristics are introduced to construct three non-negative real number domains (workspace domain, rest region, buffer region), and the working and resting intervals of intermittent control depend on the relationship between the Lyapunov function trajectory and the preset region. Compared to existing event-dependent intermittent control, the proposed control mechanism has a faster convergence speed. Some sufficient conditions for achieving finite-time synchronization are given based on finite-time stability theory, and the settling time is accurately estimated. Finally, numerical simulations have verified the effectiveness of theoretical results.

Keywords: delayed complex network; event-dependent; intermittent control; finite-time; synchronization; boundary function

0 引言

随着以互联网为代表的网络信息技术的快速发展,人类社会已经迈入了复杂网络时代. 从代数图论来看,由大量节点和连接节点间的边构成的复杂综合体称为复杂网络. 作为一门交叉学科,复杂网络在自然科学、社会科学、工程技术等诸多方面都有诸多应用^[1-3]. 同步现象作为复杂网络的典型动力学特征之

一,引起了学者们的广泛关注. 一般情况下,复杂网络中的节点难以自发地通过自身网络耦合特性实现同步. 因此,反馈控制^[4]、自适应控制^[5]、牵制控制^[6]、脉冲控制^[7]和事件触发控制^[8]等方法被广泛应用于复杂网络同步问题.

间歇控制是一种在时间域上不连续的控制方法,即把控制时间划分成一系列连续的周期,每个周期

收稿日期: 2023-08-05; 录用日期: 2024-02-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62003077); 山西省重点研发计划项目(202102020101002, 202202150401005); 山西省基础研究计划(自由探索类)面上项目(20210302123210, 202203021222186); 中央引导地方科技发展资金项目(YDZJSX20231A047).

责任编辑: 吴立刚.

†通讯作者. E-mail: jiananwang@tyust.edu.cn.

分为工作区间和休息区间. 间歇控制器在工作区间对系统进行控制, 在休息区间对系统不实施控制. 与连续时间控制策略相比, 间歇控制具有较低的控制成本、较少的信息传输量和便于实施等特性, 很容易在工程中得以应用. Xia等^[9]首次将周期间歇控制用于研究时滞耦合复杂网络的牵制同步问题. 文献[10-11]采用周期性间歇控制策略研究了复杂网络的同步问题, 要求在每个控制周期内工作时间与休息时间的区间长度恒定. 然而, 完全的周期性要求在实际应用中难以满足. 为了克服周期性控制方案的局限性, Liu等^[12-13]将周期间歇控制推广到非周期间歇情形. Wang^[14]通过设计一种非周期间歇牵制控制器, 实现了混合耦合时滞复杂网络的全局指数同步. Guo等^[15]研究了一类随机耦合复杂网络的同步问题, 设计了一种非线性非周期间歇控制器并提出实现网络同步的充分条件. 针对具有时滞的随机复杂网络非周期间歇控制同步问题, Guo等^[16]通过放松非周期间歇约束条件, 降低了结论的保守性^[16]. 值得注意的是, 上述文献中的控制器需要在一个固定有限时间间隔的序列下被激活, 具有较强的时间依赖性, 可将其称为时间相关间歇控制.

实际上, 上述间歇控制机制除了工作区间需要预先设定, 还可能存在不必要的工作区间, 这将造成资源浪费. 为了克服时间相关间歇控制的不足, 事件相关间歇控制策略被提出, 即控制器在一个预先给定的事件下被激活^[17]. He等^[18]针对有向拓扑上的线性耦合复杂网络, 提出了一种基于事件的非周期性间歇牵制同步控制策略, 保证了复杂网络的全局指数同步. Ding等^[19]设计了一种事件相关间歇控制策略, 其控制器是否工作取决于所设计的Lyapunov函数与非负实域之间的关系. Wang等^[20]进一步采用事件相关的自适应间歇牵制机制研究了非线性耦合复杂网络的同步问题. 与时间相关的间歇控制策略相比, 事件相关间歇控制不需要预先给定工作与休息时间, 而是根据事件的发生进行控制, 有效避免了不必要的资源消耗.

另一方面, 人们通常期望系统能够在短时间内实现控制目标, 因此复杂网络的有限时间同步问题成为一个研究热点^[21-27]. 基于有限时间稳定性理论和周期间歇控制方法, Fan等^[22]给出了时变时滞耦合复杂网络快速同步的充分条件. Mei等^[23]通过设计周期性间歇控制器, 实现了两个复杂动态网络的有限时间同步. Jing等^[24]利用非周期间歇控制方法研究了复杂动态网络的有限时间同步问题, 并提出了一个新的

有限时间稳定性引理以减少收敛时间. Wang等^[26]提出了一种自适应非周期间歇控制器, 用于研究具有混合时滞的随机复杂网络的有限时间同步问题. 该控制器能够在有限时间内实现同步, 即使被控对象的特性未知或扰动特性范围较宽. 然而, 现有研究成果仅考虑事件相关间歇控制下复杂网络的渐近或指数同步行为, 基于事件相关间歇控制的有限时间同步问题还鲜有报道.

基于上述分析, 本文探讨事件相关间歇控制机制下时滞复杂网络的有限时间同步问题. 与以往文献相比, 本文的主要工作如下: 1) 为进一步提升事件相关间歇控制机制的收敛速度, 设计一种有限时间事件相关的间歇控制机制. 间歇控制的工作时间不再预先设定, 而是由设计的Lyapunov函数与两个预设的有限时间收敛特性的边界函数之间的关系决定, 放松了间歇控制工作时间的严格约束. 2) 在所提出的间歇控制机制的基础上, 设计了一种有限时间事件相关间歇控制器, 运用有限时间稳定性理论, 得到了保证时滞复杂网络有限时间同步的充分条件及停息时间.

1 网络模型与预备条件

考虑由 N 个相同节点构成的时滞耦合复杂网络, 其模型描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & f(x_i(t)) + c_0 \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t) + \\ & c_1 \sum_{j=1}^N b_{ij} x_j(t - \tau(t)) + u_i(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N$, $x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in R^n$ 为节点 i 在 t 时刻的状态, $f: R \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 为描述动态节点行为的连续可微矢量函数; $\tau(t)$ 为网络的耦合时滞; $u_i(t)$ 为第 i 个节点的控制; $c_0, c_1 > 0$ 分别为网络的无时滞和时滞耦合强度; $A = (a_{ij})_{N \times N}$ 和 $B = (b_{ij})_{N \times N}$ 为节点间的外部耦合矩阵. 若节点 i 与节点 j ($i \neq j$) 之间存在无耦合时滞边, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$; 若节点 i 与节点 j ($i \neq j$) 之间存在耦合时滞边, 则 $b_{ij} > 0$, 否则 $b_{ij} = 0$. A 和 B 满足耗散性条件, 即对角元素满足 $a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$, $b_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}$. A 和 B 不要求是对称或不可约的, 且这两个矩阵可不相同, 即 $A \neq B$.

孤立节点动力学方程为

$$\dot{s}(t) = f(s(t)), \quad (2)$$

它可以是一个周期轨迹、平衡点或混沌轨迹. 设 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ 为系统的同步误差.

定义1 若存在一个稳定时间 $T^* > 0$, 对于任意时间 $t > T^*$ 都有 $e_i(t) = 0$ 存在, 则称网络(1)在有限时间 T^* 内实现同步.

假设1^[14] 对于任意的 $x(t), y(t) \in R^n$, 总存在正常数 $h > 0$, 使得如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & [y(t) - x(t)]^T [f(y(t)) - f(x(t))] \leq \\ & h[y(t) - x(t)]^T [y(t) - x(t)]. \end{aligned} \quad (3)$$

假设2^[26] 时变时滞 $\tau(t)$ 为可微函数, 且 $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \sigma < 1$, 其中 σ 是常数.

引理1^[6] 若 $Q(x) = Q^T(x), R(x) = R^T(x)$, 则线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

等价于下面的两个条件:

- 1) $Q(x) < 0, R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) < 0;$
- 2) $R(x) < 0, Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) < 0.$

引理2^[6] 假设 A, B 是 N 阶 Hermite 矩阵, 令 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_N, \omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_N$ 和 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_N$ 分别为 $A, B, A + B$ 的特征值. 对于 $i = 1, 2, \dots, N$ 有 $\varepsilon_i + \omega_N \leq \gamma_i \leq \varepsilon_i + \omega_1$.

引理3^[24] 假定存在任意向量 $x_1, x_2, \dots, x_N \in R^n, N$ 是正实数且 $0 < s < 2$ 使得如下不等式成立:

$$\sum_{i=1}^N |x_i|^s \geq \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{s}{2}}. \quad (5)$$

引理4^[21] 假设 $V(t)$ 是定义在原点邻域上的连续正定 Lyapunov 函数, 且满足以下微分不等式:

$$\dot{V}(t) \leq -pV^q(t). \quad (6)$$

其中: $p > 0, 0 < q < 1$, 对于所有满足条件 $t \geq T(x_0)$ 的 t , 有 $V(t) \equiv 0$ 且稳定时间满足

$$T(x_0) \leq \frac{V^{1-q}(x_0)}{p(1-q)}. \quad (7)$$

2 有限时间事件相关间歇控制器设计

在文献[19]提出的事件相关间歇控制策略的基础上, 为降低控制成本, 选择前 $p(1 \leq p \leq N - 1)$ 个节点施加关键控制, 设计如下的有限时间事件相关间歇控制器:

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^*(t), & V(t) \geq B_1(t); \\ 0, & V(t) \leq B_2(t); \\ u_i^*(t^-), & B_2(t) < V(t) < B_1(t). \end{cases} \quad (8)$$

其中: $u_i^*(t) = -d_i e_i(t) - k_2 \text{sign}(e_i(t)) \sum_{j=1}^N b_{ij} e_j(t - \tau(t)) - k_1 \text{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^\eta$; d_i 与正标量 k_1 和 k_2 为

控制增益, 若 $0 \leq i \leq p$, 则 $d_i > 0$, 否则 $d_i = 0$; $0 \leq \eta < 1$; $|e_i(t)|^\eta = (|e_{i1}(t)|^\eta, |e_{i2}(t)|^\eta, \dots, |e_{in}(t)|^\eta)^T$; $\text{sign}(e_i(t)) = \text{diag}(\text{sign}(e_{i1}(t)), \text{sign}(e_{i2}(t)), \dots, \text{sign}(e_{in}(t)))$; $V(t)$ 是一个给定的 Lyapunov 函数; $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 是两个待设计的非负连续边界函数; t^- 表示时间 t 的前一时刻.

注1 $u_i^*(t)$ 由3项组成, $-d_i e_i(t)$ 项用于实现网络的渐近同步; $-k_1 \text{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^\eta$ 项用于保证网络的有限时间同步; $-k_2 \text{sign}(e_i(t)) \sum_{j=1}^N b_{ij} e_j(t - \tau(t))$ 项用于消除网络耦合时滞的影响.

由式(8)可知, 控制器 $u_i(t)$ 的工作时间由 $V(t)$ 与 $B_i(t) (i = 1, 2)$ 之间的时变关系决定. 令 $\beta = (1 + \eta)/2$, 考虑如下的边界函数:

$$B_i(t) = ((lV(t_0))^{1-\beta} - \alpha_i(1-\beta)(t-t_0))^{1-\beta}. \quad (9)$$

其中: l, α_i 是正常数并满足 $\alpha_2 > \alpha_1, 0 < l < 1$. 基于给定的 Lyapunov 函数 $V(t)$ 与边界函数 $B_i(t)$ 之间的关系, 所设计的事件相关间歇控制机制如图1所示, 具体描述如下.

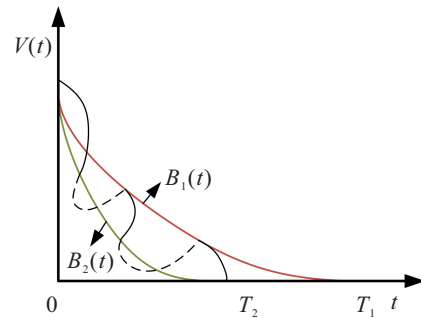


图1 有限时间事件相关间歇机制

情况1 若满足 $V(t) \geq B_1(t)$, 则控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 在时刻 t 处于激活状态, 其连续工作至 $V(t) < B_1(t)$.

情况2 若满足 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$, 且控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 在前一时刻 t^- 工作, 则控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 在 t 时刻之后仍继续工作. 若 t^- 时刻 Lyapunov 函数也满足 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$, 则继续追踪它的上一时刻, 以此类推直至找不出满足条件 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$ 的时刻. 特别地, 若某一时刻 Lyapunov 函数在边界函数 $B_1(t)$ 上, 控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 工作, 则这一时刻后控制器也将继续工作.

情况3 与情况2类似, 若满足 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$, 且控制器 $u_i(t) = 0$ 在前一时刻 t^- 工作, 则控制器 $u_i(t) = 0$ 在 t 时刻之后仍继续工作.

情况4 若满足 $V(t) \leq B_2(t)$, 则控制器 $u_i(t) = 0$ 在时刻 t 处于激活状态且保持持续工作直至满足条

件 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$.

注2 本文引入的两个边界函数 $B_i(t)$ 有重要意义. 实际上, 若控制过程只有一个边界函数 $B_1(t)$, 则所设计的控制器(8)变为如下形式:

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^*(t), & V(t) \geq B_1(t); \\ 0, & V(t) < B_2(t). \end{cases}$$

此时, 控制器将在 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 与 $u_i(t) = 0$ 之间快速切换. $V(t)$ 的轨迹可从 $V(t) \geq B_1(t)$ 的区域与边界函数 $B_1(t)$ 相交后进入 $V(t) < B_1(t)$ 区域; 或者 $V(t)$ 的轨迹可以从 $V(t) < B_1(t)$ 之间与边界函数 $B_1(t)$ 接触从而进入 $V(t) \geq B_1(t)$. 这样的变化方式通常会引起抖振现象. 为避免这种现象, 本文引入另一个边界函数 $B_2(t)$. 当 $V(t)$ 从 $V(t) \geq B_1(t)$ 到 $V(t) \leq B_2(t)$ 或从 $V(t) \leq B_2(t)$ 到 $V(t) \geq B_1(t)$ 时, 非空区域 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$ 提供了一个停留时间. 如果标量 $l, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ 数值选择合适, 则控制器的开关频率在 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 与 $u_i(t) = 0$ 之间所对应的区域 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$ 将更大. 因此, 可以通过增大 $\alpha_2 - \alpha_1$ 的值来减少开关频率.

3 同步稳定性分析

为简化描述, 先给出如下的符号定义: $H = hI_N + c_0 \frac{A + A^T}{2}$, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p, \overbrace{0, \dots, 0}^{N-p})$, $\tilde{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$, H_p 是移除 H 的前 p 行和列所得到的子矩阵, $e(t) = (e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t))^T$.

结合式(1), (2)和(8), 可得同步误差方程如下:

$$\dot{e}_i(t) = \begin{cases} \Theta_i(t) + u^*(t), & V(t) \geq B_1(t); \\ \Theta_i(t), & V(t) \leq B_2(t); \\ \Theta_i(t) + u^*(t^-), & B_2(t) < V(t) < B_1(t). \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\Theta_i(t) = f(x_i(t)) - f(s(t)) + c_0 \sum_{j=1}^N a_{ij} e_j(t) + c_1 \sum_{j=1}^N b_{ij} e_j(t - \tau(t)).$$

定理1 若假设1和假设2满足, 且存在正常数 η, α_i 和 $k_i (i = 1, 2)$, 有下列条件成立:

$$\lambda_{\max} \left(\left(\frac{A + A^T}{2} \right)_p \right) < -\frac{h}{c_0}, \quad (11)$$

$$d_i > \lambda_{\max}(E - SH_p^{-1}S^T), \quad (12)$$

$$c_1 - k_2 < 0, \quad (13)$$

$$k_1(1 - \sigma)^\beta > \alpha_2 > \alpha_1, \quad (14)$$

则在事件相关间歇控制器(8)的作用下, 复杂网络(1)实现有限时间同步, 且停息时间满足

$$T \leq T_1 = \frac{(lV(t_0))^{1-\beta}}{\alpha_1(1-\beta)} + t_0.$$

证明 构建如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t). \quad (15)$$

其中

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t),$$

$$V_2(t) = \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t \frac{1}{1-\sigma} e_i^T(s) e_i(s) ds.$$

若假设1和假设2满足, 沿着时间 t 对 $V_1(t)$ 求导, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & h \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + c_0 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \sum_{j=1}^N a_{ij} e_j(t) + \\ & c_1 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \sum_{j=1}^N b_{ij} e_j(t - \tau(t)) - \sum_{i=1}^p e_i^T(t) d_i e_i(t) - \\ & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) k_1 \text{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^\eta - \\ & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) k_2 \text{sign}(e_i(t)) \sum_{j=1}^N b_{ij} e_j(t - \tau(t)) \leq \\ & e^T(t) (H - D) e(t) - k_1 \left(\sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \right)^{\frac{1+\eta}{2}} - \\ & (k_2 - c_1) \sum_{i=1}^N |e_i^T(t)| \sum_{j=1}^N |b_{ij} e_j(t - \tau(t))|. \end{aligned} \quad (16)$$

由矩阵分解可得 $H - D = \begin{bmatrix} E - \tilde{D} & S \\ S^T & H_p \end{bmatrix}$, 其中 E 和 S 是适合维的矩阵. 由引理1可知, $H - D < 0$ 等价于 $H_p < 0$ 和 $d_i > \lambda_{\max}(E - SH_p^{-1}S^T)$. 若 $d_i > \lambda_{\max}(E - SH_p^{-1}S^T)$, 则 $H - D < 0$ 等价于 $H_p < 0$. 由引理1和引理2可知, $\lambda_{\max}(H_p) \leq h + c_0 \lambda_{\max}(((A + A^T)/2)_p) < 0$, 即 $H_p < 0$. 根据式(11)~(13)以及引理3可知

$$\dot{V}_1(t) \leq -k_1 \left(\sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \right)^{\frac{1+\eta}{2}}. \quad (17)$$

根据式(17), 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) - \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau(t)) e_i(t - \tau(t)) = \\ \int_{t-\tau(t)}^t \dot{V}_1(s) ds \leq \end{aligned}$$

$$-k_1 \left(\sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s)e_i(s)ds \right)^{\frac{1+\eta}{2}}. \quad (18)$$

即

$$0 \leq - \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau(t))e_i(t-\tau(t)) - k_1 \left(\sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s)e_i(s)ds \right)^{\frac{1+\eta}{2}}. \quad (19)$$

同时,沿着时间 t 对 $V_2(t)$ 求导,得

$$\dot{V}_2(t) = \frac{1}{1-\sigma} \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) - \frac{1-\dot{\tau}(t)}{1-\sigma} \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau(t))e_i(t-\tau(t)). \quad (20)$$

将式(19)的两端加入式(20),根据假设2有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) \leq & \left(\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right) e^T(t)e(t) + \\ & \left(1 - \frac{1-\dot{\tau}(t)}{1-\sigma} \right) e^T(t-\tau(t))e(t-\tau(t)) - \\ & k_1 \left(\sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s)e_i(s)ds \right)^{\frac{1+\eta}{2}} \leq \\ & -k_1 \left(\sum_{i=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s)e_i(s)ds \right)^{\frac{1+\eta}{2}}. \quad (21) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \leq \\ & -k_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{-\beta} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \right)^{\beta} - \\ & k_1 \left(\frac{1}{1-\sigma} \right)^{-\beta} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{1-\sigma} \int_{t-\tau(t)}^t e_i^T(s)e_i(s)ds \right)^{\beta} = \\ & -\alpha V^{\beta}(t), \quad (22) \end{aligned}$$

其中 $\alpha = k_1 \left(\frac{1}{1-\sigma} \right)^{-\beta}$.

对式(22)从 t_0 到 t 积分可得

$$V(t) \leq ((V(t_0))^{1-\beta} - \alpha(1-\beta)(t-t_0))^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (23)$$

由于 $0 < l < 1$, 有 $V(t) \geq B_1(t_0) = lV(t_0)$. 控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 在时刻 t_0 被激活. 除此之外, 由于 $k > \alpha_1$, $V(t)$ 的收敛速度比边界函数 $B_1(t)$ 快, 且存在一个时刻 t_0^* , 此时 $V(t), B_1(t)$ 正好接触. 基于所提出的控制机制, 控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 在 t_0^* 后仍被激活, 且 Lyapunov 函数 $V(t)$ 会进入区域 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$. 由于 $k > \alpha_2$, 存在时刻 t_1 , 使得 $V(t)$ 的轨迹触及边界 $B_2(t)$, 且控制器 $u_i(t) = 0$ 在 $t = t_1$ 时刻被激活. 若存在另一时刻 t_2 , 使得 $V(t)$ 触及边界 $B_1(t)$, 则控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 再次被激活, 并且 $V(t)$ 的轨迹会触及边界 $B_2(t)$, 再次激活控制器 $u_i(t) = 0$. 重

复若干次上述操作后, 得出由 $V(t)$ 与 $B_i(t)$ 之间的关系确定的激活时序 t_{2m} 和停止瞬时序 t_{2m+1} , 其中 $m = 0, 1, \dots, r$.

通过上述分析, 可以找到一个时刻 $t_r > T_2 = \frac{(lV(t_0))^{1-\beta}}{\alpha_2(1-\beta)} + t_0$, 使得 $V(t)$ 的轨迹触及边界 $B_1(t)$, 即 $V(t_r) = B_1(t_r)$. 当处于 $t \in [t_r, T_1)$ 时, $V(t)$ 满足 $V(t) < B_1(t)$. 所以, 当 $t > t_r$ 时, $V(t)$ 满足 $V(t) < B_1(t)$. 所以, 当 $t > t_r$ 时, 有

$$\begin{aligned} V(t) \leq & B_1(t_r) = \\ & ((lV(t_0))^{1-\beta} - \alpha_1(1-\beta)(t_r-t_0))^{1-\beta}. \quad (24) \end{aligned}$$

因此, 当 $t \geq t_r$ 时, 有

$$\|e(t)\| \leq V(t) \leq B_1(t). \quad (25)$$

由引理4可得, $B_1(t)$ 是有限时间稳定的, 则由式(25)可知误差系统(10)有限时间稳定, 其稳定时间 $T < T_1$, 则网络(1)实现有限时间同步. \square

注3 如果控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 在初始时刻工作, 则 $V(t)$ 将以与 α 和 β 相关的速率收敛. 即使 $V(t)$ 比 $B_1(t)$ 收敛得快, $V(t)$ 也可能永远不会触及边界函数 $B_1(t)$. 其原因在于, 当 $V(t_0) > lV(t_0)$ 时, $T_0 = \frac{V^{1-\beta}(t_0)}{\alpha(1-\beta)} + t_0 > T_1 = \frac{(lV(t_0))^{1-\beta}}{\alpha_1(1-\beta)} + t_0$. 在这种情况下不存在间歇机制, 控制器 $u_i(t) = u_i^*(t)$ 将会连续工作, Lyapunov 函数将一直处于边界函数 $B_1(t)$ 上方, 不会与之相交. 相反, 若 Lyapunov 函数与边界函数 $B_1(t)$ 相交, 则之后其一定会进入区域 $B_2(t) < V(t) < B_1(t)$, 此后 Lyapunov 函数将会一直处于上边界 $B_1(t)$ 下方, 即 $T_0 < T_1$, 这与上述矛盾. 综上所述, 可以通过设计合适的边界函数 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 避免出现控制器连续控制的现象.

注4 对于给定的网络系统, 事件相关间歇控制器的设计步骤包括3个部分: 非负实数区域的划分、牵制节点的选择和线性反馈增益参数的设计.

step 1: 根据所需的同步特性, 选择参数 l, α_1, α_2 , 使之满足 $\alpha_2 > \alpha_1, 0 < l < 1$.

step 2: 根据文献[6], 利用度差对网络节点进行降序排列.

step 3: 令 $p = 1$, 计算 $\lambda_{\max}(((A + A^T)/2)_p)$, 若 $\lambda_{\max}(((A + A^T)/2)_p) > -hI_N/c_0$, 则 $p = p + 1$, 重复计算 $\lambda_{\max}(((A + A^T)/2)_p)$, 使之满足 $\lambda_{\max}(((A + A^T)/2)_p) < -h/c_0$; 否则 $p = 1$.

step 4: 选择线性反馈增益 d_i , 使得 $d_i > \lambda_{\max}(E - SH_p^{-1}S^T)$.

注5 本文提出的方法不仅适用于复杂动态网

网络的同步,还可用于混沌系统的镇定和同步^[28],多智能体一致性控制^[29]等问题.文献[28]采用基于时间相关的间歇控制方法研究了混沌系统的镇定与同步问题,而本文提出的非周期事件相关间歇控制方法不需要预先设定工作和休息时间,应用本文方法可实现混沌系统的有限时间镇定与同步.文献[29]设计了一种基于区域分割的事件相关间歇通信方案,实现了二阶非线性多智能体系统的自适应一致控制,但对收敛速度并没有要求,应用本文方法可使多智能体系统在有限时间内实现一致.

4 数值仿真

考虑由10个节点组成的时滞复杂网络,其网络节点动态 $f(x_i(t)) = 2 \tanh(x_i(t))$,满足假设1且 $h = 2$.假设耦合强度 $c_0 = 10, c_1 = 1$,耦合时滞 $\tau(t) = e^t/(e^t + 1)$ 满足 $\tau = 1, \sigma = 0.25$.耦合矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$B = 0.01A.$

令 $\beta = 0.8, l = 0.9, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.8, k_1 = 3, k_2 = 2$ 和 $\eta = 0.6$,经计算可得 $-hI_N/c_0 = -0.2, k_1(1 - \sigma)^\beta = 2.4$,预估的同步休息时间 $T_1 = 16.30$ s.根据注4重新排列节点,有 $\lambda_{\max}((\tilde{A}^s)_2) = -0.1617, \lambda_{\max}((\tilde{A}^s)_3) = -0.500$,因此仅需选择前3个节点施加关键控制且 $d > \lambda_{\max}(E - SH_p^{-1}S^T) = 16.94$.令 $d_i = 20(i = 1, 2, 3)$,系统初值 $s(0) = (0.2, 0.4, 0.5)^T, x_i(0) = (-4 + 0.5i, -6 + 0.5i, -10 + 0.5i)^T$.

图2描述了Lyapunov函数 $V(t)$ 与边界函数 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 的关系,图3呈现了网络同步误差 $\|e(t)\|$ 的轨迹,同步误差在6.45 s收敛到0,小于预估的同步休息时间 T_1 ,表明了所设计的有限时间事件相关间歇控制器的有效性.每个节点的同步误差 $\|e(t)\|$ 轨迹如图4所示,其中 $i = 1, 2, \dots, 10$.可以看出每个节点同步误差存在差异,但都在6.45 s左右收敛到0.图5给出了所设计的间歇控制器轨迹.可以看出,控制器工作与休息状态的确定取决于事件是否发生而不是预先的时间设定,且工作时间占整个仿真时

间的比例仅为5.47%.

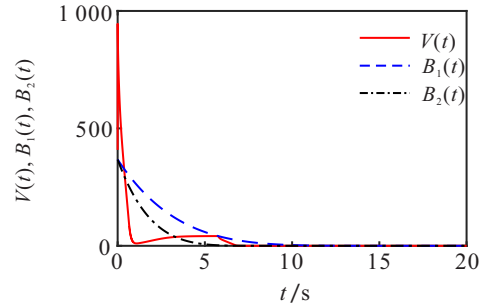


图2 $V(t)$ 、 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 的轨迹

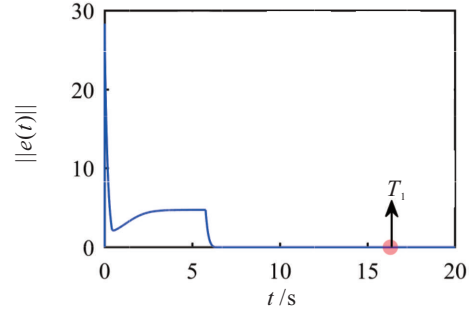


图3 网络同步误差 $\|e(t)\|$ 的轨迹

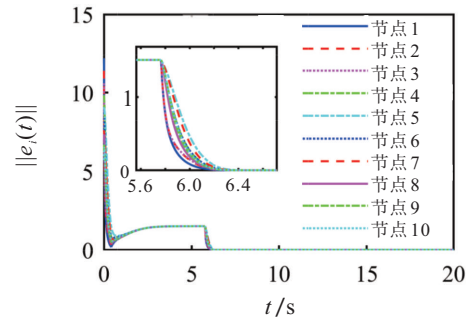


图4 节点同步误差 $\|e(t)\|$ 的轨迹

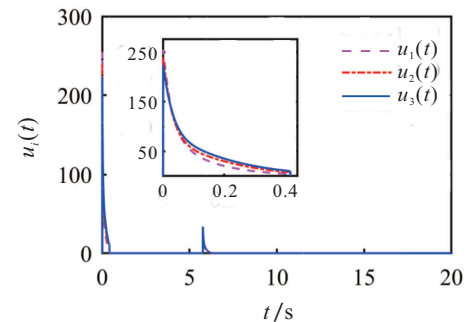


图5 间歇控制器(8)的轨迹

下面将本文方法与文献[19]的事件相关间歇控制同步的方法进行对比,说明本文所提出方法具有更快的收敛速率.根据文献[19],控制器设计如下:

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^*(t), & V(t) \geq R_1(t); \\ 0, & V(t) \leq R_2(t); \\ u_i^*(t^-), & R_2(t) < V(t) < R_1(t). \end{cases} \quad (26)$$

其中: $u_i(t) = -ke_i(t)$, k 为控制增益; $R_i(t)(i = 1, 2, 3)$ 表示非负实数区域被划分成的3部分,定义如下:

$$R_1(t) = \{r \in R_+ : r \geq C_1(t)\},$$

$$R_2(t) = \{r \in R_+ : r < C_2(t)\},$$

$$R_3(t) = \{r \in R_+ : C_2(t) \leq r < C_1(t)\}.$$

其中

$$C_1(t) = \sigma_1 V(t_0) e^{-\eta_1(t-t_0)},$$

$$C_2(t) = \sigma_2 V(t_0) e^{-\eta_2(t-t_0)},$$

$$\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \eta_1 > \eta_2 > \eta_1 > 0.$$

与文献[19]相同, $\sigma_1 = 1.0, \sigma_2 = 0.5, \eta_1 = 0.5, \eta_2 = 0.8, k = 20$.

为了保证同步条件的一致性, 选择与上文中相同的参数. 在初始条件相同时, 文献[19]中 $V(t)$ 、 $C_1(t)$ 和 $C_2(t)$ 的轨迹如图 6 所示. 显然, 本文所设计控制器具有更少的切换次数. 图 7 给出了控制器(26)作用下的同步误差轨迹, 网络需要 17 s 达到同步状态. 图 8 展示了控制器(26)的轨迹, 其中工作时间占整个仿真时间的比例为 8.35%. 综上可知, 本文设计的控制器具有较好的同步效果.

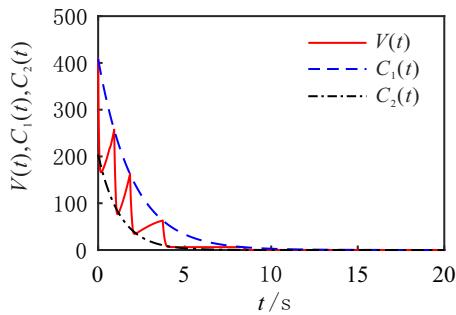


图 6 文献[19]中 $V(t)$ 、 $C_1(t)$ 和 $C_2(t)$ 的轨迹

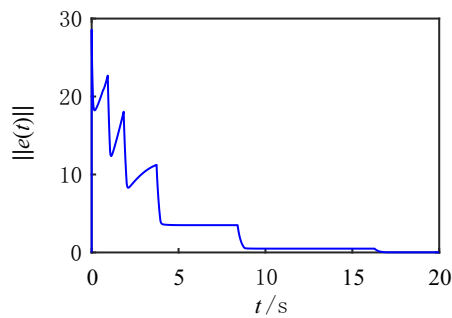


图 7 控制器(26)作用下同步误差 $\|e(t)\|$ 的轨迹

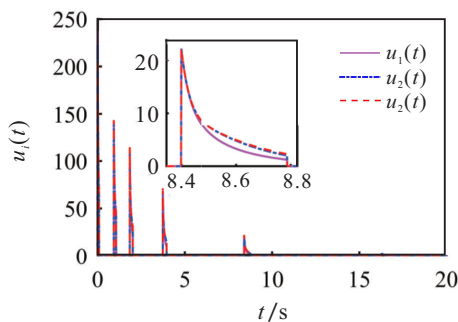


图 8 间歇控制器(26)的轨迹

5 结 论

本文提出了一种有限时间事件相关间歇控制方法, 实现了时变时滞复杂网络的有限时间同步. 与现有事件相关控制方法相比, 本文的方法具有更快的收敛速度. 基于有限时间稳定性理论, 得到了网络同步的充分条件和停息时间. 仿真算例验证了所设计方法的可行性. 基于事件相关间歇控制的复杂网络固定时间同步, 是下一步的研究方向.

参考文献(References)

- [1] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: Structure and dynamics[J]. Physics Reports, 2006, 424(4/5): 175-308.
- [2] Kozma R, Puljic M. Hierarchical random cellular neural networks for system-level brain-like signal processing[J]. Neural Networks, 2013, 4(5): 101-110.
- [3] 毛海杰, 李炜, 蒋栋年. 基于复杂网络的多电机同步控制系统故障诊断与切换容错研究[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 843-851.
(Mao H J, Li W, Jiang D N. Fault diagnosis and switching tolerance for multi-motor synchronous control based on complex dynamical network[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 843-851.)
- [4] Pang S P, Tian Z, Ma W G. Structural controllability and observability of complex network with output feedback[J]. Physica A Statistical Mechanics and Its Applications, 2023, 620: 128790.
- [5] 孙海义, 李宁, 张庆灵. 时延复杂网络的自适应周期间歇同步控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 797-800.
(Sun H Y, Li N, Zhang Q L. Synchronization of delayed complex dynamical networks via adaptive periodically intermittent control[J]. Control and Decision, 2013, 28(5): 797-800.)
- [6] Song Q, Cao J D. On pinning synchronization of directed and undirected complex dynamical networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Regular Papers, 2010, 57(3): 672-680.
- [7] Wang X, Park J H, Yang H L, et al. An improved impulsive control approach for cluster synchronization of complex networks with parameter mismatches[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(4): 2561-2570.
- [8] Ding S B, Wang Z S. Event-triggered synchronization of discrete-time neural networks: A switching approach[J]. Neural Networks, 2020, 125: 31-40.
- [9] Xia W G, Cao J D. Pinning synchronization of delayed dynamical networks via periodically intermittent control[J]. Chaos, 2009, 19(1): 013120.
- [10] Wang J Y, Feng J W, Xu C, et al. Exponential

- synchronization of stochastic perturbed complex networks with time-varying delays via periodically intermittent pinning[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(11): 3146-3157.
- [11] Li N, Cao J D. Periodically intermittent control on robust exponential synchronization for switched interval coupled networks[J]. *Neurocomputing*, 2014, 131: 52-58.
- [12] Liu X W, Chen T P. Synchronization of nonlinear coupled networks via aperiodically intermittent pinning control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(1): 113-126.
- [13] Liu X W, Chen T P. Synchronization of linearly coupled networks with delays via aperiodically intermittent pinning control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(10): 2396-2407.
- [14] Wang J A. Synchronization of delayed complex dynamical network with hybrid-coupling via aperiodically intermittent pinning control[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(4): 1833-1855.
- [15] Guo B B, Shi P, Zhang C P. Aperiodically intermittent control for synchronization of stochastic coupled networks with semi-Markovian jump and time delays[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, 38: 100938.
- [16] Guo Y, Li X J, Wang P F. Improved results on synchronization of stochastic delayed networks under aperiodically intermittent control[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(9): 4950-4971.
- [17] Wang Q Z, He Y, Tan G Z, et al. State-dependent intermittent control of non-linear systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(12): 1884-1893.
- [18] He C, Li J M. Event-based aperiodically intermittent pinning synchronization control strategy for linearly coupled complex networks[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, 36: 100836.
- [19] Ding S B, Wang Z S. Synchronization of coupled neural networks via an event-dependent intermittent pinning control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(3): 1928-1934.
- [20] Wang X, Wang J A, Sun Q L, et al. Synchronization of nonlinear coupled complex network via event-dependent intermittent pinning control[J]. *European Journal of Control*, 2023, 69: 100757.
- [21] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [22] Fan Y H, Liu H M, Zhu Y G, et al. Fast synchronization of complex dynamical networks with time-varying delay via periodically intermittent control[J]. *Neurocomputing*, 2016, 205(C): 182-194.
- [23] Mei J, Jiang M H, Wu Z, et al. Periodically intermittent controlling for finite-time synchronization of complex dynamical networks[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(1): 295-305.
- [24] Jing T Y, Zhang D Y, Mei J, et al. Finite-time synchronization of delayed complex dynamic networks via aperiodically intermittent control[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(10): 5464-5484.
- [25] Ruan Z Y, Li Y Y, Hu J H, et al. Finite-time synchronization of the drive-response networks by event-triggered aperiodic intermittent control[J]. *Neurocomputing*, 2022, 485: 89-102.
- [26] Wang M Y, Zhao F, Qiu J L, et al. Adaptive finite-time synchronization of stochastic complex networks with mixed delays via aperiodically intermittent control[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2023, 21(4): 1187-1196.
- [27] 张檬, 韩敏. 基于单向耦合的不确定复杂网络间有限时间同步[J]. *自动化学报*, 2021, 47(7): 1624-1632. (Zhang M, Han M. Finite-time synchronization between uncertain complex networks based on unidirectional coupling method[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(7): 1624-1632.)
- [28] Zhu H B, Cui B T. Stabilization and synchronization of chaotic systems via intermittent control[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(11): 3577-3586.
- [29] Sun J, Guo C, Liu L, et al. Adaptive consensus control of second-order nonlinear multi-agent systems with event-dependent intermittent communications[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, 360(3): 2289-2306.

作者简介

王健安(1984-), 男, 教授, 博士, 硕士生导师, 从事多智能体协同控制、复杂网络同步等研究, E-mail: jiananwang@tyust.edu.cn;

杨泽林(1998-), 男, 硕士生, 从事复杂网络同步的研究, E-mail: 474105744@qq.com;

王昕(1997-), 女, 硕士生, 从事复杂网络同步的研究, E-mail: 1060083795@qq.com;

张捷(1994-), 男, 博士, 从事多智能体系统协同控制、网络安全与控制等研究, E-mail: 2022042@tyust.edu.cn;

李明杰(1988-), 男, 教授, 博士, 从事先进控制理论与应用的研究, E-mail: limingjie@tyust.edu.cn.