



中国科技期刊卓越行动计划项目入选期刊

控制与决策

CONTROL AND DECISION



有向通信拓扑下二阶多智能体系统的分布式固定时间优化算法

刘源, 刘宁宁, 曾显普

引用本文:

刘源, 刘宁宁, 曾显普. 有向通信拓扑下二阶多智能体系统的分布式固定时间优化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3866–3872.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1127>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

控制与决策. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

孤岛微电网异构电池储能系统的分布式有限时间次级控制

Distributed finite-time secondary control for heterogeneous battery energy storage systems in an islanded microgrid

控制与决策. 2021, 36(8): 2034–2041 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0012>

丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计

Distributed moving horizon estimation for stochastic uncertain system with packet dropouts and quantized measurements

控制与决策. 2021, 36(7): 1771–1778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1603>

基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

有向通信拓扑下二阶多智能体系统的分布式 固定时间优化算法

刘源[†], 刘宁宁, 曾显普

(南阳理工学院 智能制造学院, 河南 南阳 473004)

摘要: 针对有向通信拓扑下的二阶多智能体系统分布式优化问题, 提出一种固定时间收敛的分布式控制算法. 该算法基于新的分布式估计器设计, 通过局部信息交换, 使各智能体能够对全局目标函数梯度进行准确估计. 在估计器的基础上, 为各智能体设计分布式固定收敛时间算法, 以确保所有个体在有限时间内收敛于目标函数的最优解. 通过运用固定时间收敛理论和不等式缩放技巧, 对算法的稳定性进行理论证明, 并通过数值仿真实验验证所设计算法的有效性.

关键词: 二阶系统; 固定时间收敛; 分布式优化; 有向通信拓扑; 一致性; 梯度观测器

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1127

引用格式: 刘源, 刘宁宁, 曾显普. 有向通信拓扑下二阶多智能体系统的分布式固定时间优化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(11): 3866-3872.

Distributed fixed-time optimization for multiple second-order systems under directed communication topology

LIU Yuan[†], LIU Ning-ning, ZENG Xian-pu

(School of Intelligent Manufacturing, Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004, China)

Abstract: This article investigates the distributed optimization problem of second-order multi-agent systems under directed communication topologies, and proposes a distributed control algorithm for fixed-time convergence. The control algorithm is based on a novel distributed estimator design, enabling each intelligent agent to accurately estimate the gradient of the global objective function through local information exchange. Building upon the estimator, a distributed algorithm with fixed convergence time is devised for each intelligent agent, ensuring that all entities converge to the optimal solution of the objective function within a finite time. The stability of the algorithm is theoretically proven using fixed-time convergence theory and inequality scaling techniques, and the effectiveness of the proposed algorithm is demonstrated through numerical simulations.

Keywords: second-order systems; fixed-time convergence; distributed optimization; directed communication topology; consensus; gradient observer

0 引言

近年来, 多智能体系统的分布式优化控制问题在诸多领域和应用中引起了广泛关注, 包括寻源问题^[1-2]、机器学习^[3]、智能电网^[4-5]、模型预测控制^[6]等. 与传统的分布式协同控制相比, 分布式优化问题从本质上来讲更加复杂, 因为智能体之间不仅需要分布式协同, 而且需要共同寻优, 使得全局成本函数值最小.

在实际的分布式优化应用中, 收敛速度非常重

要, 它是评估控制器性能的重要指标. 有限或固定时间控制器具有许多优势, 例如更快的收敛速度、高精度和抗干扰能力等^[7-9]. 因此, 文献^[10-19]对线性一阶和二阶积分器多智能体系统设计了一些优秀的分布式有限/固定时间优化算法, 使得多智能体系统在固定时间或有限时间内收敛到全局最优解. 然而, 相较于一阶积分器系统, 针对二阶积分器多智能体系统的有限时间/固定时间优化算法则相对较少. 文献^[14]基于加幂积分技术和齐次系统理论, 研究了二阶

收稿日期: 2023-08-09; 录用日期: 2024-01-02.

基金项目: 南阳理工学院博士科研启动项目(510076).

责任编辑: 李少远.

[†]通讯作者. E-mail: liuyuan8601@163.com.

多智能体系统的分布式有限时间优化问题. 该方法通过引入加幂积分器来解决匹配扰动的问题, 并利用齐次系统理论来设计分布式优化控制器, 实现了二阶多智能体系统的分布式一致最优. 对于含有非匹配扰动的二阶系统, 文献[15]利用有限时间扰动观测器、齐次系统理论、积分滑模控制技术和有限时间观测技术等, 设计了有限时间分布式最优控制器. 在无速度测量情况下, 文献[16]结合有限时间观测器和有限时间估计技术, 在不利用智能体速度量的情形下实现了二阶多智能体系统的分布式一致最优. 文献[17]研究了在无向通信拓扑下, 二阶多智能体系统的分布式固定时间优化问题, 文中所设计的算法无需邻居智能体交换代价函数的梯度信息. 文献[18]基于Lyapunov框架下的凸理论, 通过为每个智能体设计辅助系统, 提出了一种无速度信息的分布式协调最优控制策略, 无需依赖全局拓扑信息. 然而, 以上文献中要求通信网络拓扑为无向图, 这比有向通信拓扑图的要求更为苛刻.

基于此, 本文设计一种全新的固定时间分布式优化控制算法, 可以解决在有向图通信拓扑条件下二阶多智能体系统的固定时间优化问题. 首先对所解决的问题进行描述, 并介绍相关引理; 然后提出控制算法, 对算法的收敛性进行证明; 最后通过数值仿真实验验证算法的有效性. 本文所设计算法的创新点主要概括如下:

1) 本文所提出算法的收敛时间不依赖于系统的初始状态, 且可通过参数调整改变收敛时间. 此外, 区别于文献[17]和文献[18]在分析固定收敛时间上界时的思路, 本文基于集成化Lyapunov函数的设计思想, 对各环节Lyapunov函数进行有机整合, 使得对收敛时间的上界估算更加准确.

2) 与文献[17]解决在无向图通信条件下的分布式优化问题不同, 本文考虑有向通信拓扑, 放宽了通信条件的限制, 适用于更多场景.

3) 不同于文献[19]和文献[20]所设计的控制器中直接含有非连续项, 本文的非连续项放在估计器部分, 而非直接位于控制器中, 从而避免了震颤现象的发生.

1 预备知识和问题描述

1.1 符号说明

设 \mathbb{R}^+ 和 \mathbb{R} 分别表示正实数集和实数集. 记 $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0}_n = [0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$. 定义 $|x_i|$ 表示 x_i 的绝对值, $\nabla f(x)$ 和 $\nabla^2 f(x)$ 分别表示函数 $f(x)$ 的梯度和Hessian矩阵. 定义

$$\text{sign}(x) = [\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_m)]^T,$$

$$x^{[\alpha]} = (|x_1|^\alpha \cdot \text{sign}(x_1), \dots, |x_m|^\alpha \cdot \text{sign}(x_m))^T,$$

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_m|^2},$$

$$\|x\|_\gamma = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

其中 $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$. 定义 $\mathcal{I}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

1.2 代数图论

用有向图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 描述智能体之间的信息交换. 其中: $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示节点; $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边; $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ 为邻接矩阵, a_{ij} 为非负节点, 由有限集合 \mathcal{I}_n 进行索引. 图 \mathcal{G} 的一条边表示为 $e_{ij} = (v_i, v_j)$. 若在图 \mathcal{G} 中任意两个顶点之间存在一条有向路径, 则称该图为强连通图. 节点 v_i 的邻居集合可表示为 $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$, 是与 v_i 进行通信的所有节点的集合. $\mathcal{D} = \{d_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 被定义为图 \mathcal{G} 的度. 定义 $L = \mathcal{A} - \mathcal{D}$ 为拉普拉斯矩阵. 在本文中, 假设通信图是有向强连通的.

1.3 问题描述

多智能体系统的动力学方程为

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = \tau_i. \quad (1)$$

其中: $x_i, v_i \in \mathbb{R}^m$ 分别为广义位置向量和速度向量, $\tau_i \in \mathbb{R}^m$ 为智能体 i 的控制输入.

本文的目标是为系统(1)设计分布式控制器, 使智能体的状态 x_i 收敛到以下问题的最优解:

$$\begin{aligned} \min_{x_i \in \mathbb{R}^m} f(x) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i); \\ \text{s.t. } x_i &= x_j, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_n. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$; $f_i(x_i) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部代价或目标函数, 其信息仅有智能体 i 可知, 其梯度和Hessian矩阵分别记为 $\nabla f_i(x_i)$ 和 $\nabla^2 f_i(x_i)$. 因此, 本文的目标是设计 τ_i , 在固定时间 T 内有效地解决方程(2)中描述的优化问题, 即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T^-} x_i(t) = x^*, & \lim_{t \rightarrow T^-} v_i(t) = 0, \\ x_i(t) = x^*, & v_i(t) = 0, \quad \forall t \geq T, \quad i \in \mathcal{I}_n. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x^* = \arg \min_{x_i \in \mathbb{R}^m} f(x)$, $t \rightarrow T^-$ 表示时间 t 从固定时间 T 的左侧趋近于 T . 接下来, 就智能体的目标函数做以下假设.

假设1 假设目标函数 $f(x)$ 是二次连续可微的, 并且具有 k_θ 强凸性, 其中 $k_\theta \in \mathbb{R}^+$, 即 $\nabla^2 f(x) \geq k_\theta I_m$. 此外, 它具有唯一的极小值点 x^* , 满足 $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x)$ 和 $\nabla f(x^*) = 0$.

1.4 相关引理

引理1^[21] 假设 n 个智能体与一个参考智能体之间的通信拓扑包含一个以参考智能体为根的有向生成树. 记 $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, 其中 $b_i > 0$ 表示第 i 个智能体可以获得参考智能体的状态, 否则 $b_i = 0$. 令 $\hat{L} = L + B$, 其中 L 为拉普拉斯矩阵, 则 $-\hat{L}$ 是 Hurwitz 矩阵. 此外, 存在对角阵 $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_n) > 0$, 使得 $\Phi\hat{L} + \hat{L}^T\Phi$ 是正定的.

引理2^[22] 考虑一个强连通的通信图, 其拉普拉斯矩阵 L 有一个对应于零特征值的特征向量 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$, 其中 $\xi_i > 0$. 记 $\bar{L} = (\Xi L + L^T \Xi)/2$, 其中 $\Xi = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$. 对于任意固定的 $a > 0, \beta > 0, \alpha > 0, \alpha \neq \beta$, 以下性质成立:

$$\inf_{z \in \Omega(a, \alpha, \beta)} z^T \bar{L} z = k_a > 0, \quad (4)$$

其中向量集合 $\Omega(a, \alpha, \beta) = \{z : \exists y \perp \xi, \gamma = \gamma(\varrho) \geq 0, \text{ s.t. } z = ay^{[\alpha]} + \gamma\varrho^{[\beta]}, z^T z = 1\}$.

引理3^[23] 考虑一个系统 $\dot{x}(t) = g(x, t)$, $x(0) = x_0$. 其中: $x \in \mathbb{R}^m$, 映射 $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在原点的一个开邻域内连续. 假设存在一个连续的正定函数 $V(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 $V(0) = 0$ 且对于 $x \neq 0$, 有 $V(x) > 0$, 使得以下条件成立:

$$\dot{V}(x) \leq -a(V(x))^{\mu_1} - b(V(x))^{\mu_2} \leq 0. \quad (5)$$

其中: $a, b > 0, 0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$. 则原点是有限时间稳定的, 即所有解满足 $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = 0$ 和 $x(t) = 0, \forall t > t_0$, 其中 t_0 满足

$$t_0 \leq \frac{1}{a(1-\mu_1)} + \frac{1}{b(1-\mu_2)}.$$

引理4^[24] 对于向量 $x_i \in \mathbb{R}^m$, 如果 $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$, 则下式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^{\mu_1} &\geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{\mu_1}, \\ \sum_{i=1}^n x_i^{\mu_2} &\geq n^{1-\mu_2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{\mu_2}. \end{aligned}$$

引理5^[25] 对于任意向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $0 < \kappa_1 < 1 < \kappa_2$, 定义 $X_1 = \|x\|_{\kappa_1+1}^{\kappa_1+1} + \|x\|_{\kappa_2+1}^{\kappa_2+1}$, $X_2 = \|y^{[\kappa_1]} + y^{[\kappa_2]}\|$, 则以下不等式成立:

$$X_1^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} \leq X_2^2, \quad (2n)^{\frac{1-\kappa_2}{1+\kappa_2}} X_1^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}} \leq X_2^2. \quad (6)$$

2 主要结论

控制器设计如下:

$$\tau_i = \dot{\delta}_i - (v_i - \delta_i)^{[\mu_1]} - (v_i - \delta_i)^{[\mu_2]}, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \delta_i &= p_1 \left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j - x_i) \right]^{[\kappa_1]} + \\ & p_2 \left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j - x_i) \right]^{[\kappa_2]} - \end{aligned}$$

$$(\mathbf{1}_n^T \otimes I_m Z_i)^{[\mu_1]} - (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m Z_i)^{[\mu_2]}, \quad (7b)$$

$$\dot{Z}_i = \alpha \Upsilon_i^{[\kappa_1]} + \beta \Upsilon_i^{[\kappa_2]} + \iota \text{sign}(\Upsilon_i), \quad (7c)$$

$$\Upsilon_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (Z_j - Z_i) + {}^i \mathbf{I} \otimes (\nabla f_i(x_i) - Z_{ii}). \quad (7d)$$

其中: $Z_i = [Z_{i1}^T, \dots, Z_{in}^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$; $p_1, p_2, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \beta, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^+$; $\kappa_1 < 1 < \kappa_2$; ${}^i \mathbf{I} \in \mathbb{R}^n$ 为第 i 个元素为 1、其他元素全为 0 的 n 维向量; μ_1 和 μ_2 满足下式:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{2\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{\kappa_2 + 1}, \\ \mu_2 = \frac{3\kappa_2 - 1}{\kappa_2 + 1}, \end{cases} \quad (8)$$

容易得到 $\mu_1 < 1 < \mu_2$.

注1 在控制器(7)中, 不需要局部目标函数梯度信息的直接交换, 因此, 可以防止智能体局部目标函数梯度信息的泄露.

注2 式(7c)和(7d)为全局目标函数的梯度估计器. 由于需要计算所有个体的目标函数梯度之和, 本文采用了一种不同的思路, 即每个个体都预测其他所有个体目标函数的梯度, 故所设计观测器的维度是局部目标函数维度的 n 倍.

接下来, 给出本文的主要结论.

定理1 对于通信拓扑为强联通图的二阶多智能体系统(1), 如果假设1成立且 $\iota \geq n \left\| \frac{d}{dt} \nabla f(x) \right\|_{\infty}$, 则使用分布式优化算法(7)可使得多智能体系统在固定时间内收敛至问题(2)的最优解.

证明 证明过程分为两步: 步骤1证明在控制器(7)的作用下, 各智能体的 v_i 收敛到 δ_i , $Z_i - \nabla f(x)$ 收敛到零; 步骤2证明智能体状态在固定时间内统一收敛至优化目标. 这意味着 x_i 收敛到 x^* 且 $v_i = 0$.

步骤1 记 $s_i = \dot{x}_i - \delta_i, \tilde{Z}_i = Z_i - \nabla f(x) \in \mathbb{R}^{nm}, \nabla f(x) = [\nabla f_1(x_1)^T, \dots, \nabla f_n(x_n)^T]^T$. 闭环系统(1)可写为

$$\dot{s}_A = -s_A^{[\mu_1]} - s_A^{[\mu_2]}, \quad (9)$$

其中 $s_A = [s_1^T, \dots, s_n^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$. 构造以下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} s_A^T s_A + \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{\kappa_1 + 1} \|\tilde{Z}_i\|_{\kappa_1+1}^{\kappa_1+1} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{\kappa_2 + 1} \|\tilde{Z}_i\|_{\kappa_2+1}^{\kappa_2+1}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 ϕ_i 如引理1中定义所示. 对 V_1 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s_A^T \dot{s}_A - \sum_{i=1}^n \phi_i (\alpha \tilde{Z}_i^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}_i^{[\kappa_2]})^T \dot{\tilde{Z}}_i = \\ & - s_A^T s_A^{[\mu_1]} - s_A^T s_A^{[\mu_2]} - (\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]})^T (\Phi \hat{L}) \times \end{aligned}$$

$$(\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]}) - (\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]})^T \times \Phi \left(\mathbf{1}_n \otimes \frac{d}{dt} \nabla f(x) + \iota \mathbf{I} \text{sign}(\tilde{Z}) \right). \quad (11)$$

其中: $\hat{L} = L \otimes I_{nm} + \mathbf{I}$, $\mathbf{I} = \text{diag}(^1 I_n, \dots, ^n I_n) \otimes I_m \in \mathbb{R}^{mn^2 \times mn^2}$. 由引理 1 可知, 存在正定对角矩阵 $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_n) \otimes I_{nm}$, 使得 $\Gamma = \Phi \hat{L} + \hat{L}^T \Phi > 0$.

注意到, $\tilde{Z} = [\tilde{Z}_1^T, \dots, \tilde{Z}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{n^2 m}$, $\text{sign}(\tilde{Z}) = \text{sign}(\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]})$, 则 $\dot{V}_1(t)$ 可写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -s_A^T s_A^{[\mu_1]} - s_A^T s_A^{[\mu_2]} - \frac{1}{2}(\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]})^T \Gamma \times \\ & (\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]}) - (\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]})^T \times \\ & (\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]})^T \Phi \left(\mathbf{1}_n \otimes \frac{d}{dt} \nabla f(x) + \right. \\ & \left. \iota \mathbf{I} \text{sign}(\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]}) \right) \leq \\ & -\|s_A\|_{1+\mu_1}^{1+\mu_1} - \|s_A\|_{1+\mu_2}^{1+\mu_2} - \lambda_{\underline{m}}(\Gamma) \|\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \\ & \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]}\|^2 - \phi \sum_{i=1}^n \left(\iota - n \left\| \frac{d}{dt} \nabla f(x) \right\|_{\infty} \right) \|\alpha \tilde{Z}_{ii}^{[\kappa_1]} + \\ & \beta \tilde{Z}_{ii}^{[\kappa_2]}\|_1. \end{aligned} \quad (12)$$

其中: $\tilde{Z}_{ii} \in \mathbb{R}^m$ 为 $\tilde{Z}_i = [\tilde{Z}_{i1}^T, \dots, \tilde{Z}_{in}^T]^T \in \mathbb{R}^{mn}$ 的第 i 个向量, $\phi = \min(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, $\lambda_{\underline{m}}(\Gamma)$ 是 Γ 的最小特征值. 因为 $\iota \geq n \left\| \frac{d}{dt} \nabla f(x) \right\|_{\infty}$, 所以可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\|s_A\|_{\frac{2(\kappa_1+\kappa_2)}{\kappa_2+1}}^{\frac{2(\kappa_1+\kappa_2)}{\kappa_2+1}} - \|s_A\|_{\frac{4\kappa_2}{\kappa_2+1}}^{\frac{4\kappa_2}{\kappa_2+1}} - \\ & \lambda_{\underline{m}}(\Gamma) \|\alpha \tilde{Z}^{[\kappa_1]} + \beta \tilde{Z}^{[\kappa_2]}\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

记

$$\begin{aligned} V_{1s} &= \frac{1}{2} s_A^T s_A, \\ V_{1r} &= \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{\kappa_1 + 1} \|\tilde{Z}_i\|_{\kappa_1+1}^{\kappa_1+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{\kappa_2 + 1} \|\tilde{Z}_i\|_{\kappa_2+1}^{\kappa_2+1}. \end{aligned}$$

基于假设 1, 并根据引理 4 和引理 5 可知

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -c_1 V_{1s}^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} - c_2 V_{1s}^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}} - c_3 V_{1r}^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} - c_4 V_{1r}^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}} \leq \\ & -c_{13} (V_{1s} + V_{1r})^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} - \\ & -c_{24} 2^{\frac{1-\kappa_2}{\kappa_2+1}} (V_{1s} + V_{1r})^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}} \leq \\ & -c_{13} V_1^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} - c_{24} 2^{\frac{1-\kappa_2}{\kappa_2+1}} V_1^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中: $c_1 = 2^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}}$, $c_2 = (mn)^{\frac{1-\kappa_2}{\kappa_2+1}} 2^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}}$, $c_3 = \lambda_{\underline{m}}(\Gamma)(\kappa_1 + 1)^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}}$, $c_4 = \lambda_{\underline{m}}(\Gamma)(2mn^2)^{\frac{1-\kappa_2}{\kappa_2+1}}(\kappa_1 + 1)^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}}$, $c_{13} = \min(c_1, c_3)$, $c_{24} = \min(c_2, c_4)$. 根据引理 3 可知, V_{1s} 和 V_{1r} 将在固定时间 t_1 内收敛至零, 其中 t_1 满足下述不等式:

$$t_1 \leq (1 + \kappa_2) \left(\frac{1}{c_{13}(1 - \kappa_1)} + \frac{2^{\frac{\kappa_2-1}{\kappa_2+1}}}{c_{24}(1 - \kappa_2)} \right). \quad (15)$$

也就是说, 当 $t \geq t_1$ 时, s_A 和 \tilde{Z} 都将收敛至零, 即 $s_i = 0$, $\tilde{Z}_i = 0$.

步骤 2 当 $t \geq t_1$ 时, $s_i = \dot{x}_i - \delta_i = 0$, $\tilde{Z}_i = Z_i - \nabla f(x) = 0$, 所以式 (7b) 可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & p_1 \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j - x_i) \right)^{[\kappa_1]} + \\ & p_2 \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j - x_i) \right)^{[\kappa_2]} - \\ & (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m \nabla f(x))^{[\mu_1]} - (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m \nabla f(x))^{[\mu_2]}. \end{aligned} \quad (16)$$

记 $q_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j - x_i)$, $\nabla F(x) = \mathbf{1}_n^T \otimes I_m \nabla f(x)$. 设计如下 Lyapunov 方程:

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{p_1}{\kappa_1 + 1} \sum_{i=1}^n \xi_i \|q_i\|_{\kappa_1+1}^{\kappa_1+1} + \frac{p_2}{\kappa_2 + 1} \sum_{i=1}^n \xi_i \|q_i\|_{\kappa_2+1}^{\kappa_2+1} + \\ & \frac{1}{2} \nabla F(x)^T \nabla F(x), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 ξ_i 如引理 2 中的定义所示. 对 V_2 求导并利用引理 2 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \sum_{i=1}^n \xi_i (p_1 x_i^{[\kappa_1]} + p_2 x_i^{[\kappa_2]})^T \left(a \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\dot{x}_j - \dot{x}_i) \right) + \\ & \nabla F(x)^T \nabla^2 F(x) \dot{x} = \\ & (p_1 x^{[\kappa_1]} + p_2 x^{[\kappa_2]})^T (\Xi \otimes I_m) (-aL \otimes I_m) \times \\ & (p_1 x^{[\kappa_1]} + p_2 x^{[\kappa_2]}) - \nabla F(x)^T \nabla^2 F(x) \times \\ & (\nabla F(x)^{[\mu_1]} + \nabla F(x)^{[\mu_2]}) \leq \\ & -a(p_1 x^{[\kappa_1]} + p_2 x^{[\kappa_2]})^T (\bar{L} \otimes I_m) (p_1 x^{[\kappa_1]} + \\ & p_2 x^{[\kappa_2]}) - \theta \|\nabla F(x)\|_{\mu_1+1}^{\mu_1+1} - \theta \|\nabla F(x)\|_{\mu_2+1}^{\mu_2+1} \leq \\ & -ak_a \|p_1 x^{[\kappa_1]} + p_2 x^{[\kappa_2]}\|^2 - \theta \|\nabla F(x)\|_{\mu_1+1}^{\mu_1+1} - \\ & \theta \|\nabla F(x)\|_{\mu_2+1}^{\mu_2+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

其中: $x = [x_1^T, \dots, x_n^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$, $\nabla^2 F(x) = \mathbf{1}_n^T \otimes I_m \nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{m \times nm}$, $\nabla^2 f(x) = \text{diag}(\nabla^2 f_1(x_1), \dots, \nabla^2 f_n(x_n)) \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$, \hat{L} 和 Ξ 如引理 2 中所定义. 由于 $\nabla^2 F(x)(p_1 L \otimes 1_m x^{[\kappa_1]} + p_2 L \otimes 1_m x^{[\kappa_2]}) = (\mathbf{1}_n^T \otimes I_m \nabla^2 f(x))(p_1 L \otimes 1_m x^{[\kappa_1]} + p_2 L \otimes 1_m x^{[\kappa_2]}) = 0$, 所以式 (18) 中的第 2 式成立. 令

$$V_{2x} = \frac{p_1}{\kappa_1 + 1} \sum_{i=1}^n \xi_i \|x_i\|_{\kappa_1+1}^{\kappa_1+1} + \frac{p_2}{\kappa_2 + 1} \sum_{i=1}^n \xi_i \|x_i\|_{\kappa_2+1}^{\kappa_2+1},$$

可得 $V_{2x} \leq \xi_{\max} p_{12} X_1$, 其中 $\xi_{\max} = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. 令 $V_{2F} = \frac{1}{2} \nabla F(x)^T \nabla F(x)$, 于是, 基于引理 5 可

知, \dot{V}_2 满足如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -ak_a p_{12}^2 X_2^2 - \theta(2V_{2F})^{\frac{\mu_1+1}{2}} - \theta(2V_{2F})^{\frac{\mu_2+1}{2}} \leq \\ & -\frac{1}{2}ak_a p_{12}^2 (X_1^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} + (2nm)^{\frac{1-\kappa_2}{1+\kappa_2}} X_1^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}}) - \\ & 2^{\frac{\mu_1+1}{2}} \theta V_{2F}^{\frac{\mu_1+1}{2}} - 2^{\frac{\mu_2+1}{2}} \theta V_{2F}^{\frac{\mu_2+1}{2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $p_{12} = \min(p_1, p_2)$. 类似于步骤1中的式(14), 并应用式(8), 可得

$$\dot{V}_2 \leq -d_{13} V_2^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} - d_{24} 2^{\frac{1-\kappa_2}{\kappa_2+1}} V_2^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}}. \quad (20)$$

其中 $d_{13} = \min(d_1, d_3)$, $d_{24} = \min(d_2, d_4)$, 而

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{1}{2}ak_a p_{12}^2 \left(\frac{\kappa_1}{\xi_{\max} p_{12}}\right)^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}}, \\ d_2 &= -\frac{1}{2}ak_a p_{12}^2 \left(\frac{\kappa_1}{\xi_{\max} p_{12}}\right)^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}} (2nm)^{\frac{1-\kappa_2}{1+\kappa_2}}, \\ d_3 &= 2^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}} \theta, \quad d_4 = 2^{\frac{2\kappa_2}{\kappa_2+1}} \theta. \end{aligned}$$

当 $t \geq t_1$ 时, 依据引理3可知, q 和 $\nabla F(x)$ 都将在固定时间 t_2 内收敛于0. 有

$$t_2 \leq (1 + \kappa_2) \left(\frac{1}{d_{13}(1 - \kappa_1)} + \frac{2^{\frac{\kappa_2-1}{\kappa_2+1}}}{d_{24}(1 - \kappa_2)} \right). \quad (21)$$

注意到 $q = -Lx$, 因为通信拓扑为强联通图, 所以 $q = 0$ 就意味着 $x_i = x_j$, 而 $\nabla F(x) = 0$ 则表明 $x_i = x_j = x^*$, $i, j \in \mathcal{V}$. 故可得, 当 $t \geq T = t_1 + t_2$ 时, $x_i = x^*$, $v_i = 0$. \square

注3 本文步骤2的证明思路受启发于文献[26]和文献[27]. 其在计算收敛时间上界时经过了两个独立的步骤, 并设计了两个 Lyapunov 方程, 一个用于固定时间状态一致性, 另一个用于固定时间优化. 即首先证明在固定时间 T_{con} 内可以实现状态一致性, 计算出 T_{con} 的上界. 经过时间 T_{con} 后, 一旦获得了一致性, 问题就变为集中式的固定时间优化问题, 优化部分的收敛时间记为 T_{sc} . 最终, 总的收敛时间被估计为 $T_{\text{con}} + T_{\text{sc}}$. 然而, 在实际系统中, 状态一致性的实现过程和寻求最优状态的过程是同时发生的, 并不是完全独立的, 因此, 采用这种方式估算出的收敛时间上界要远大于实际收敛时间. 相比之下, 本文提出了一种新的解决方案, 只定义一个 Lyapunov 函数(17), 并将参数 μ_1 和 μ_2 以及 κ_1 和 κ_2 建立起联系, 即满足式(8). 从而将状态一致性实现和寻最优过程有机整合在一起, 只通过一个 Lyapunov 函数计算收敛时间上界. 这种方法在计算稳定时间时更准确, 因为一致性过程和寻最过程是同时进行的. 因此, 可以推断如果参数选择相同, 则等式(21)中 t_2 的上界将小于 $T_c + T_o$.

3 数值仿真

本节通过数值实验来验证所设计算法的有效性. 假设系统由5个智能体组成, 通信拓扑如图1所

示.

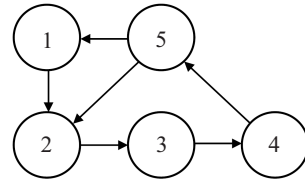


图1 非平衡强联通图

每个智能体所对应的局部成本函数为

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0.6\|x_i - x_A\|^2, & i = 1, 2; \\ 0.8\|x_i - x_B\|^2, & i = 3, 4, 5. \end{cases} \quad (22)$$

其中: $x_A = [0, 0]^T$, $x_B = [1.5, 2]^T$. 5个智能体通过信息交换协同求解优化问题 $\min_{x_i \in \mathbb{R}^2} f(x) = \sum_{i=1}^5 f_i(x_i)$, 并且最终达到一致状态.

系统初值选择为 $x_1 = [1, -2]^T$, $x_2 = [2.5, 3]^T$, $x_3 = [-1.4, 0]^T$, $x_4 = [-3, 2.7]^T$, $x_5 = [3, -3]^T$, $\dot{x}_i(0) = [0, 0]^T$, $i = 1, 2, \dots, 5$. 使用控制算法(7), 参数为 $\mu_1 = 0.4545$, $\mu_2 = 1.1818$, $\kappa_1 = 0.4$, $\kappa_2 = 1.2$, $p_1 = 4$, $p_2 = 3$, $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\iota = 2$. 根据多智能体系统的通信拓扑图1, 可得 Laplace 矩阵为 $L = [1, -1, 0, 0, 0; 0, 1, -1, 0, 0; 0, 0, 1, -1, 0; 0, 0, 0, 1, -1; -1, -1, 0, 0, 2]$. 于是, 根据引理2中 \bar{L} 的定义, 容易算出 $\bar{L} = [1, -0.5, 0, 0, -0.5; -0.5, 1, -0.5, 0, -0.5; 0, -0.5, 1, -0.5, 0; 0, 0, -0.5, 1, -0.5; -0.5, -0.5, 0, -0.5, 2]$. 根据引理2中的式(4)可算得 $k_a = 1.415$. 系统状态变化如图2和图3所示, 可以看到, 系统最终收敛到全局最优解 $x^* = [1, 1.333]$. 根据式(15)和(21)算得系统理论收敛时间上界为 $T = 1.836$ s, 从图2和图3可以看出, 算法实际在1.3s左右达到收敛状态. 与文献[17]相比, 本文提出的算法放宽了通信拓扑的限制条件, 仅要求通信图为非平衡的有向图, 从而拓宽了应用场景. 值得注意的是, 在分析收敛时间上界时, 本文采用了对 Lyapunov 函数进行集成的思想, 以获得更加准确的估计结果. 在仿真案例中, 实际收敛时间与理论收敛时间上界仅相差约0.5s, 而文献[17]中的差值则超过2.5s. 需要指出的是, 文献[17]的算法要求通信拓扑为无向图. 为了进行比较, 本文将通信拓扑图1从有向图改为无向图, 即在保持拓扑架构不变的情况下, 将信息传递方式改为双向传递. 在相同初始条件下, 使用文献[17]中的控制器可得到系统状态变化, 如图4和图5所示. 对比结果显示, 本文设计的算法在收敛时间上界方面得到了改进.

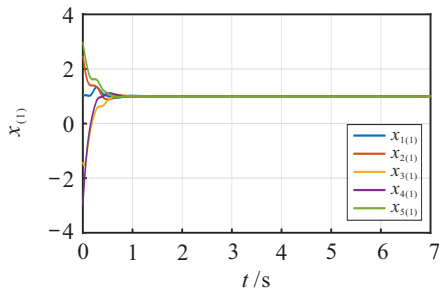


图2 系统各智能体状态 $x_{(1)}$ 变化情况

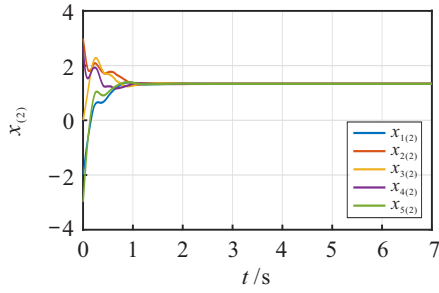


图3 系统各智能体状态 $x_{(2)}$ 变化情况

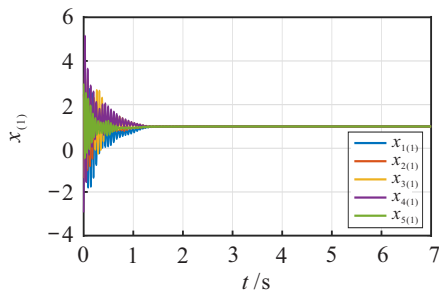


图4 使用文献[17]算法时系统各智能体状态 $x_{(1)}$ 变化情况

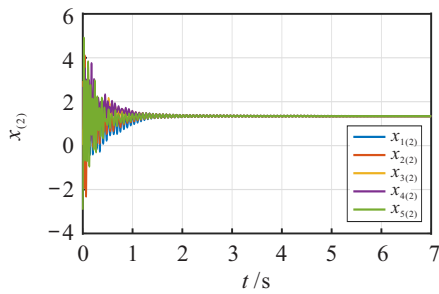


图5 使用文献[17]算法时系统各智能体状态 $x_{(2)}$ 变化情况

通过仿真发现,若直接采用文献[17]中设计的控制器解决本文提出的分布式优化问题,则系统无法收敛到最优解 $x^* = [1, 1.333]$. 然而,当将有向图改为无向图后,仿真结果(见图4和图5)表明,系统最终成功地收敛到最优解. 此外,与本文设计的控制器相比,文献[17]中的控制器出现了较为严重的震颤现象,而本文提出的控制器成功避免了这一问题的发生. 究其原因,本文算法中的非连续项位于估计器部分,即式(7c)中,而不像文献[17]中的控制器直接包含非连续的符号函数,因此,有效地避免了震颤现象的发生.

4 结论

本文针对二阶多智能体系统的固定时间分布式优化问题,设计了一种新的适用于非平衡有向通信拓扑的控制算法,该算法同时可以防止局部目标函数梯度信息的泄露. 利用固定时间收敛理论对算法的收敛性进行了理论证明,并通过数值仿真验证了算法的有效性. 另外,本文基于一种集成Lyapunov函数的分析思路,在估算收敛时间上界时,可以获得更加准确的估算结果. 在后续工作中,将对时变的全局目标函数进行研究.

参考文献(References)

- [1] Fabbiano R, de Wit C C, Garin F. Source localization by gradient estimation based on Poisson integral[J]. Automatica, 2014, 50(6): 1715-1724.
- [2] Kim C Y, Song D Z, Xu Y L, et al. Cooperative search of multiple unknown transient radio sources using multiple paired mobile robots[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(5): 1161-1173.
- [3] Nassif R, Vlaski S, Richard C, et al. Multitask learning over graphs: An approach for distributed, streaming machine learning[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2020, 37(3): 14-25.
- [4] Dall'Anese E, Zhu H, Giannakis G B. Distributed optimal power flow for smart microgrids[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2013, 4(3): 1464-1475.
- [5] Cherukuri A, Cortés J. Initialization-free distributed coordination for economic dispatch under varying loads and generator commitment[J]. Automatica: Journal of IFAC, 2016, 74(C): 183-193.
- [6] Zhu B, Guo K X, Xie L H. A new distributed model predictive control for unconstrained double-integrator multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(12): 4367-4374.
- [7] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
- [8] Wang N, Karimi H R, Li H Y, et al. Accurate trajectory tracking of disturbed surface vehicles: A finite-time control approach[J]. ASME Transactions on Mechatronics, 2019, 24(3): 1064-1074.
- [9] Zhang J X, Yang G H. Fault-tolerant fixed-time trajectory tracking control of autonomous surface vessels with specified accuracy[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(6): 4889-4899.
- [10] Lin P, Ren W, Farrell J A. Distributed continuous-time optimization: Nonuniform gradient gains, finite-time convergence, and convex constraint set[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(5): 2239-2253.

- [11] Song Y F, Chen W S. Finite-time convergent distributed consensus optimisation over networks[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(11): 1314-1318.
- [12] 王志超, 刘开恩, 纪志坚, 等. 多智能体系统的分布式快速有限时间二分跟踪一致性[J]. 控制与决策, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0575.
(Wang Z C, Liu K E, Ji Z J, et al. Distributed fast finite-time bipartite tracking consensus for multi-agent systems[J]. Control and Decision, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.0575.)
- [13] 耿超, 武永宝, 孙佳, 等. 抗干扰的多智能体系统固定时间分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2024, 39(2): 527-535.
(Geng C, Wu Y B, Sun J, et al. Fixed-time distributed optimization algorithm for multi-agent systems with disturbance resistance[J]. Control and Decision, 2024, 39(2): 527-535.)
- [14] Wang X Y, Wang G D, Li S H. Distributed finite-time optimization for disturbed second-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4634-4647.
- [15] Wang X Y, Wang G D. Distributed finite-time optimisation algorithm for second-order multi-agent systems subject to mismatched disturbances[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(18): 2977-2988.
- [16] Wang X Y, Zheng W X, Wang G D. Distributed finite-time optimization of second-order multiagent systems with unknown velocities and disturbances[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 34(9): 6042-6054.
- [17] 时侠圣, 林志赞. 基于固定时间的二阶智能体分布式优化算法[J]. 北京航空航天大学学报, DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2022.0060.
(Shi X S, Lin Z Y. Fixed-time distributed convex algorithm over second-order multi-agent systems under bounded disturbances[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2022.0060.)
- [18] Zou Y, Xia K W, Zuo Z Y, et al. Velocity-free distributed coordinated optimal control for second-order multi-agent systems[J]. Automatica, 2023, 154: 111059.
- [19] Yu Z Y, Sun J, Yu S Z, et al. Fixed-time distributed optimization for multi-agent systems with external disturbances over directed networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(2): 953-972.
- [20] Chen J N, Yang Y H, Qin S T. A distributed optimization algorithm for fixed-time flocking of second-order multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2024, 11(1): 152-162.
- [21] Wang H, Yu W W, Wen G H, et al. Fixed-time consensus of nonlinear multi-agent systems with general directed topologies[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 66(9): 1587-1591.
- [22] Yu W W, Chen G R, Cao M, et al. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2010, 40(3): 881-891.
- [23] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [24] Goldberg M. Equivalence constants for l_p of matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1987, 21(2): 173-179.
- [25] Yu C B, Wang H, Yu W W. Distributed average tracking problem under directed networks: A distributed estimator-based design[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2022, 9(2): 930-942.
- [26] Garg K, Baranwal M, Panagou D. A fixed-time convergent distributed algorithm for strongly convex functions in a time-varying network[C]. The 59th IEEE Conference on Decision and Control. Jeju, 2020: 4405-4410.
- [27] Garg K, Baranwal M. Accelerating distributed optimization via fixed-time convergent flows: Extensions to non-convex functions and consistent discretization[J/OL]. 2019, arXiv: 1905.10472.

作者简介

刘源(1985—), 男, 讲师, 博士, 从事多智能体协同控制、分布式优化、自适应控制等研究, E-mail: liuyuan8601@163.com;

刘宁宁(1988—), 男, 助教, 硕士, 从事机器视觉、鲁棒控制等研究, E-mail: lnbjtu@163.com;

曾显普(1995—), 男, 助教, 硕士, 从事雷达目标跟踪、多传感器数据融合等研究, E-mail: yyyh66024@163.com.