



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

# 控制与决策

CONTROL AND DECISION



## 机械臂预定时间重复学习控制

李亚倩, 陈强, 施卉辉, 张智皓, 陈鹏

引用本文:

李亚倩, 陈强, 施卉辉, 张智皓, 陈鹏. 机械臂预定时间重复学习控制[J]. *控制与决策*, 2024, 39(11): 3719–3726.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1185>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

*控制与决策*. 2021, 36(6): 1435–1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

#### 带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制

Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints

*控制与决策*. 2021, 36(2): 387–394 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0974>

#### 航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

#### 磁悬浮开关磁阻电机的自适应终端滑模控制

Adaptive terminal sliding mode control of bearingless switched reluctance motor

*控制与决策*. 2021, 36(6): 1449–1456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1064>

#### 基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

*控制与决策*. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

# 机械臂预定时间重复学习控制

李亚倩, 陈强<sup>†</sup>, 施卉辉, 张智皓, 陈鹏

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

**摘要:** 为实现不确定机械臂系统快速和高精度跟踪控制性能, 提出一种基于反演算法的预定时间重复学习控制策略. 通过构造非奇异预定时间虚拟控制器, 有效避免传统有限时间反演控制中由虚拟控制器微分引起的奇异性问题, 确保机械臂角位置跟踪误差在预定时间内收敛至原点附近邻域内. 在此基础上, 根据期望轨迹的周期特性, 将机械臂系统的集总不确定划分为周期不确定和非周期不确定两部分, 并构造全限幅重复学习更新律以准确估计和补偿周期不确定部分. 同时, 设计鲁棒控制律并引入终端吸引, 补偿包括外部干扰在内的非周期不确定部分, 实现机械臂角位置对周期性期望轨迹的高精度跟踪. 最后, 基于 Lyapunov 定理证明闭环系统稳定性和分析跟踪误差收敛性, 并通过仿真结果验证所提出控制方法的有效性.

**关键词:** 机械臂; 预定时间控制; 重复学习律; 反演递归算法; 周期不确定; 跟踪控制

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1185

引用格式: 李亚倩, 陈强, 施卉辉, 等. 机械臂预定时间重复学习控制[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3719-3726.

## Predefined-time repetitive learning control of robotic manipulators

LI Ya-qian, CHEN Qiang<sup>†</sup>, SHI Hui-hui, ZHANG Zhi-hao, CHEN Peng

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** A backstepping-based predefined-time repetitive learning control scheme is proposed for uncertain robot manipulators to achieve rapid and high-precision tracking control performance. A non-singular predefined-time virtual controller is constructed to effectively avoid the singularity issues caused by the differentiation of the virtual controller in conventional finite-time backstepping design. It ensures that the tracking error of the robot manipulators joint positions converges to a neighborhood of the origin within the predefined time. Then, the lumped uncertainty of the manipulator is separated into periodic and non-periodic parts by considering the periodic characteristics of the desired trajectory. A fully saturated repetitive learning law is constructed to accurately estimate and compensate for the periodic uncertainty. Meanwhile, a robust control law is developed and the terminal attracting technique is applied to guarantee the effective compensation of the non-periodic uncertainty including external disturbances, such that the high-precision tracking of the robot manipulators joint positions is achieved. Finally, the stability of the closed-loop system and the error convergence performance of the proposed scheme are analyzed through the Lyapunov stability synthesis. The effectiveness of the proposed control method is verified by comparative simulations.

**Keywords:** robot manipulator; predefined-time control; repetitive learning law; backstepping recursive algorithm; periodic uncertainty; tracking control

## 0 引言

随着科技的发展, 机械臂被广泛应用于现代生产和制造业中, 从事高强度、重复性作业<sup>[1]</sup>. 然而, 机械臂系统模型的不确定性和外部干扰通常会导致其快速、高精度的控制目标难以实现<sup>[2]</sup>. 近年来, 为了提高机械臂跟踪控制性能, 各种先进控制策略被提出, 如自适应控制、滑模控制等<sup>[3-5]</sup>. 尽管以上控制策略能

够在不同程度上改善机械臂的控制性能, 但在控制器设计过程中, 机械臂执行任务的重复性和周期性特征并未充分加以利用, 导致系统跟踪周期性期望轨迹时仍存在一定的周期性稳态误差, 有待进一步消除.

重复学习控制是一种有效处理周期性轨迹跟踪或周期性干扰补偿问题的智能控制方法. 因此, 重复学习控制被应用于执行周期性重复任务的机械臂, 能

收稿日期: 2023-08-19; 录用日期: 2023-12-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62222315, 61973274); 浙江省自然科学基金项目(LZ22F030007).

责任编辑: 易建强.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn.

\*本文附带电子附录文件, 可登录本刊官网该文“资源附件”区自行下载阅览.

够保证高精度跟踪性能<sup>[6-7]</sup>. 文献[8]针对含非参数不确定性的永磁同步电机系统,提出一种基于滑模的自适应重复学习控制方法,实现了对给定周期轨迹的精确跟踪. 文献[9]针对含参数化和非参数化的非线性系统,提出一种基于反演算法的重复学习控制策略,将所有未知时变项合并为一个周期时变向量,设计自适应重复学习控制律,实现了跟踪误差在误差平方范数意义下渐近收敛于零. 尽管重复学习控制方法能够实现系统输出对周期期望轨迹的高精度跟踪,但跟踪误差的渐近收敛需要多个周期的重复学习,难以满足实际机械臂应用中有限时间内达到高精度跟踪的要求.

为了提高跟踪速度,学者们提出了有限时间控制策略,以保证在初始状态有界的条件下,跟踪误差在设定的有限时间内收敛至零或残差集<sup>[10-13]</sup>. 文献[10]提出一种有限时间重复学习控制策略,以保证有限时间和高精度的跟踪性能. 文献[12]针对输出受限的机械臂系统,提出一种有限时间自适应事件触发控制方法,将命令滤波反演控制与事件触发控制相结合,使机械臂角位置跟踪误差在有限时间内收敛至期望的邻域. 然而,在上述有限时间控制方法中,收敛时间高度依赖初始状态. 为放宽收敛时间对初始状态的依赖性,固定时间控制策略<sup>[14-16]</sup>相继涌现. 文献[15]针对机械臂系统设计固定时间自适应神经网络控制器,实现了机械臂角位置对期望轨迹的固定时间跟踪. 文献[16]针对一类具有随机扰动和多约束的单连杆机械臂系统,提出固定时间模糊自适应跟踪控制方法,以保证机械臂角位置跟踪误差在固定时间内收敛至预先指定的区域内. 然而,跟踪误差的收敛时间上界仍是多个控制参数的复杂函数,难以根据实际需求预先设定. 近年来,学者们提出了预定时间控制方法,通过调整一个可调参数便能预先设定收敛时间的最小上界<sup>[17-20]</sup>. 文献[20]提出一种预定时间鲁棒控制方法,实现了机械臂角位置跟踪误差在预定时间内收敛至预定界内. 然而,由于在控制器设计中未充分利用机械臂跟踪轨迹的周期性特征,难以满足机械臂跟踪周期期望轨迹时的快速和高精度跟踪性能要求. 同时,控制器设计过程中的奇异性问题主要通过构造分段连续函数或二次分式函数来避免,增加了计算负担和分析复杂度.

综上所述,本文针对不确定机械臂系统,提出一种基于反演算法的预定时间重复学习控制方法,以保证机械臂角位置跟踪误差在预定时间内收敛至原点附近的邻域内,并在重复学习律的作用下,实现机械

臂角位置对周期性期望轨迹的快速、高精度跟踪. 与现有的预定时间控制方法相比,本文设计的非奇异虚拟控制器无需构造分段连续函数或二次分式函数,从而减轻计算负担和分析复杂度. 为提高稳态跟踪精度,将机械臂的集总不确定性分为周期性和非周期性两部分. 利用期望轨迹的周期特性,构造全限幅重复学习律估计和补偿周期性不确定性;同时,在鲁棒控制方法中引入终端吸引,保证非周期性不确定性的有效补偿和跟踪误差的快速收敛,进而实现瞬态过程中误差的预定时间收敛和稳态过程中角位置的高精度跟踪.

## 1 系统描述及预备知识

### 1.1 系统描述

本文考虑  $n$  连杆机械臂的动态方程为

$$(M(q) + \Delta M(q))\ddot{q} + (C(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}))\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + d. \quad (1)$$

其中:  $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$  分别为关节角位置、角速度、角加速度矢量;  $M(q), \Delta M(q) \in R^{n \times n}$  为惯性矩阵的已知标称项和不确定项;  $C(q, \dot{q}), \Delta C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  为科里奥利矩阵的标称项和不确定项;  $G(q), F(\dot{q}), d \in R^n$  分别为不确定的重力矢量、不确定的摩擦效应和有界的外部扰动;  $\tau \in R^n$  为控制输入矢量.

系统(1)可等价表示为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) + H(q) = \tau + d, \quad (2)$$

其中  $H(q) = \Delta M(q)\ddot{q} + \Delta C(q, \dot{q})\dot{q}$ .

为表述方便,定义  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}, \dot{x}_2 = \ddot{q}, M = M(q), C = C(q, \dot{q}), G = G(q), F = F(\dot{q})$  和  $H = H(q)$ , 则式(2)可重写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ M\dot{x}_2 &= \tau - Cx_2 - G - F - H + d. \end{aligned} \quad (3)$$

本文的控制目标是,针对不确定机械臂系统(1),给定以  $T$  为周期的期望角位置轨迹  $x_{1r}$ , 设计控制器  $\tau$ , 保证机械臂角位置  $x_1$  能够在预定时间内快速收敛至期望轨迹  $x_{1r}$  附近邻域内,并在重复学习律的作用下实现对  $x_{1r}$  的高精度跟踪.

### 1.2 预备知识

在设计控制器之前,先介绍以下性质和引理.

**性质 1**<sup>[20]</sup> 惯性矩阵  $M$  是对称的正定矩阵,存在  $\eta > 0$  满足

$$\frac{1}{2}\zeta^T M \zeta \leq \eta \|\zeta\|^2, \quad \forall \zeta \in R^n, \quad (4)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示矩阵或向量的欧氏 2 范数.

**性质 2**<sup>[20]</sup> 矩阵  $\dot{M} - 2C$  具有斜对称性质, 满足以下不等式:

$$\varsigma^T [\dot{M} - 2C] \varsigma = 0, \forall \varsigma \in R^n. \quad (5)$$

**引理 1**<sup>[18]</sup> 考虑系统

$$\dot{x}(t) = f(x, t). \quad (6)$$

其中:  $x(t)$  是系统的状态变量,  $f(x, t)$  是光滑的非线性函数. 假设存在正定函数  $V(x)$ , 正实数  $0 < \gamma < 1, T_c > 0, 0 < \varrho < \infty$  满足

$$\dot{V} \leq -\frac{\pi}{\gamma T_c} (V^{1-\frac{\gamma}{2}} + V^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \varrho, \quad (7)$$

则系统(6)是实际预定时间稳定的, 收敛区域为

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow T_0} x \mid V \leq \min \left\{ \left( \frac{2\gamma T_c \varrho}{\pi} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{2\gamma T_c \varrho}{\pi} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \right\}, \quad (8)$$

其中  $T_0$  为收敛时间最小上界且满足  $T_0 < T_{\max} = \sqrt{2}T_c$ .

**引理 2**<sup>[8]</sup> 给定标量  $i$  和  $j$ , 假设  $|i| \leq \bar{j}$ , 其中  $\bar{j}$  是  $j$  的限幅值, 满足以下不等式:

$$(i - \text{sat}(j))(j - \text{sat}(j)) \leq 0. \quad (9)$$

其中

$$\text{sat}(j) = \begin{cases} \bar{j}, & j > \bar{j}; \\ j, & |j| \leq \bar{j}; \\ -\bar{j}, & j < -\bar{j}. \end{cases}$$

**引理 3**<sup>[18]</sup> 对于  $\sigma_1 \in R, \sigma_2 \in R$  和常数  $m > 0, n > 0, h > 0$ , 有下列不等式成立:

$$|\sigma_1|^m |\sigma_2|^n \leq \frac{m}{m+n} h |\sigma_1|^{m+n} + \frac{n}{m+n} h^{-\frac{m}{n}} |\sigma_2|^{m+n}. \quad (10)$$

**引理 4**<sup>[18]</sup> 对于  $x_i > 0 (i = 1, 2, \dots, j)$  和  $\nu > 0$ , 有下列不等式成立:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^j x_i^\nu \geq \left( \sum_{i=1}^j x_i \right)^\nu, & 0 < \nu < 1; \\ \sum_{i=1}^j x_i^\nu \geq j^{1-\nu} \left( \sum_{i=1}^j x_i \right)^\nu, & \nu > 1. \end{cases} \quad (11)$$

## 2 控制器设计

基于反递推推算法, 本文提出一种预定时间重复学习控制方法, 以保证瞬态过程中跟踪误差的预定时间收敛和稳态过程中角位置的高精度跟踪.

定义跟踪误差  $z_1$  和中间误差  $z_2$  为

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_{1r}, \\ z_2 &= x_2 - x_{2r} - \alpha = \dot{z}_1 - \alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

其中:  $x_{1r}, x_{2r} \in R^n$  分别是周期为  $T$  的期望角位置轨迹和期望角速度轨迹;  $\alpha \in R^n$  是需要设计的虚拟控制器. 具体的设计过程如下.

step 1: 构造 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^T z_1, \quad (13)$$

对其求导, 可得

$$\dot{V}_1 = z_1^T \dot{z}_1 = z_1^T (z_2 + \alpha). \quad (14)$$

设计虚拟控制器为

$$\alpha = -k_1 z_1 - k_2 \text{sig}^{1+\gamma}(z_1). \quad (15)$$

其中:  $k_1 = k_{11} + k_{12}, k_{11} = \frac{1}{2}, k_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{2-\gamma}{2} \cdot \frac{\pi}{\gamma T_c}, k_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \cdot n^{\frac{\gamma}{2}} 2^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\pi}{\gamma T_c}, 0 < \gamma < 1, 0 < T_c$  且  $\sqrt{2}T_c < T, \text{sig}^\gamma(z_1) = [|z_{11}|^\gamma \text{sign}(z_{11}), \dots, |z_{1n}|^\gamma \text{sign}(z_{1n})]^T$ .

将式(15)代入(14), 利用引理4可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1^T z_2 - k_1 z_1^T z_1 - k_2 z_1^T \text{sig}^{1+\gamma}(z_1) \leq \\ & -k_1 \|z_1\|^2 - k_2 n^{-\frac{\gamma}{2}} (\|z_1\|^2)^{1+\frac{\gamma}{2}} + z_1^T z_2. \end{aligned} \quad (16)$$

根据引理3, 定义  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \|z_1\|, m = \gamma, n = 2 - \gamma$  和  $h = 1$ , 可得

$$-\|z_1\|^2 \leq \frac{\gamma}{2-\gamma} - \frac{2}{2-\gamma} (\|z_1\|^2)^{\frac{2-\gamma}{2}}. \quad (17)$$

将式(17)代入(16), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \\ & -k_{11} \|z_1\|^2 + \frac{k_{12}\gamma}{2-\gamma} - \frac{2k_{12}}{2-\gamma} (\|z_1\|^2)^{1-\frac{\gamma}{2}} - \\ & k_2 n^{-\frac{\gamma}{2}} (\|z_1\|^2)^{1+\frac{\gamma}{2}} + z_1^T z_2 = \\ & -\frac{1}{2} \|z_1\|^2 + z_1^T z_2 - \frac{\pi}{\gamma T_c} (V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + 2^{\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_1, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\delta_1 = \frac{k_{12}\gamma}{2-\gamma}$ .

**注 1** 与现有的预定时间控制策略相比<sup>[18-20]</sup>, 本文设计的虚拟控制器(15)表达形式简单, 未使用分段连续函数, 收敛性/稳定性分析无需进行分段讨论, 且不含分式计算, 从而能有效减轻计算负担, 降低分析复杂度.

step 2: 构造 Lyapunov 函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^T M z_2, \quad (19)$$

对其求导, 可得

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2^T M \dot{z}_2 + \frac{z_2^T \dot{M} z_2}{2}. \quad (20)$$

根据式(3)和性质2可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2^T (M \dot{z}_2 + C z_2) = \\ & \dot{V}_1 + z_2^T (\tau - C x_2 - G - H - M \dot{x}_{2r} - \\ & F - M \dot{\alpha} + C x_2 - C x_{2r} - C \alpha + d) = \\ & \dot{V}_1 + z_2^T (\tau + Y(x) - M \dot{x}_{2r} - M \dot{\alpha} - \end{aligned}$$

$$C\mathbf{x}_{2r} - C\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{d}). \tag{21}$$

其中:  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ ;  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) = [\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n]^T = -\mathbf{G} - \mathbf{F} - \mathbf{H}$  是机械臂系统的集总不确定性, 包括不确定惯性矩阵  $\Delta\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 、不确定科里奥利离心矩阵  $\Delta\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 、不确定重力力矩  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  以及不确定摩擦力矩  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$ .

当机械臂角位置  $\mathbf{x}_1$  跟踪周期性期望角位置  $\mathbf{x}_{1r}$  时, 集总不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x})$  跟踪  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$ , 因此,  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x})$  包含与期望轨迹  $\mathbf{x}_{1r}$  同周期的周期不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$  和非周期性不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$ . 然而, 现有的大多数非线性控制方法, 通常将集总不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x})$  视为时变扰动, 并采用扰动抑制技术对其进行补偿. 本文则根据期望轨迹  $\mathbf{x}_{1r}$  的周期特性, 将不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x})$  分为周期不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$  和非周期性不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$ , 并构建全限幅重复学习律和鲁棒控制律, 分别用于补偿周期性和非周期性不确定性. 因此, 式(21)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \dot{V}_1 + \mathbf{z}_2^T [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_{2r} - \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\alpha}} - C\mathbf{x}_{2r} - \\ & C\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r) + (\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)) + \mathbf{d}]. \end{aligned} \tag{22}$$

其中:  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r) = [\Upsilon_{1r}, \dots, \Upsilon_{nr}]^T$ ,  $\mathbf{x}_r = [\mathbf{x}_{1r}^T, \mathbf{x}_{2r}^T]^T$ .

根据式(22), 实际控制器  $\boldsymbol{\tau}$  可设计为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3, \\ \boldsymbol{\tau}_1 = & -\frac{\pi}{\gamma T_c} (\eta^{1-\frac{\gamma}{2}} \text{sig}^{1-\gamma}(\mathbf{z}_2) + \\ & 2^{\frac{\gamma}{2}} n^{\frac{\gamma}{2}} \eta^{1+\frac{\gamma}{2}} \text{sig}^{1+\gamma}(\mathbf{z}_2)) - \lambda_1 \mathbf{z}_2, \\ \boldsymbol{\tau}_2 = & \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_{2r} + \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + C\mathbf{x}_{2r} + C\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\mathbf{x}_r), \\ \boldsymbol{\tau}_3 = & -\frac{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}}. \end{aligned} \tag{23}$$

其中:  $\boldsymbol{\tau}_1$  是预定时间控制项, 用来保证瞬态过程中误差的预定时间收敛;  $\boldsymbol{\tau}_2$  是全限幅重复学习控制项, 用来保证精确补偿周期性不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$ ;  $\boldsymbol{\tau}_3$  是鲁棒控制项, 用来保证补偿非周期干扰  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$  及外部干扰  $\mathbf{d}$ ;  $\lambda_1 = \lambda_{11} + 1, \lambda_{11} > 0; \eta > 0$  满足性质 1;  $\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}$  是鲁棒控制项的系数, 满足  $\bar{\boldsymbol{\Upsilon}} \geq \|\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)\| + \|\mathbf{d}\|$ ;  $\varepsilon > 0; \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\mathbf{x}_r)$  是周期不确定性  $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)$  的估计值, 其表达式为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\mathbf{x}_r(t)) = & \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t))). \\ \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t)) = & \begin{cases} \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t-T))) + \mu_0 \phi(t) \mathbf{z}_2, & t \in [0, +\infty); \\ 0, & t \in [-T, 0). \end{cases} \end{aligned} \tag{24}$$

sat( $\cdot$ ) 是限幅函数.  $\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t))$  的限幅值设为  $\boldsymbol{\Upsilon}_M$ , 其表

达式为

$$\text{sat}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t))) = \begin{cases} \boldsymbol{\Upsilon}_M, & \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t)) > \boldsymbol{\Upsilon}_M; \\ \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t)), & |\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t))| \leq \boldsymbol{\Upsilon}_M; \\ -\boldsymbol{\Upsilon}_M, & \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}_0(\mathbf{x}_r(t)) < -\boldsymbol{\Upsilon}_M. \end{cases}$$

$\mu_0 > 0$ .  $\phi(t)$  是定义在  $[0, +\infty)$  上的严格递增函数, 其表达式为

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & t \in [0, T); \\ 1, & t \in [T, +\infty). \end{cases} \tag{25}$$

### 3 稳定性证明

通过给出以下两个定理, 分析闭环系统的稳定性和跟踪误差收敛性.

**定理 1** 针对机械臂系统(1), 给定周期性期望轨迹  $\mathbf{x}_{1r}$ , 设计虚拟控制器(15)和实际控制器(23), 则角位置误差  $\mathbf{z}_1$  在预定时间  $T_0$  内收敛至原点附近的邻域  $\Delta_1$  内, 其中

$$\Delta_1 = \left\{ \lim_{t \rightarrow T_0} \mathbf{z}_1 \mid V_2 \leq \min \left\{ \left( \frac{2\gamma T_c \delta_2}{\pi} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{2\gamma T_c \delta_2}{\pi} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \right\}.$$

**证明** 将式(23)代入(22), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \dot{V}_1 + \mathbf{z}_2^T \left[ -\lambda_1 \mathbf{z}_2 - \frac{\pi}{\gamma T_c} (2^{\frac{\gamma}{2}} n^{\frac{\gamma}{2}} \eta^{1+\frac{\gamma}{2}} \text{sig}^{1+\gamma}(\mathbf{z}_2) + \right. \\ & \left. \eta^{1-\frac{\gamma}{2}} \text{sig}^{1-\gamma}(\mathbf{z}_2)) + (\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)) - \hat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\mathbf{x}_r) + \right. \\ & \left. (\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)) + \mathbf{d} - \frac{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}} \right], \end{aligned} \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}} = \\ & -\frac{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\|\mathbf{z}_2\|^2 + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\|\mathbf{z}_2\| - \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\|\mathbf{z}_2\|}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}} \leq \\ & -\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon\|\mathbf{z}_2\|}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}} \leq \varepsilon - \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\|\mathbf{z}_2\|. \end{aligned} \tag{27}$$

同时

$$\mathbf{z}_2^T \left[ (\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}_r)) + \mathbf{d} - \frac{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}} \right] \leq \varepsilon. \tag{28}$$

将式(18)和(27)代入(26), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{2} + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 - \lambda_1 \|\mathbf{z}_2\|^2 + \mathbf{z}_2^T \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}(\mathbf{x}_r) - \\ & -\frac{\pi}{\gamma T_c} (V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + 2^{\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_1 - \\ & \frac{\pi}{\gamma T_c} [(\eta\|\mathbf{z}_2\|^2)^{1-\frac{\gamma}{2}} + 2^{\frac{\gamma}{2}} (\eta\|\mathbf{z}_2\|^2)^{1+\frac{\gamma}{2}}] + \\ & \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\|\mathbf{z}_2\| - \frac{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}\mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}}}. \end{aligned} \tag{29}$$

利用杨氏不等式  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} \leq \frac{\|\mathbf{a}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{b}\|^2}{2}$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{2} + \frac{\|\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r)\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{2} - \\ & \lambda_1 \|\mathbf{z}_2\|^2 - \frac{\pi}{\gamma T_c} (V_2^{1-\frac{\gamma}{2}} + V_2^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_1 + \varepsilon \leq \\ & -\frac{\pi}{\gamma T_c} (V_2^{1-\frac{\gamma}{2}} + V_2^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_2. \end{aligned} \quad (30)$$

其中:  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_r) - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r)$ ,  $\delta_2 = \delta_1 + \varepsilon + \|\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r)\|^2/2$ .

根据引理 1 和式 (29) 可知, 角位置误差  $\mathbf{z}_1$  将收敛至如下区域:

$$\Delta_1 = \left\{ \lim_{t \rightarrow T_0} \mathbf{z}_1 \mid V_2 \leq \min \left\{ \left( \frac{2\gamma T_c \delta_2}{\pi} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{2\gamma T_c \delta_2}{\pi} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \right\}. \quad (31)$$

其中: 预定时间  $T_0$  满足  $T_0 < T$ ,  $T$  是期望轨迹  $\mathbf{x}_{1r}$  的周期.  $\square$

定理 1 给出了瞬态过程中跟踪误差的预定时间收敛性分析, 接下来分析稳态过程中角位置的高精度跟踪性能.

**定理 2** 在重复学习律 (24) 的作用下, 机械臂系统 (1) 的角位置跟踪误差  $\mathbf{z}_1$  在经过一个周期学习后, 将收敛至原点附近较小邻域  $\Delta_3$ , 其中

$$\Delta_3 = \left\{ \mathbf{z}_1 \mid V_2 \leq \min \left\{ \left( \frac{2\gamma T_c \delta_4}{\pi} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{2\gamma T_c \delta_4}{\pi} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \right\}.$$

**证明** 构造如下 Lyapunov 函数:

$$V = V_2 + \frac{1}{2\mu_0} \int_{t-T}^t \tilde{\mathbf{Y}}^T(\mathbf{x}_r(\tau)) \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(\tau)) d\tau, \quad (32)$$

对式 (32) 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{V}_2(t) + \frac{1}{2\mu_0} [\tilde{\mathbf{Y}}^T(\mathbf{x}_r(t)) \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)) - \\ & \tilde{\mathbf{Y}}^T(\mathbf{x}_r(t-T)) \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t-T))]. \end{aligned} \quad (33)$$

利用等式  $(o-\sigma)^T(o-\sigma) - (o-\varphi)^T(o-\varphi) = (\varphi-\sigma)^T[2(o-\sigma) + (\sigma-\varphi)]$  和周期特性  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_r(t)) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_r(t-T))$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}^T(\mathbf{x}_r(t)) \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)) - \tilde{\mathbf{Y}}^T(\mathbf{x}_r(t-T)) \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t-T)) \leq \\ 2[\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t-T)) - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t))]^T \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)). \end{aligned} \quad (34)$$

由式 (24) 和引理 2 可得

$$\begin{aligned} 2[\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t-T)) - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t))]^T \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)) = \\ 2[\hat{\mathbf{Y}}_0(\mathbf{x}_r(t-T)) - \mu_0 \phi(t) \mathbf{z}_2 - \text{sat}(\hat{\mathbf{Y}}_0(\mathbf{x}_r(t)))]^T \times \\ [\mathbf{Y}(\mathbf{x}_r(t)) - \text{sat}(\hat{\mathbf{Y}}_0(\mathbf{x}_r(t)))] \leq \\ -2\mu_0 \phi(t) \mathbf{z}_2^T \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)). \end{aligned} \quad (35)$$

将式 (35) 代入 (33), 可得

$$\dot{V}(t) \leq \dot{V}_2 - \phi(t) \mathbf{z}_2^T \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)). \quad (36)$$

将式 (29) 代入 (36), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{1}{2} \|\mathbf{z}_1\|^2 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 - \frac{\pi}{\gamma T_c} (V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + 2^{\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_1 - \\ & -\frac{1}{2} \|\mathbf{z}_2\|^2 - \lambda_{11} \|\mathbf{z}_2\|^2 + (1 - \phi(t)) \mathbf{z}_2^T \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)) - \\ & \frac{\pi}{\gamma T_c} \left( \left( \frac{\eta \|\mathbf{z}_2\|^2}{2} \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} + 2^{\frac{\gamma}{2}} \left( \frac{\eta \|\mathbf{z}_2\|^2}{2} \right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (37)$$

由杨氏不等式  $\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 \leq \frac{\|\mathbf{z}_1\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{2}$  和引理 4 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\lambda_{11} \|\mathbf{z}_2\|^2 - \frac{\pi}{\gamma T_c} (V_2^{1-\frac{\gamma}{2}} + V_2^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_1 + \\ & \varepsilon + (1 - \phi(t)) \mathbf{z}_2^T \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)). \end{aligned} \quad (38)$$

根据式 (25) 中  $\phi(t)$  的定义, 分别分析  $t \in [T_0, T)$  和  $t \in [T, \infty)$  上跟踪误差  $\mathbf{z}_1$  的收敛性.

当  $t \in [T_0, T)$  时,  $0 \leq \phi(t) < 1$ , 有  $1 - \phi(t) \leq 1$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{\pi}{\gamma T_c} (V_2^{1-\frac{\gamma}{2}} + V_2^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_1 - \lambda_{11} \|\mathbf{z}_2\|^2 + \\ & (1 - \phi) \|\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r)\| \cdot \|\mathbf{z}_2\| + \varepsilon \leq \\ & -\frac{\pi}{\gamma T_c} (V_2^{1-\frac{\gamma}{2}} + V_2^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \frac{(1 - \phi)^2 \|\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r)\|^2}{4\lambda_{11}} - \\ & \lambda_{11} \left( \|\mathbf{z}_2\| - \frac{(1 - \phi) \|\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r)\|}{2\lambda_{11}} \right)^2 + \delta_1 + \varepsilon \leq \\ & \frac{\pi}{\gamma T_c} (V_2^{1-\frac{\gamma}{2}} + V_2^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_3, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\delta_3 = \delta_1 + \varepsilon + \frac{(1 - \phi)^2 \|\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t))\|^2}{4\lambda_{11}}.$$

由式 (30) 可知,  $\mathbf{z}_1$  将会收敛至

$$\Delta_2 = \left\{ \mathbf{z}_1 \mid V_2 \leq \min \left\{ \left( \frac{2\gamma T_c \delta_3}{\pi} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{2\gamma T_c \delta_3}{\pi} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \right\}. \quad (40)$$

对于  $t \in [T, +\infty)$ , 有  $\phi(t) \equiv 1$  成立, 则式 (38) 可以简化为

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\pi}{\gamma T_c} (V_2^{1-\frac{\gamma}{2}} + V_2^{1+\frac{\gamma}{2}}) + \delta_4, \quad (41)$$

其中  $\delta_4 = \delta_1 + \varepsilon$ . 因此, 跟踪误差  $\mathbf{z}_1$  收敛至原点附近较小邻域内, 即

$$\Delta_3 = \left\{ \mathbf{z}_1 \mid V_2 \leq \min \left\{ \left( \frac{2\gamma T_c \delta_4}{\pi} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{2\gamma T_c \delta_4}{\pi} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \right\}. \quad (42)$$

由  $\delta_4$  的定义可知,  $\delta_4$  小于  $\delta_2$  和  $\delta_3$ . 因此, 误差收敛区域(42)小于(31)和(40). 这意味着在重复学习定律(24)的作用下, 机械臂系统(1)的位置跟踪误差  $z_1$  在经过一个周期的学习后, 将收敛至原点附近较小邻域内.  $\square$

**注2** 由式(40)和(42)可知, 选择较小的  $\gamma$  和较大的  $\lambda_{11}$  可使  $z_1$  收敛至原点附近较小的邻域内. 但过小的  $\gamma$  和过大的  $\lambda_{11}$  会导致控制增益过大. 因此, 参数  $\gamma$  和  $\lambda_{11}$  的选择应在补偿性能与控制增益之间进行权衡.

**注3** 本文设计全幅重复学习律(24)来精确补偿周期不确定性  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_r)$ . 为了提高学习速度, 本文设计预定时间重复学习控制器(23), 在第1个学习周期内, 预定时间控制起主要作用, 使位置跟踪误差在预先设定的时间内收敛至原点附近邻域  $\Delta_1$ . 从第2个学习周期开始, 重复学习律的作用逐渐增加, 进一步补偿位置跟踪误差的周期分量, 使得位置跟踪误差收敛到原点附近较小邻域  $\Delta_3$ , 最终实现机械臂角位置对周期性期望轨迹的高精度跟踪.

### 4 仿真结果

为验证本文所提出方法的有效性, 本节利用 Solidworks 软件和力学工具箱搭建双关节机械臂的物理模型, 在 Matlab/Simulink 软件上对双关节机械臂轨迹跟踪进行动态仿真. 在式(1)中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \rho_1 + 2\rho_2 \cos(q_2) & \rho_3 + \rho_2 \cos(q_2) \\ \rho_3 + \rho_2 \cos(q_2) & \rho_4 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -\rho_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & -2\rho_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ 0 & \rho_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} \rho_7 \\ \rho_8 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \rho_5 \cos(q_1) + \rho_6 \cos(q_1 + q_2) \\ \rho_6 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

其中:  $\rho_1 = (m_1 + m_2)\ell_1^2 + m_2\ell_2^2 + J_1$ ,  $\rho_2 = m_2\ell_1\ell_2$ ,  $\rho_3 = m_2\ell_2^2$ ,  $\rho_4 = \rho_3 + J_2$ ,  $\rho_5 = (m_1 + m_2)\ell_1 g$ ,  $\rho_6 = m_2\ell_2 g$ ,  $\rho_7 = \dot{q}_1$ ,  $\rho_8 = 1.5\dot{q}_2$ . 具体参数设定为:  $m_1 = 0.5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ ,  $\ell_1 = 1 \text{ m}$ ,  $\ell_2 = 0.8 \text{ m}$ ,  $J_1 = J_2 = 5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .  $m_1$  和  $m_2$  的不确定值分别为  $\Delta m_1 = 0.2 \text{ kg}$  和  $\Delta m_2 = 0.3 \text{ kg}$ ,  $\mathbf{d} = 0.05 \times \text{rand}(2, 1)$ .

机械臂角位置和角速度的初始值分别给定为  $\mathbf{q}(0) = [2, 1.5]^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0, 0]^T$ . 期望轨迹给定为  $\mathbf{q}_r = [q_{1r}, q_{2r}]^T = [1 + \sin(0.5\pi t), 1 + \sin(0.5\pi t)]^T$ .

**C1: 预定时间重复学习控制方法.**

控制器(15)、(23)、(24)和(25)中的参数分别选择

为  $\gamma = 0.3, \lambda_1 = 6, \eta = 1.5, \bar{\mathbf{Y}} = 1, \varepsilon = 10^{-4}, \mu_0 = 30, T = 4 \text{ s}$ . 为验证C1方法的预定时间收敛性, 选择两个不同值的  $T_c$ , 即  $T_{c1} = 2 \text{ s}$  和  $T_{c2} = 3 \text{ s}$ .

**C2: 有限时间控制方法<sup>[10]</sup>.**

虚拟控制器和实际控制器分别设计为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= -k_1 \mathbf{z}_1 - k_2 \text{sig}^\gamma \mathbf{z}_1, \\ \boldsymbol{\tau} &= -\lambda_1 \mathbf{z}_2 - \lambda_2 \eta^{\frac{1+\gamma}{2}} \text{sig}^\gamma \mathbf{z}_2 - \frac{\bar{\mathbf{Y}} \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\mathbf{Y}}}}. \end{aligned} \quad (44)$$

其中:  $\lambda_2 = 6, \bar{\mathbf{Y}} = 3, k_1, k_2, \lambda_1, \gamma, \eta, \varepsilon$  均与C1中相同.

**C3: 重复学习控制方法<sup>[8]</sup>.**

控制器设计为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= -k_1 \mathbf{z}_1, \\ \boldsymbol{\tau} &= -\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t)) - \lambda_1 \mathbf{z}_2 - \frac{\bar{\mathbf{Y}} \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \frac{\varepsilon}{\bar{\mathbf{Y}}}}. \end{aligned} \quad (45)$$

其中:  $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_r(t))$  同式(24),  $k_1, \lambda_1, \mu_0, \varepsilon, \bar{\mathbf{Y}}$  均与C1中相同.

**C4: 反演控制方法<sup>[3]</sup>.**

控制器设计为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= -k_1 \mathbf{z}_1, \\ \boldsymbol{\tau} &= -\lambda_1 \mathbf{z}_2 - \frac{\bar{\mathbf{Y}} \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\| + \varepsilon}, \end{aligned} \quad (46)$$

其中  $k_1, \lambda_1, \bar{\mathbf{Y}}$  和  $\varepsilon$  均与C2中相同.

相应的仿真结果如图1~图4所示. 其中, 图1描述C1方法中不同预定时间  $T_{01} = \sqrt{2}T_{c1} = 2\sqrt{2} \text{ s}$  和  $T_{02} = \sqrt{2}T_{c2} = 3\sqrt{2} \text{ s}$  下的跟踪误差比较. 从图1可以看出, 从初始值到原点附近邻域的实际收敛时间分别为  $1.5 \text{ s}$  和  $2.5 \text{ s}$ , 比  $T_{01}$  和  $T_{02}$  小. 此外, 在C1方法作用下, 机械臂位置稳态误差能够收敛到  $\pm 4 \times 10^{-4} \text{ rad}$  的界内, 实现了高精度稳态跟踪. 图2~图4分别描述

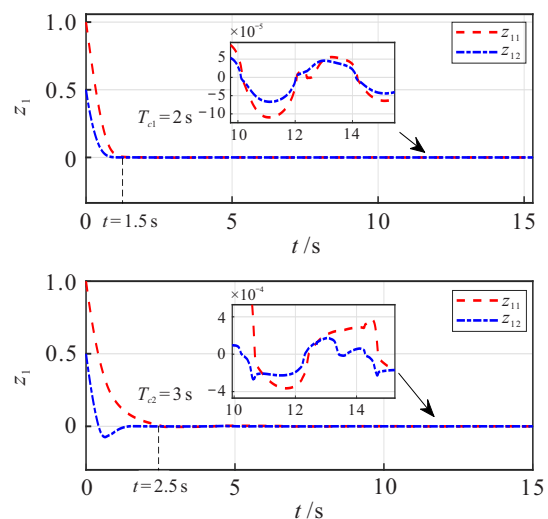


图1 不同预定时间下的C1误差收敛对比

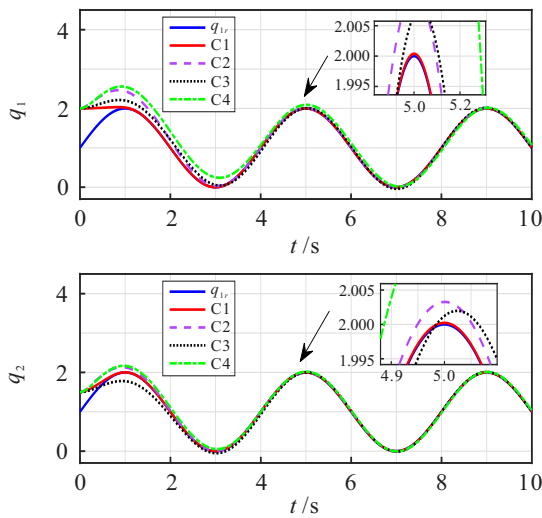


图2  $T_{cl} = 2s$ 时位置跟踪性能对比

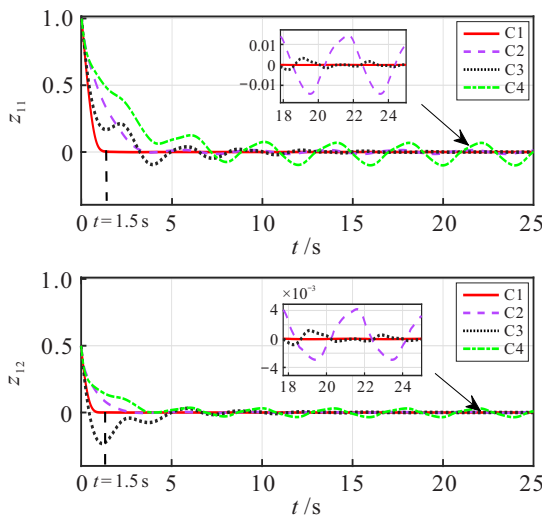


图3  $T_{cl} = 2s$ 时误差收敛对比

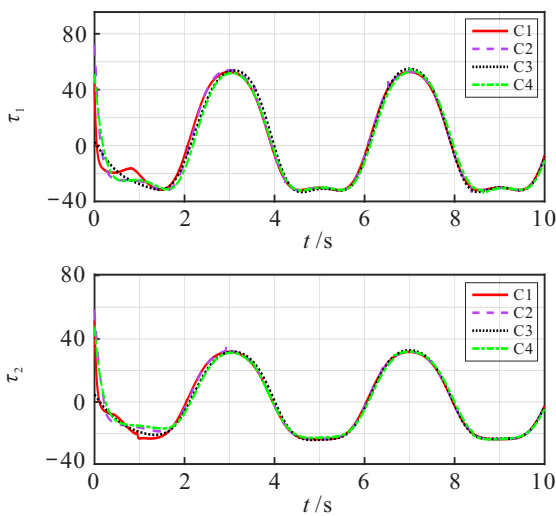


图4  $T_{cl} = 2s$ 时控制输入力矩对比

不同控制方法的角位置跟踪性能、角位置误差收敛性能和控制输入力矩的对比结果.可以看出,在相近的控制输入力矩下,相较于C2~C4,本文提出的C1方法能够保证更快的角位置误差收敛速度和更高的

跟踪精度.同时,表1给出了C1~C4方法收敛时间和稳态误差界等性能对比结果,表1的结果与理论分析结果相一致.

表1  $T_{cl} = 2s$ 时C1~C4控制性能对比

方法	收敛时间/s	稳态误差界/rad
C1	1.5	$\pm 4 \times 10^{-4}$
C2	3	$\pm 5 \times 10^{-2}$
C3	5	$\pm 5 \times 10^{-3}$
C4	5	$\pm 6 \times 10^{-2}$

为验证所提出方法在不同幅度干扰下的位置跟踪效果,给定3种干扰分别为  $d_1 = 0.05 \times \text{rand}(2, 1)$ ,  $d_2 = 0.5 \times \text{rand}(2, 1)$ ,  $d_3 = 1 \times \text{rand}(2, 1)$ ,图5是不同幅度干扰下的跟踪误差对比情况.由图5可以看出,在不同幅度干扰下,本文所提出的控制方法均能确保位置跟踪误差的收敛性能.

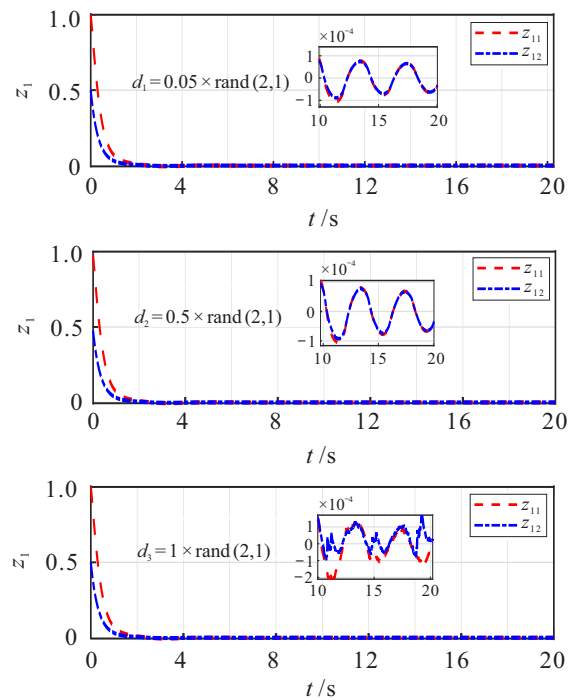


图5 不同幅度干扰下的跟踪误差对比

## 5 结论

本文提出了一种非奇异预定时间重复学习控制方法,可实现机械臂系统快速、高精度地跟踪周期性角位置轨迹.与现有预定时间控制方法相比,本文设计的非奇异虚拟控制器无需构造分段连续函数或二次分式函数,从而减轻了计算负担和分析复杂度.在控制器作用下,机械臂角位置跟踪误差能在预先设定的时间内收敛至原点附近邻域内,并通过构建全限幅重复学习律实现了机械臂角位置对期望轨迹的高精度跟踪性能.

## 参考文献(References)

- [1] Guo D S, Li Z X, Khan A H, et al. Repetitive motion planning of robotic manipulators with guaranteed precision[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2021, 17(1): 356-366.
- [2] Zhao W, Liu Y, Yao X Q. Adaptive fuzzy containment and vibration control for multiple flexible manipulators with model uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023, 31(4): 1315-1326.
- [3] 赵林, 徐志国. 不确定机械臂系统的自适应命令滤波反步渐近跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(9): 2701-2706.  
(Zhao L, Xu Z G. Adaptive command filtered backstepping asymptotic tracking control for uncertain manipulator systems[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(9): 2701-2706.)
- [4] Zhai J Y, Xu G. A novel non-singular terminal sliding mode trajectory tracking control for robotic manipulators[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(1): 391-395.
- [5] 陈正升, 王雪松, 程玉虎. 考虑扰动与输入饱和的机械臂连续非奇异快速终端滑模控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(4): 903-912.  
(Chen Z S, Wang X S, Cheng Y H. Continuous non-singular fast terminal sliding mode control of robotic manipulators considering disturbance and input saturation[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(4): 903-912.)
- [6] Kaneko K, Horowitz R. Repetitive and adaptive control of robot manipulators with velocity estimation[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1997, 13(2): 204-217.
- [7] Sun M X, Ge S S, Mareels I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, 22(3): 563-568.
- [8] Chen Q, Yu X Q, Sun M X, et al. Adaptive repetitive learning control of PMSM servo systems with bounded nonparametric uncertainties: Theory and experiments[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 68(9): 8626-8635.
- [9] 云利军, 徐天伟, 孙云平. 含有参数化和非参数化不确定性系统重复学习控制[J]. *控制与决策*, 2010, 25(12): 1880-1884.  
(Yun L J, Xu T W, Sun Y P. Repetitive learning control for nonlinear systems with both parametric and non-parametric uncertainties systems[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(12): 1880-1884.)
- [10] 孙明轩, 钱亚中, 陈建勇. 重复学习有限时间控制[C]. 第27届中国控制与决策会议. 青岛, 2015: 1772-1777.  
(Sun M X, Qian Y Z, Chen J Y. Repetitive learning finite-time control[C]. *The 27th Chinese Control and Decision Conference*. Qingdao, 2015: 1772-1777.)
- [11] 韦俊宝, 李海燕, 李静, 等. 基于有限时间预设性能的高超声速飞行器反演控制[J]. *控制与决策*, 2023, 38(6): 1593-1601.  
(Wei J B, Li H Y, Li J, et al. Backstepping control for hypersonic vehicle based on finite time prescribed performance[J]. *Control and Decision*, 2023, 38(6): 1593-1601.)
- [12] Li C, Zhao L, Xu Z G. Finite-time adaptive event-triggered control for robot manipulators with output constraints[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(9): 3824-3828.
- [13] Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. *Automatica*, 2002, 38(12): 2159-2167.
- [14] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [15] Zhu C Z, Jiang Y M, Yang C G. Fixed-time neural control of robot manipulator with global stability and guaranteed transient performance[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023, 70(1): 803-812.
- [16] Guo X Y, Zhang H G, Sun J Y, et al. Fixed-time fuzzy adaptive control of manipulator systems under multiple constraints: A modified dynamic surface control approach[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, 53(4): 2522-2532.
- [17] Sanchez-Torres J D, Sanchez E N, Loukianov A G. Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes[C]. *2015 American Control Conference*. Chicago, 2015: 5842-5846.
- [18] Xie S Z, Chen Q, Yang Q M. Adaptive fuzzy predefined-time dynamic surface control for attitude tracking of spacecraft with state constraints[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023, 31(7): 2292-2304.
- [19] Sun Y Z, Gao Y B, Zhao Y, et al. Neural network-based tracking control of uncertain robotic systems: Predefined-time nonsingular terminal sliding-mode approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(10): 10510-10520.
- [20] Munoz-Vazquez A J, Sanchez-Torres J D, Jimenez-Rodriguez E, et al. Predefined-time robust stabilization of robotic manipulators[J]. *ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 24(3): 1033-1040.

## 作者简介

李亚倩(1998—), 女, 硕士生, 从事重复学习控制、有限时间控制等研究, E-mail: 2112103380@zjut.edu.cn;

陈强(1984—), 男, 教授, 博士, 从事伺服系统智能自适应控制、迭代/重复学习控制及应用等研究, E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn;

施卉辉(1994—), 女, 博士后, 从事自适应控制、迭代学习控制等研究, E-mail: shihh@zjut.edu.cn;

张智皓(1999—), 男, 硕士生, 从事飞行器控制的研究, E-mail: 2112103064@zjut.edu.cn;

陈鹏(1992—), 男, 博士生, 从事机械臂控制的研究, E-mail: 18868874900@163.com.