

# 控制与决策

Control and Decision

## 新息优先一致分数阶离散GM(1, 1)模型及应用

沈琴琴, 曹阳, 王鲁欣, 高赛昆

引用本文:

沈琴琴, 曹阳, 王鲁欣, 等. 新息优先一致分数阶离散GM(1, 1)模型及应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(12): 3964–3972.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2023.1486>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 时滞累积TDAGM( $\beta, N, t$ )模型及其在粮食生产中的应用

Time-delayed accumulative TDAGM( $\beta, N, t$ )

控制与决策. 2021, 36(8): 2002–2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

#### 含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计

Design of Kalman filter for fractional-order systems with correlated fractional-order colored noises

控制与决策. 2021, 36(7): 1672–1678 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1418>

#### 考虑决策者心理行为的灰色多属性群体决策方法

Grey multi-attribute group decision making method with consideration of psychological behavior of decision makers

控制与决策. 2021, 36(7): 1779–1785 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1621>

#### 基于强化学习的倒立摆分数阶梯度下降RBF控制

Reinforcement learning based fractional gradient descent RBF neural network control of inverted pendulum

控制与决策. 2021, 36(1): 125–134 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0816>

#### 自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

# 新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型及应用

沈琴琴<sup>1</sup>, 曹 阳<sup>1,2†</sup>, 王鲁欣<sup>3</sup>, 高赛昆<sup>2</sup>

(1. 南通大学 交通与土木工程学院, 江苏 南通 226019; 2. 南通大学 数学与统计学院, 江苏 南通 226019; 3. 南通大学 信息科学技术学院, 江苏 南通 226019)

**摘要:** 一致分数阶 GM(1, 1)(CFGM(1, 1)) 模型是一种基于一致分数阶累加的单变量灰色预测模型. 一致分数阶累加生成算子不满足灰色预测理论中极其重要的新息优先原则, 且 CFGM(1, 1) 模型存在从差分方程到微分方程的转换误差. 为此, 提出一种新息优先一致分数阶累加生成算子, 结合离散 GM(1, 1) 模型的思想, 构建新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型, 从理论上导出新算子满足新息优先原则的条件, 并用两类智能优化算法寻求模型中的最优累加参数. 两个实际案例表明, 所提模型不仅能满足新息优先原则, 还可以有效克服 CFGM(1, 1) 模型中的转换误差, 具有更优的拟合和预测精度.

**关键词:** 灰色预测系统; 一致分数阶累加; 新息优先; 离散灰色模型

中图分类号: N941.5 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2023.1486

引用格式: 沈琴琴, 曹阳, 王鲁欣, 等. 新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型及应用[J]. 控制与决策, 2024, 39(12): 3964-3972.

## New information priority conformable fractional discrete GM(1, 1) model and applications

SHEN Qin-qin<sup>1</sup>, CAO Yang<sup>1,2†</sup>, WANG Lu-xin<sup>3</sup>, GAO Sai-kun<sup>2</sup>

(1. School of Transportation and Civil Engineering, Nantong University, Nantong 226019, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Nantong University, Nantong 226019, China; 3. School of Information Science and Technology, Nantong University, Nantong 226019, China)

**Abstract:** The conformable fractional GM(1, 1)(CFGM(1, 1)) model, which is based on the conformable fractional accumulation, is a recently proposed univariate grey prediction model. The conformable fractional accumulated generating operator does not satisfy the new information priority principle, which is extremely important in grey prediction theory. And the CFGM(1, 1) model suffers from transformation errors from difference equation to differential equation. To address these two issues, a new information priority conformable accumulated generating operator is proposed. By combining the idea of the discrete GM(1, 1) model, a new information priority conformable fractional discrete GM(1, 1) model is constructed. The conditions for the novel operator to satisfy the new information priority principle are theoretically derived. Meanwhile, two kinds of intelligent optimization algorithms are adopted to determine the optimal accumulation parameters. Two practical examples demonstrate that the proposed model not only satisfies the new information priority principle but also effectively overcomes the transformation errors in the CFGM(1, 1) model, resulting in better fitting and prediction accuracy.

**Keywords:** grey prediction system; conformable fractional order accumulation; new information priority; discrete grey model

## 0 引言

灰色系统理论以具有“少数据、小样本、贫信息”的不确定性系统为研究对象, 通过对部分已知的信息进行预处理以提取有价值的信息, 建立相应的数学模型以准确描述系统的运行行为和演化规律, 进而实

现对系统未来变化的定量分析<sup>[1]</sup>. 灰色预测模型是灰色系统理论的重要组成部分, 被广泛应用于交通、能源、水利、经济、管理等领域, 如隧道围岩的收敛变形特征分析<sup>[2]</sup>、交通流预测<sup>[3]</sup>、网络舆情分析和预测<sup>[4]</sup>等. 在已提出的大量灰色预测模型<sup>[5]</sup>中, 最为经典的

收稿日期: 2023-10-24; 录用日期: 2024-03-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61771265); 江苏高校“青蓝工程”项目.

责任编辑: 王光臣.

†通讯作者. E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn.

是 GM(1, 1) 模型, 其本质上是一类微分方程模型, 前面的“1”表示微分方程的阶数是 1 阶, 后面的“1”表示考虑的问题是单变量问题.

GM(1, 1) 模型首先通过对原始数据序列进行一阶累加生成得到符合近似指数规律的数据序列, 以弱化数据的随机性; 然后建立一阶线性微分方程模型, 并求得相应的时间响应函数以模拟累加生成序列的演化规律, 最后再累减还原得到原始数据序列的拟合值, 并由此定量地预测其未来发展趋势. 由此可见, 累加生成算子是使原始数据序列由无规律变为近似指数规律的一种方法, 在灰色预测模型以及灰色系统理论的研究中占有非常重要的地位.

围绕灰色累加生成, 近年来研究人员在灰色累加生成算子的拓展与性质研究等方面做了大量工作, 提出了一系列新的累加生成算子, 建立了新的灰色预测模型, 扩大了灰色系统理论的应用范围. 如: 基于数据的周期性特征提出了循环截断生成累加<sup>[3]</sup>; 在一阶累加的基础上分析了高阶整数阶累加的机理并将整数设置成分数, 扩大了累加参数的范围, 从而提出了分数阶累加<sup>[6-7]</sup>; 基于灰色预测理论中的新息优先原则, 提出了新息优先累加<sup>[8]</sup>以及加权分数阶累加<sup>[9]</sup>; 针对原始数据增长或下降速度过快提出了阻尼累加<sup>[10]</sup>; 为消除无效灰色信息所产生的模型误差, 利用伯努利分布来区分有效和无效灰色信息, 提出了概率累加<sup>[11]</sup>等. 最近, 文献[12]直接利用函数一致分数阶导数及一致分数阶差分的定义<sup>[13]</sup>提出了一类新的一致分数阶累加, 建立了一致分数阶 GM(1, 1) (conformable fractional GM(1, 1), CFGM(1, 1)) 模型, 并对 21 个基准数据集进行了测试, 结果表明 CFGM(1, 1) 模型明显优于经典的 GM(1, 1) 模型和分数阶 GM(1, 1) 模型. 在一致分数阶累加的基础上, 根据数据的不同特征, 有学者又相继提出了非齐次一致分数阶灰色预测模型<sup>[14]</sup>、非线性一致分数阶灰色预测模型<sup>[15]</sup>等, 并分析了一致分数阶累加生成算子的扰动界<sup>[16]</sup>.

本文研究发现, 最近提出的 CFGM(1, 1) 模型尽管比传统的 GM(1, 1) 模型更能体现信息的差异性对数据发展趋势的影响, 但明显存在两个方面的缺陷, 一是一致分数阶累加生成算子并不满足灰色预测理论中极其重要的新息优先原则; 二是与经典的 GM(1, 1) 模型一样, CFGM(1, 1) 模型中的发展系数和灰作用量两个参数是通过将微分方程两边积分后化为差分方程再通过最小二乘法计算出的, 而时间响应函数又是直接从微分方程导出的, 因而存在从差分

方程到微分方程的转换误差.

为克服 CFGM(1, 1) 模型中的两个缺陷, 本文首先基于新息优先原则<sup>[4,8-9]</sup>提出一种新息优先一致分数阶累加生成算子, 然后结合离散 GM(1, 1) 模型的思想<sup>[17-23]</sup>, 构建新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) (new-information-priority conformable fractional discrete GM(1, 1), NCFDGM(1, 1)) 模型. 从理论上导出新算子满足新息优先原则的条件, 并用两类智能优化算法寻求模型中的最优累加参数. 最后通过中国城镇居民家庭人均可支配收入以及隧道围岩收敛变形预测的两个实际案例来验证所提模型的有效性.

### 1 一致分数阶 GM(1,1) 模型

本节简单回顾一致分数阶 GM(1,1) 模型的定义并分析其优缺点. 为此, 先给出一致分数阶累加生成算子 (conformable fractional accumulated generating operator, CFAGO) 的定义.

定义 1<sup>[12]</sup> 设

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(N))^T \quad (1)$$

为给定的原始非负序列,  $N$  为序列的长度,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . 称

$$X^{(\alpha)} = (x^{(\alpha)}(1), x^{(\alpha)}(2), \dots, x^{(\alpha)}(N))^T$$

为  $X^{(0)}$  的一致分数  $\alpha$  阶累加生成序列.

$$x^{(\alpha)}(k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \frac{x^{(0)}(j)}{j^{[\alpha]-\alpha}}, & 0 < \alpha \leq 1; \\ \sum_{j=1}^k x^{(\alpha-1)}(j), & \alpha > 1. \end{cases}$$

其中:  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $[\cdot]$  表示向上取整函数.

定义 2<sup>[12]</sup> 设原始非负序列  $X^{(0)}$  及其一致分数  $\alpha$  阶累加生成序列  $X^{(\alpha)}$  如定义 1 所示.

1) 称

$$\frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} + \hat{a}x^{(\alpha)}(t) = \hat{b} \quad (2)$$

为一致分数阶 GM(1, 1) 模型的白化微分方程, 其中  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  分别为发展系数和灰作用量.

2) 在初始条件  $x^{(\alpha)}(t)|_{t=1} = x^{(0)}(1)$  下, 一致分数阶 GM(1, 1) 模型的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(\alpha)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right)e^{-\hat{a}(t-1)} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}, \quad (3)$$

其中  $t = 1, 2, \dots$ .

3) 累减还原后, 一致分数阶 GM(1, 1) 模型的拟合和预测值为

$$\widehat{x}^{(0)}(t) = \sum_{j=1}^t \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ t-j \end{bmatrix} t^{[\alpha]-\alpha} \widehat{x}^{(\alpha)}(j),$$

其中  $t = 1, 2, \dots$

需要说明的是,一致分数阶累加生成算子是根据函数的一致分数阶导数及一致分数阶差分的定义导出的<sup>[12]</sup>,相比分数阶累加生成算子的定义<sup>[6]</sup>更加简洁且便于理论推导.特别地,当  $\alpha \in (0, 1]$  时,  $X^{(\alpha)}$  先对原始序列  $X^{(0)}$  中的元素逐个进行预处理后再进行一阶累加.累加算子的矩阵形式可表示为

$$X^{(\alpha)} = ADX^{(0)}.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1^{\alpha-[\alpha]} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^{\alpha-[\alpha]} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N^{\alpha-[\alpha]} \end{bmatrix},$$

分别为传统的一阶累加生成算子矩阵和对角矩阵.当  $\alpha \in (n, n+1] (n = 1, 2, \dots)$  时,一致分数  $\alpha$  阶累加生成序列  $X^{(\alpha)}$  是一致分数  $\alpha - 1$  阶累加生成序列  $X^{(\alpha-1)}$  的一阶累加,即

$$X^{(\alpha)} = AX^{(\alpha-1)} = A^{[\alpha]}DX^{(0)} \triangleq \mathcal{A}^{(\alpha)}X^{(0)}. \quad (4)$$

这里  $A^{[\alpha]}$  表示  $A$  的  $[\alpha]$  次幂(即  $[\alpha]$  个  $A$  相乘),  $\mathcal{A}^{(\alpha)}$  称为一致分数  $\alpha$  阶累加生成算子,用矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} 1^{\alpha-[\alpha]} & 0 \\ \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 1 \end{bmatrix} 1^{\alpha-[\alpha]} & \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} 2^{\alpha-[\alpha]} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} [\alpha] \\ N-1 \end{bmatrix} 1^{\alpha-[\alpha]} & \begin{bmatrix} [\alpha] \\ N-2 \end{bmatrix} 2^{\alpha-[\alpha]} \\ \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dots & \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} N^{\alpha-[\alpha]} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

其中

$$\begin{bmatrix} [\alpha] \\ n \end{bmatrix} = \frac{[\alpha]([\alpha]+1)\dots([\alpha]+n-1)}{n!}.$$

综上,有如下结论.

**定理1** 设  $X^{(0)}$  和  $X^{(\alpha)}$  分别为由定义1所示的原始非负序列和一致分数  $\alpha$  阶累加生成序列,  $\alpha \in (n, n+1] (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 则  $X^{(\alpha)}$  的第  $k$  个分量可表示成

$$x^{(\alpha)}(k) = \sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-j \end{bmatrix} j^{\alpha-[\alpha]} x^{(0)}(j) \triangleq \sum_{j=1}^k w_{k,j} x^{(0)}(j), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

且有

$$w_{k,j+1} \leq w_{k,j}, \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad (7)$$

**证明** 由式(4)和一致分数阶累加生成算子的矩阵表达式(5)可直接计算出  $X^{(\alpha)}$  的各个分量.

由式(6)的具体表达式可知

$$w_{k,j+1} = \begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-j-1 \end{bmatrix} (j+1)^{\alpha-[\alpha]} = \frac{[\alpha]([\alpha]+1)\dots([\alpha]+k-j-2)}{(k-j-1)!} (j+1)^{\alpha-[\alpha]},$$

$$w_{k,j} = \begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-j \end{bmatrix} j^{\alpha-[\alpha]} = \frac{[\alpha]([\alpha]+1)\dots([\alpha]+k-j-1)}{(k-j)!} j^{\alpha-[\alpha]}.$$

由于  $1 \leq j \leq k-1, \alpha \leq [\alpha]$ , 且  $[\alpha] \geq 1$ , 则有

$$\frac{w_{k,j+1}}{w_{k,j}} = \frac{k-j}{k-j+[\alpha]-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\alpha-[\alpha]} \leq 1,$$

即式(7)恒成立.  $\square$

由定理1可知,在对原始序列进行一致分数阶累加时,对新信息赋予的权重小于或等于对旧信息赋予的权重,即一致分数阶累加生成算子严格不满足灰色预测理论中的新息优先原则.

此外,为求得一致分数阶 GM(1, 1) 模型中的发展系数  $\hat{a}$  和灰作用量  $\hat{b}$ , 需先对白化微分方程(2)两边同时积分并用梯形公式离散化得

$$(x^{(\alpha)}(k) - x^{(\alpha)}(k-1)) + \frac{\hat{a}}{2} (x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1)) = \hat{b}, \quad (8)$$

再将一致分数  $\alpha$  阶累加生成序列  $X^{(\alpha)}$  代入式(8), 并用最小二乘法求得

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T p.$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(\alpha)}(N) + x^{(\alpha)}(N-1)) & 1 \end{bmatrix},$$

$$p = \begin{bmatrix} x^{(\alpha)}(2) - x^{(\alpha)}(1) \\ x^{(\alpha)}(3) - x^{(\alpha)}(2) \\ \vdots \\ x^{(\alpha)}(N) - x^{(\alpha)}(N-1) \end{bmatrix}.$$

由上面的分析可知,一致分数阶 GM(1, 1) 模型的时间响应函数(3)是由微分方程(2)直接导出的,而其中的两个关键参数,即发展系数  $\hat{a}$  和灰作用量  $\hat{b}$ , 是由差分方程(8)导出的. 因此,与经典的 GM(1, 1) 模型类似,一致分数阶 GM(1, 1) 模型存在从微分方程到差分方程的转换误差.

## 2 新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型

为使一致分数阶累加生成算子满足新息优先原则,以及避免 CFGM(1, 1) 模型中的转换误差,本节构建一种新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型.

### 2.1 新息优先一致分数阶累加生成算子

**定义 3** 设  $X^{(0)}$  为如式(1)所示的原始非负序列,  $\alpha \in \mathbb{R}^+, \lambda \in (0, 1]$ . 称

$$X^{(\alpha, \lambda)} = (x^{(\alpha, \lambda)}(1), x^{(\alpha, \lambda)}(2), \dots, x^{(\alpha, \lambda)}(N))^T \quad (9)$$

为  $X^{(0)}$  的新息优先一致分数阶累加生成序列,其中

$$x^{(\alpha, \lambda)}(k) = \sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-j \end{bmatrix} \frac{\lambda^{k-j}}{j^{[\alpha]-\alpha}} x^{(0)}(j). \quad (10)$$

由定义 3 可以看出,新息优先一致分数阶累加生成算子 (new-information-priority conformable fractional accumulated generating operator, NCFAGO) 是在一致分数阶累加生成算子的基础上引入一个新息优先参数  $\lambda \in (0, 1]^{[8]}$ . 当  $j$  越接近  $k$  时,  $k-j$  越小,从而  $\lambda^{k-j}$  越大. 通过调节  $\lambda$  的取值可达到新息优先的目的.

新息优先一致分数阶累加生成序列  $X^{(\alpha, \lambda)}$  用矩阵的形式可表示为

$$X^{(\alpha, \lambda)} = \mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)} X^{(0)},$$

其中  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  称为新息优先一致分数阶累加生成算子,矩阵结构如下:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^0}{1^{[\alpha]-\alpha}} & 0 \\ \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\lambda^1}{1^{[\alpha]-\alpha}} & \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^0}{2^{[\alpha]-\alpha}} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} [\alpha] \\ N-1 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{N-1}}{1^{[\alpha]-\alpha}} & \begin{bmatrix} [\alpha] \\ N-2 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{N-2}}{2^{[\alpha]-\alpha}} \\ \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \leftarrow \ddots & \vdots \\ \dots & \begin{bmatrix} [\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^0}{N^{[\alpha]-\alpha}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  的基本形式可以看出,  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  是几类经典累加生成算子的一般形式. 特别地,当  $\alpha = \lambda = 1$  时,  $\mathcal{A}^{(1, 1)}$  中下三角部分的元素均恒为 1,即为经典的一阶累加生成算子;当  $\alpha = 1$  时,  $\mathcal{A}^{(1, \lambda)}$  即为新息优先累加生成算子<sup>[8]</sup>;当  $\lambda = 1$  时,  $\mathcal{A}^{(\alpha, 1)}$  即为一致分数阶累加生成算子<sup>[12]</sup>. 由于  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  是下三角矩阵,易得新息优先一致分数阶累加生成算子的逆算子  $(\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)})^{-1}$  具有如下矩阵结构:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^0}{1^{\alpha-[\alpha]}} & 0 \\ \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\lambda^1}{2^{\alpha-[\alpha]}} & \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^0}{2^{\alpha-[\alpha]}} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ N-1 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{N-1}}{N^{\alpha-[\alpha]}} & \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ N-2 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{N-2}}{N^{\alpha-[\alpha]}} \\ \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \leftarrow \ddots & \vdots \\ \dots & \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^0}{N^{\alpha-[\alpha]}} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

下面的定理给出了新提出的累加生成算子  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  满足新息优先的条件.

**定理 2** 设  $\alpha \in \mathbb{R}^+, \lambda \in (0, 1]$ , 新息优先一致分数阶累加生成算子  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  如式(11)所定义,则当

$$0 < \lambda < \frac{2^{\alpha-[\alpha]}}{[\alpha]} \quad (13)$$

时,  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  满足新息优先性.

**证明** 要分析  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  满足新息优先性的条件,即

要证给定原始序列  $X^{(0)}$ , 经累加得到新序列  $X^{(\alpha, \lambda)}$  时, 新信息  $x^{(0)}(j+1)$  的权重要大于旧信息  $x^{(0)}(j)$  的权重. 由式(10)可进一步设

$$x^{(\alpha, \lambda)}(k) = \sum_{j=1}^k w_{k,j} x^{(0)}(j), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

其中

$$w_{k,j+1} = \frac{\begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-j-1 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{k-j-1}}{(j+1)^{[\alpha]-\alpha}}}{\frac{[\alpha]([\alpha]+1)\cdots([\alpha]+k-j-2)}{(k-j-1)!} \frac{\lambda^{k-j-1}}{(j+1)^{[\alpha]-\alpha}}},$$

$$w_{k,j} = \frac{\begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-j \end{bmatrix} \frac{\lambda^{k-j}}{j^{[\alpha]-\alpha}}}{\frac{[\alpha]([\alpha]+1)\cdots([\alpha]+k-j-1)}{(k-j)!} \frac{\lambda^{k-j}}{j^{[\alpha]-\alpha}}}.$$

从而要分析

$$\frac{w_{k,j+1}}{w_{k,j}} = \frac{k-j}{\lambda(k-j+[\alpha]-1)} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\alpha-[\alpha]} > 1,$$

或分析

$$0 < \lambda < \frac{k-j}{k-j+[\alpha]-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\alpha-[\alpha]} \quad (14)$$

满足的具体条件.

一方面,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, [\alpha] \geq 1$  恒成立, 从而

1) 当  $0 < \alpha \leq 1$  时,  $[\alpha] = 1$  恒成立, 则有

$$\frac{k-j}{k-j+[\alpha]-1} = 1;$$

2) 当  $\alpha > 1$  时,  $[\alpha] \geq 2$ , 此时  $\frac{k-j}{k-j+[\alpha]-1}$  是关于  $j$  的单调递减函数, 则有

$$\frac{k-j}{k-j+[\alpha]-1} \geq \frac{1}{[\alpha]}. \quad (15)$$

综上,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ , 式(15)成立.

另一方面,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ , 有  $[\alpha] \geq \alpha$ , 即  $[\alpha] - \alpha \geq 0$ . 因此  $\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\alpha-[\alpha]}$  是关于  $j$  ( $1 \leq j \leq k-1$ ) 的单调递增函数, 则有

$$\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\alpha-[\alpha]} \geq 2^{\alpha-[\alpha]}. \quad (16)$$

结合式(15)和(16)可知, 要使式(14)恒成立, 即要求  $\lambda$  满足(13)即可.  $\square$

**注1** 对于  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ , 易得  $\frac{2^{\alpha-[\alpha]}}{[\alpha]} \leq 1$ , 即  $\lambda < 1$  是新息优先一致分数阶累加生成算子  $\mathcal{A}^{(\alpha, \lambda)}$  满足新息优先性的必要条件. 特别地, 当  $\alpha = 1$  时,  $\mathcal{A}^{(1, \lambda)}$  即为新息优先累加生成算子<sup>[8]</sup>. 此时, 条件(13)退化为

$$0 < \lambda < \frac{2^{\alpha-[\alpha]}}{[\alpha]} = 1.$$

### 2.2 新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型

**定义4** 设  $\alpha \in \mathbb{R}^+, 0 < \lambda < \frac{2^{\alpha-[\alpha]}}{[\alpha]}$ ,  $X^{(0)}$  和  $X^{(\alpha, \lambda)}$  分别为由式(1)和(9)所示的原始非负序列和新息优先一致分数阶累加生成序列. 称

$$x^{(\alpha, \lambda)}(k+1) = \beta_1 x^{(\alpha, \lambda)}(k) + \beta_2 \quad (17)$$

为新息优先一致分数阶离散 GM(1, 1) 模型 (记为 NCFDGM(1, 1)), 其中  $\beta_1$  和  $\beta_2$  为模型的参数.

将  $X^{(\alpha, \lambda)}$  式(9)中的各分量代入式(17)中, 可得关于  $\beta_1$  和  $\beta_2$  两个参数的超定方程组, 再经最小二乘法可求得

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T p. \quad (18)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} x^{(\alpha, \lambda)}(1) & 1 \\ x^{(\alpha, \lambda)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(\alpha, \lambda)}(N-1) & 1 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} x^{(\alpha, \lambda)}(2) \\ x^{(\alpha, \lambda)}(3) \\ \vdots \\ x^{(\alpha, \lambda)}(N) \end{bmatrix}.$$

此外, 令初始值  $x^{(\alpha, \lambda)}(t)|_{t=1} = x^{(0)}(1)$ , 由递推法可得 NCFDGM(1, 1) 模型的时间响应函数如下:

$$\hat{x}^{(\alpha, \lambda)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1}\right) \beta_1^{t-1} + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}.$$

最后, 根据新息一致分数阶累减算子(12)计算可得原始序列的拟合值

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \sum_{j=1}^t \begin{bmatrix} -[\alpha] \\ t-j \end{bmatrix} \lambda^{t-j} t^{[\alpha]-\alpha} \hat{x}^{(\alpha, \lambda)}(j), \quad t = 1, 2, \dots,$$

并由此预测出该序列的发展趋势.

由上述 NCFDGM(1, 1) 模型建模过程可知, 模型参数  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  和时间响应函数均由离散方程(17)导出, 从而避免了 CFGM(1, 1) 模型中从微分方程到差分方程的转换误差, 有效提高了模型的拟合和预测精度.

### 2.3 累加参数的确定

由 NCFDGM(1, 1) 模型(17)可知, 该模型有4个参数需确定, 即模型参数  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  和累加参数  $\alpha$ 、 $\lambda$ , 其中模型参数  $\beta_1$  和  $\beta_2$  可由式(18)计算得到, 而为了计算出  $\beta_1$  和  $\beta_2$ , 需事先确定累加参数  $\alpha$  和  $\lambda$ . 为此, 可取平均绝对百分比误差(MAPE)作为判断模型精度的指标, 即

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{|\hat{x}^{(0)}(t) - x^{(0)}(t)|}{x^{(0)}(t)} \times 100\%.$$

其中:  $x^{(0)}(t)$  为实际观测值,  $\hat{x}^{(0)}(t)$  为对应的拟合或预测值. 从而可构建关于累加参数  $\alpha$  和  $\lambda$  的非线性约束优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, \lambda} \text{MAPE}(\alpha, \lambda). \\ & \text{s.t. } \alpha > 0; \\ & 0 < \lambda < \frac{2^{\alpha - [\alpha]}}{[\alpha]}; \\ & [\beta_1, \beta_2]^T = (B^T B)^{-1} B^T p; \\ & \hat{x}^{(\alpha, \lambda)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{\beta_2}{1 - \beta_1}\right) \beta_1^{t-1} + \frac{\beta_2}{1 - \beta_1}, \\ & t = 1, 2, \dots, N; \\ & \hat{x}^0(t) = \sum_{j=1}^t \left[ \begin{matrix} -[\alpha] \\ t-j \end{matrix} \right] \lambda^{t-j} t^{[\alpha] - \alpha} \hat{x}^{(\alpha, \lambda)}(j), \\ & t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{19}$$

上述优化问题是非线性且不可微的, 通常采用一些智能优化算法(如粒子群优化算法、量子粒子群优化算法、遗传算法、模拟退火算法等)来求解.

### 3 案例分析

本节通过两个实际案例验证本文提出的新模型的有效性和适用性, 不仅根据消融思想选取经典的 GM(1, 1) 模型<sup>[5]</sup>、离散 GM(1, 1) (DGM(1, 1)) 模型<sup>[17]</sup> 以及一致分数阶累加 GM(1, 1) (CFGM(1, 1)) 模型<sup>[12]</sup> 作为对比模型, 还与最新提出的概率累加 GM(1, 1) (PGM(1, 1)) 模型<sup>[11]</sup> 进行对比分析.

在 CFGM(1, 1) 模型、PGM(1, 1) 模型以及本文所提出的 NCFDGM(1, 1) 模型中均有累加参数需选取, 为此均可建立如式(19)的非线性优化问题, 并用量子粒子群优化算法寻求最优累加参数. 为对比分析不同智能优化算法的效果, 本文还选用遗传算法<sup>[8]</sup> 来求得 NCFDGM(1, 1) 模型中的最优累加参数. 由于智能优化算法初始值选取的随机性, 每次优化结果都不一样, 为此对每个模型均在实验过程中观察 20 次的结果再取其最优. 此外, 除了 MAPE, 本文还选用平均绝对误差

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\hat{x}^{(0)}(t) - x^{(0)}(t)|$$

和均方根误差

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\hat{x}^{(0)}(t) - x^{(0)}(t)|^2}$$

作为模型精度的评价指标, 以进一步验证不同模型的拟合和预测效果.

### 3.1 案例 1

案例 1 对中国城镇居民家庭人均可支配收入进行分析和预测, 数据来源于《中国统计年鉴 2022》(<https://data.stats.gov.cn/easyquery.htm?cn=C01>), 包含近 10 年(从 2013 年~2022 年)的数据. 这里取 2013 年至 2020 年共 8 年的数据建立模型作拟合, 2021 年和 2022 年的数据用于验证模型的准确性. 由智能优化算法寻得的最优累加参数见表 1, 5 类模型的拟合和预测误差见表 2. 其中: NCFDGM-QPSO 和 NCFDGM-GA 分别表示由量子粒子群优化算法和遗传算法求得的最优累加参数,

$$\text{APE} = \frac{|\hat{x}^{(0)}(t) - x^{(0)}(t)|}{x^{(0)}(t)} \times 100\%.$$

表 1 各模型最优累加参数(案例 1)

	CFGM	PGM	NCFDGM-QPSO	NCFDGM-GA
参数 1	$\alpha = 0.9375$	$\lambda = 0.2908$	$\alpha = 0.5210$	$\alpha = 0.5198$
参数 2	-	$\epsilon = 0.7971$	$\lambda = 0.6654$	$\lambda = 0.6638$

由表 1 可以看出, NCFDGM(1, 1) 模型中由量子粒子群优化算法和遗传算法求得两个最优累加参数分别为  $\alpha = 0.5210, \lambda = 0.6654$  和  $\alpha = 0.5198, \lambda = 0.6638$ . 经计算可以验证

$$0 < \lambda = 0.6654 < \frac{2^{\alpha - [\alpha]}}{[\alpha]} \approx 0.7175,$$

$$0 < \lambda = 0.6638 < \frac{2^{\alpha - [\alpha]}}{[\alpha]} \approx 0.7169,$$

均符合定理 2 中的条件. 这说明 NCFDGM(1, 1) 模型中的最优参数可以使本文提出的新的累加生成算子满足新息优先性. 为了更直观地说明新算子满足新息优先性, 图 1 给出了  $x^{(\alpha)}(8)$  和  $x^{(\alpha, \lambda)}(8)$  分别由一致分数阶累加和本文提出的新息优先一致分数阶累加计算过程中各原始分量的权重. 由图 1 可以看出一致分数阶累加过程中随着新信息的加入, 其权重是逐渐递减的, 而本文提出的新息优先一致分数阶累加过程中, 新信息的权重明显大于旧信息.

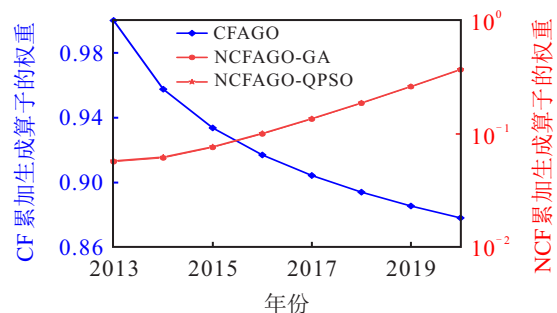


图 1 两种累加生成算子新息优先性比较(案例 1)

表2 各模型拟合和预测结果及误差比较(案例1)

年份	原始数据 $x^{(0)}$	GM		DGM		CFGM		PGM		NCFDGM-QPSO		NCFDGM-GA	
		$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%
2013	2.6467	2.6467	0	2.6467	0	2.6467	0	2.6467	0	2.6467	0	2.6467	0
2014	2.8844	2.9191	1.2909	2.9206	1.2558	2.8844	0	2.8702	0.4937	2.8844	0	2.8856	0.0431
2015	3.1195	3.1339	0.4632	3.1356	0.5163	3.1345	0.4819	3.1208	0.0423	3.1181	0.0444	3.1158	0.1185
2016	3.3616	3.3646	0.0897	3.3664	0.1432	3.3814	0.5887	3.3782	0.4925	3.3698	0.2442	3.3675	0.1726
2017	3.6396	3.6123	0.7513	3.6142	0.6976	3.6330	0.1813	3.6405	0.0240	3.6398	0.0063	3.6390	0.0176
2018	3.9251	3.8781	1.1967	3.8802	1.1427	3.8934	0.8079	3.9059	0.4890	3.9151	0.2547	3.9159	0.2332
2019	4.2359	4.1636	1.7077	4.1659	1.6533	4.1651	1.6714	4.1724	1.4982	4.1861	1.1751	4.1886	1.1172
2020	4.3834	4.4700	1.9759	4.4725	2.0329	4.4500	1.5203	4.4379	1.2400	4.4480	1.4734	4.4518	1.5614
MAPE/%			0.9234		0.9302		0.6565		0.5355		0.3998		0.4084
MAE			0.0357		0.0358		0.0263		0.0213		0.0168		0.0171
RMSE			0.0462		0.0462		0.0373		0.0313		0.0292		0.0297

年份	原始数据 $x^{(0)}$	GM		DGM		CFGM		PGM		NCFDGM-QPSO		NCFDGM-GA	
		$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%
2021	4.7412	4.7990	1.2194	4.8017	1.2766	4.7498	0.1812	4.7002	0.8656	4.6988	0.8940	4.7039	0.7876
2022	4.9283	5.1522	4.5431	5.1552	4.6036	5.0658	2.7900	4.9568	0.5790	4.9384	0.2046	4.9446	0.3301
MAPE/%			2.8816		2.9401		1.4856		0.7223		0.5493		0.5584
MAE			0.1409		0.1437		0.0730		0.0348		0.0262		0.0268
RMSE			0.1635		0.1660		0.0947		0.0353		0.0308		0.0288

由表2中各模型的评价指标值可以看出,各类灰色预测模型的拟合和预测精度都较高,CFGM(1,1)模型比经典的GM(1,1)模型和DGM(1,1)模型更为有效,而本文提出的NCFDGM(1,1)模型比CFGM(1,1)模型表现更好.与最新提出的概率累加PGM(1,1)相比,无论是拟合精度还是预测精度,NCFDGM(1,1)模型的表现均更佳.这充分说明一致分数阶累加和本文提出的新息优先一致分数阶累加比传统的一阶等权累加更能体现信息的差异性对数据发展趋势的影响,且新息优先性在建立灰色预测模型时起到十分重要的作用.此外,本文提出的NCFDGM(1,1)模型克服了CFGM(1,1)模型中的转换误差,在一定程度上也提高了模型精度.

3.2 案例2

案例2对隧道围岩的收敛变形特征进行分析和预测,数据选自文献[2]中宴家隧道典型断面开挖过程中的实测围岩收敛变形数据,共14组.这里取前10组建立灰色预测模型,后4组用于验证模型预测的精度.由智能优化算法寻得的最优累加参数见表3,各模型的拟合和预测误差见表4.

表3 各模型最优累加参数(案例2)

	CFGM	PGM	NCFDGM-QPSO	NCFDGM-GA
参数1	$\alpha = 0.0432$	$\lambda = 0.2908$	$\alpha = 4.3391$	$\alpha = 1.3439$
参数2	-	$\epsilon = 0.7971$	$\lambda = 0.0608$	$\lambda = 0.1769$

由表3可知,由量子粒子群优化算法和遗传算法求得NCFDGM(1,1)模型中的两个最优累加参数分别为 $\alpha = 4.3391, \lambda = 0.0608$ 和 $\alpha = 1.3439, \lambda = 0.1769$ .经计算可以验证

$$0 < \lambda = 0.0608 < \frac{2^{\alpha - [\alpha]}}{[\alpha]} \approx 0.1265,$$

$$0 < \lambda = 0.1769 < \frac{2^{\alpha - [\alpha]}}{[\alpha]} \approx 0.3173.$$

这再次说明NCFDGM(1,1)模型中的最优参数满足定理2中的条件,即本文提出的NCF累加生成算子满足新息优先性.图2给出了案例2中 $x^{(\alpha)}(10)$ 和 $x^{(\alpha,\lambda)}(10)$ 在累加计算过程中各原始分量的权重.由图2可以再次看出本文提出的新息优先一致分数阶累加过程中,新信息的权重明显大于旧信息,而一致分数阶累加不满足新息优先性.

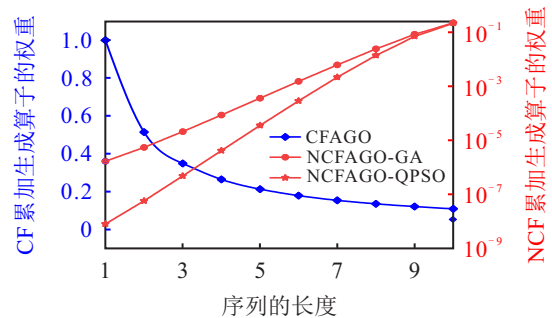


图2 两种累加生成算子新息优先性比较(案例2)

表 4 各模型拟合和预测结果及误差比较(案例 2)

序号	原始数据 $x^{(0)}$	GM		DGM		CFGM		PGM		NCFDGM-QPSO		NCFDGM-GA	
		$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%
1	1.21	1.2100	0	1.2100	0	1.2100	0	1.2100	0	1.2100	0	1.2100	0
2	2.12	2.9639	39.8066	2.9765	40.4009	2.1408	0.9811	2.1223	0.1106	2.1240	0.1870	2.1298	0.4617
3	2.99	3.3442	11.8462	3.3573	12.2843	3.0304	1.3512	3.0243	1.1463	3.0586	2.2939	3.0467	1.8965
4	4.01	3.7734	5.9002	3.7868	5.5661	3.8325	4.4264	3.8636	3.6512	3.8501	3.9864	3.8423	4.1828
5	4.56	4.2576	6.6316	4.2713	6.3311	4.5566	0.0746	4.5822	0.4876	4.5480	0.2631	4.5452	0.3242
6	5.21	4.8040	7.7927	4.8178	7.5278	5.2100	0	5.1850	0.4795	5.1776	0.6211	5.1793	0.5896
7	5.65	5.4205	4.0619	5.4341	3.8212	5.7987	2.6319	5.7121	1.0983	5.7584	1.9187	5.7628	1.9960
8	6.19	6.1161	1.1939	6.1294	0.9790	6.3278	2.2262	6.2137	0.3826	6.3032	1.8292	6.3086	1.9159
9	6.88	6.9010	0.3052	6.9135	0.4869	6.8020	1.1337	6.7371	2.0769	6.8206	0.8631	6.8256	0.7912
10	7.32	7.7866	6.3743	7.7980	6.5301	7.2252	1.2951	7.3225	0.0340	7.3162	0.0518	7.3197	0.0042
MAPE/%			8.3913		8.3927		1.4120		0.9467		1.2015		1.2162
MAE			0.2934		0.2916		0.0702		0.0461		0.0562		0.0566
RMSE			0.3776		0.3879		0.0947		0.0697		0.0772		0.0790

序号	原始数据 $x^{(0)}$	GM		DGM		CFGM		PGM		NCFDGM-QPSO		NCFDGM-GA	
		$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%	$\hat{x}^{(0)}$	APE/%
11	8.09	8.7858	8.6007	8.7957	8.7231	7.6014	6.0396	8.0037	1.0662	7.7938	3.6612	7.7951	3.6452
12	8.56	9.9133	15.8096	9.9210	15.8995	7.9339	7.3143	8.8110	2.9317	8.2561	3.5499	8.2547	3.5661
13	8.91	11.1855	25.5387	11.1903	25.5922	8.2259	7.6779	9.7728	9.6840	8.2561	3.5499	8.7007	2.3486
14	9.32	12.6209	35.4174	12.6219	35.4283	8.4803	9.0097	10.9188	17.1549	9.1424	1.9057	9.1347	1.9877
MAPE/%			21.3416		21.4108		7.5103		7.7092		2.8537		2.8869
MAE			1.9064		1.9122		0.6596		0.6997		0.2456		0.2487
RMSE			2.1441		2.1478		0.6715		0.9180		0.2518		0.2541

从表 4 可以看出,无论是从拟合或是预测角度来看,CFGM(1, 1)模型和NCFDGM(1, 1)模型都明显优于GM(1, 1)和DGM(1, 1)模型. 与CFGM(1, 1)模型相比,NCFDGM(1, 1)模型的拟合精度提升幅度较小,但预测精度提升幅度较大. 与PGM(1, 1)模型相比,NCFDGM(1, 1)模型的拟合效果略逊,其MAPE值高约0.25%;但预测效果明显较优,其MAPE值低约4.86%.

综合案例 1 和案例 2,相较于经典的GM(1, 1)模型和DGM(1, 1)模型,NCFDGM(1, 1)模型借助于一致分数阶累加和新息优先累加,更能体现信息的差异性对数据发展趋势的影响,极大地提高了拟合和预测精度. 相比最近提出的CFGM(1, 1)模型,NCFDGM(1, 1)模型更加突出了新息优先性且有效克服了模型转化误差,因而拟合和预测精度都有一定幅度的提升.

#### 4 结 论

本文首先基于灰色预测理论中的新息优先原则将新息优先累加与一致分数阶累加相结合,提出了新息优先一致分数阶累加生成算子,从理论上给出了新算子满足新息优先原则的条件. 然后基于离散灰

色预测模型的思想,提出了新息优先一致分数阶离散GM(1, 1)(NCFDGM(1, 1))模型. 新模型有效克服了一致分数阶GM(1, 1)模型严格不满足新息优先原则和存在模型转换误差的两个缺陷. 两个实际案例验证了本文的理论结果以及模型的合理性. 结果表明NCFDGM(1, 1)可以更好地体现信息的差异性对数据发展趋势的影响,比GM(1, 1)模型、DGM(1, 1)模型以及CFGM(1, 1)模型的拟合和预测精度都有所提高.

在现实生活中,一个系统的特征不仅会受到自身历史因素的影响,还会有系统内其他诸多因素的影响,且可能呈现出波动性、周期性、非线性特征,导致对序列的准确预测十分困难. 因此,在未来的研究中,可考虑将新息优先一致分数阶累加与多变量灰色预测模型相结合,以解决多变量数据的非线性特征,从而提高模型的实用性.

#### 参考文献(References)

[1] 刘思峰, 杨英杰, 吴利丰, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第7版. 北京: 科学出版社, 2014: 1-5.  
(Liu S F, Yang Y J, Wu L F, et al. Grey system theory and its application[M]. The 7th ed. Beijing: Science Press,

- 2014: 1-5.)
- [2] 冯永年. 宴家隧道围岩收敛灰色系统预测模型[J]. 公路交通科技: 应用技术版, 2015, 11(3): 169-172.  
(Feng Y N. Grey system prediction model of surrounding rock convergence in Yanjia tunnel[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2015, 11(3): 169-172.)
- [3] Xiao X P, Yang J W, Mao S H, et al. An improved seasonal rolling grey forecasting model using a cycle truncation accumulated generating operation for traffic flow[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 51: 386-404.
- [4] Yan S L, Su Q, Gong Z W, et al. Online public opinion prediction based on rolling fractional grey model with new information priority[J]. Information Fusion, 2023, 91(C): 277-298.
- [5] 刘思峰, 曾波, 刘解放, 等. GM(1, 1)模型的几种基本形式及其适用范围研究[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(3): 501-508.  
(Liu S F, Zeng B, Liu J F, et al. Several basic models of GM(1, 1) and their applicable bound[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(3): 501-508.)
- [6] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations, 2013, 18(7): 1775-1785.
- [7] 许泽东, 党耀国, 杨德岭. 含分数阶多项式的离散灰色预测模型及其应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(12): 3578-3584.  
(Xu Z D, Dang Y G, Yang D L. Discrete grey forecasting model with fractional order polynomial and its application[J]. Control and Decision, 2023, 38(12): 3578-3584.)
- [8] 周伟杰, 张宏如, 党耀国, 等. 新息优先累加灰色离散模型的构建及应用[J]. 中国管理科学, 2017, 25(8): 140-148.  
(Zhou W J, Zhang H R, Dang Y G, et al. New information priority accumulated grey discrete model and its application[J]. Chinese Journal of Management Science, 2017, 25(8): 140-148.)
- [9] Shen Q Q, Shi Q, Tang T P, et al. A novel weighted fractional GM(1, 1) model and its applications[J]. Complexity, 2020, 2020: 6570683.
- [10] Liu L Y, Chen Y, Wu L F. The damping accumulated grey model and its application[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021, 95: 105665.
- [11] Zhang K, Yin K D, Yang W D. Probabilistic accumulation grey forecasting model and its properties[J]. Expert Systems with Applications, 2023, 223: 119889.
- [12] Ma X, Wu W Q, Zeng B, et al. The conformable fractional grey system model[J]. ISA Transactions, 2020, 96: 255-271.
- [13] Xie W L, Liu C X, Wu W Z, et al. Continuous grey model with conformable fractional derivative[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 139: 110285.
- [14] Wu W Q, Ma X, Zhang Y Y, et al. A novel conformable fractional non-homogeneous grey model for forecasting carbon dioxide emissions of BRICS countries[J]. The Science of the Total Environment, 2020, 707: 135447.
- [15] Liu C X, Xu Z G, Zhao K Y, et al. Forecasting education expenditure with a generalized conformable fractional-order nonlinear grey system model[J]. Heliyon, 2023, 9(6): e16499.
- [16] Dun M, Xu Z C, Wu L F, et al. The information priority of conformable fractional grey model[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2022, 415: 114460.
- [17] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 1173-1186.
- [18] 苏先娜, 谢富纪. DGM(1, 1)模型的特性及其在技术创新领域中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3): 635-641.  
(Su X N, Xie F J. The properties of model DGM(1, 1) and its application in technology innovation[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2016, 36(3): 635-641.)
- [19] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(7): 1822-1827.  
(Wu L F, Liu S F, Yao L G. Discrete grey model based on fractional order accumulate[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2014, 34(7): 1822-1827.)
- [20] 孟伟, 曾波. 基于互逆分数阶算子的离散灰色模型及阶数优化[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1903-1907.  
(Meng W, Zeng B. Discrete grey model with inverse fractional operators and optimized order[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1903-1907.)
- [21] Wu L F, Zhao H Y. Discrete grey model with the weighted accumulation[J]. Soft Computing, 2019, 23(23): 12873-12881.
- [22] 曹阳, 梁爽, 沈琴琴, 等. 阻尼累加离散GM(1, 1)模型及其应用[J]. 控制与决策, 2023, 38(6): 1687-1694.  
(Cao Y, Liang S, Shen Q Q, et al. Damping accumulated discrete GM(1, 1) model and its application[J]. Control and Decision, 2023, 38(6): 1687-1694.)
- [23] Wu W Q, Ma X, Zhang H, et al. A conformable fractional discrete grey model CFDGM(1, 1) and its application[J]. International Journal of Grey Systems, 2022, 2(1): 5-15.

### 作者简介

沈琴琴(1984—), 女, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为灰色系统理论与预测、智能交通, E-mail: shenqq@ntu.edu.cn;

曹阳(1986—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为灰色系统理论与预测、科学计算、智能信息处理, E-mail: caoyangnt@ntu.edu.cn;

王鲁欣(1983—), 女, 博士生, 主要研究方向为灰色系统理论与预测, E-mail: wangluxin@jssc.edu.cn;

高赛昆(1988—), 男, 硕士生, 主要研究方向为灰色系统理论与预测, E-mail: Gaosaikun88@163.com.